

В.Р. КУЛІНЧЕНКО, д-р техн. наук,

І.В. ДУБКОВЕЦЬКИЙ, канд. техн. наук

Національний університет харчових технологій

ТУРБУЛЕНТНИЙ РЕЖИМ РУХУ РЕОЛОГІЧНИХ РІДИН В ТРУБАХ

Виконані теоретичні дослідження і їх співставлення з раніше отриманими експериментальними даними ряду авторів. Отримані узагальнюючі залежності, які з високою достовірністю характеризують динаміку руху неньютонівських рідин.

Ключові слова: *реологія, псевдопластичні середовища, гідродинаміка, гідравлічні опори, ламінарний і турбулентний режими руху, апроксимація.*

Реологічні рідини широко використовуються в хімічній, харчовій, мікробіологічній промисловості, але до цього часу гідродинаміка їх турбулентних потоків вивчена недостатньо [1], що не сприяє запитам практики, пов'язаних з розрахунком і конструюванням апаратів для переробки неньютонівських середовищ.

Зауважимо, що досягнути для високов'язких реологічних рідин турбулентного режиму течії в трубах важко, але ця задача значно спрощується під час циркуляційного руху в апаратах ерліфтного типу [2], циркуляційні труби в яких досягають 2,5 м і більше. Такі апарати застосовуються для проведення процесу біосинтезу, культуральна рідина в яких має неньютонівські властивості [3].

© В.Р. Кулінченко, І.В. Дубковецький, 2011

Для вирішення задач з гідродинаміки і тепло-масообміну, пов'язаних з розрахунком апаратів ерліфтного типу [4], необхідно знати основні закономірності, які описують розподіл швидкостей в трубах і дозволяють

розраховувати коефіцієнти гідравлічних опорів під час турбулентного руху реологічних рідин.

Реологічна поведінка псевдопластичних середовищ у широкому діапазоні швидкостей зсуву описується [5] степеневим рівнянням Освальда:

$$u_*^2 = \nu_p \cdot (du / dy)^m. \quad (1)$$

де $u_* = (\tau/\rho)^{0,5}$ — динамічна швидкість (м/с), τ — дотична напружка (Н/м²), ρ — густина (кг/м³), ν_p — кінематична ненютонівська в'язкість (м²/с^{2-m}), du/dy — швидкість зсуву (1/с), m — показник ненютонівської поведінки.

За аналогією з нютонівською рідиною можна записати:

$$u_*^2 = \nu_p (du / dy)^m. \quad (2)$$

З рівнянь (1) і (2), з використанням значень швидкості зсуву і дотичних напружень на стінці, можна отримати залежність для знаходження ефективної в'язкості

$$\nu_e = \frac{3m+1}{4m} \left[\frac{\nu_p}{u_*^{2(1-m)}} \right]^{1/m}. \quad (3)$$

Виходячи з моделі Прандтля [6], за якою дотичні напруження постійні по всьому перерізу турбулентного потоку і дорівнюють дотичним напруженням на стінці, для ненютонівських рідин можна записати:

$$u_* = \ell_n \cdot du / dy, \quad (4)$$

де ℓ_n — довжина шляху перемішування, значення якої можна визначити з наступних передумов.

Для нютонівської рідини динамічна довжина з формули (2) становить

$$\ell_* = \frac{\nu_e}{u_*} = \frac{u_*}{du / dy}, \quad (5)$$

звідки, з використанням рівнянь (1) і (3), отримаємо

$$\ell_{*n} = \frac{3m+1}{4m} \frac{u_*}{du / dy}, \quad (6)$$

або

$$\ell_{*n} = \frac{3m+1}{4m} \ell_*. \quad (7)$$

Тому, що всі величини мають розмірність довжини, то вони можуть відрізнятися від масштабу довжини ℓ_* і ℓ_{*n} тільки коефіцієнтами

пропорційності, то, на цій підставі, для неньютонівських рідин справедливо буде записати

$$\ell_n = \frac{3m+1}{4m} \ell, \quad (8)$$

$$\delta_{ln} = \frac{3m+1}{4m} \delta_n, \quad (9)$$

де δ_n, δ_{ln} — відповідно товщина ламінарного підшарку для нютонівської і реологічної рідини.

Підставляючи значення ℓ_n з формули (8) у рівняння (4) і приймаючи $\ell = 0,4y$ [6], з наступним інтегруванням отримаємо:

$$\frac{u}{u_*} = 2,5 \frac{4m}{3m+1} \ln y + C. \quad (10)$$

При $y = R$ $u = u_{\max}$, тоді із залежності (10) слідує, що

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = -2,5 \frac{4m}{3m+1} \ln \frac{y}{R}, \quad (11)$$

де R — радіус труби (м).

Оскільки середня швидкість становить

$$\bar{u} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(R-y) dy, \quad (12)$$

то для її недостатчі з рівнянь (11) і (12) можна отримати вираз:

$$D = \frac{u_{\max} - \bar{u}}{u_*} = 2 \cdot 2,5 \frac{4m}{3m+1} \int_0^1 \ln \frac{y}{R} \left(1 - \frac{y}{R}\right) \cdot d\left(\frac{y}{R}\right) = 3,75 \frac{4m}{3m+1}. \quad (13)$$

Раніше Додж і Метцнер [7] емпіричним шляхом для недостатчі швидкості отримали залежність:

$$\frac{u_{\max} - \bar{u}}{u_*} = 3,686m^{0,25}, \quad (14)$$

що співпадає з виразом (13) наведеному на рис. 1 (криві 2 і 2'). Обидві формули (13 і 14) дають близькі результати в області $0,4 \leq m \leq 1,0$.

Сталу інтегрування C в рівнянні (10) можна відшукати шляхом змикання профілей швидкостей у турбулентному ядрі потоку і в ламінарному шарі. На границі ламінарного шару при $y = \delta_{ln}$ швидкість рідини становить $u = u_{ln}$. За аналогією течії для неньютонівських рідин [6] можна записати;

$$u_{ln} = \alpha_n u_*, \quad (15)$$

$$\alpha_n = u_* \frac{\delta_{np}}{v_e}, \quad (16)$$

$$\delta_{np} = 11,6 \frac{v_e}{u_*}. \quad (17)$$

Сумісний розв'язок рівнянь (3), (9), (10) (15...17) приводить до залежності:

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \frac{4m}{3m+1} \lg \left(\frac{u_*^{2-m} y^m}{v_p} \right)^{1/m} + 11,6 \frac{3m+1}{4m} - 5,75 \frac{4m}{3m+1} 11,6 \lg \frac{3m+1}{4m}, \quad (18)$$

яка описує універсальний профіль розподілу швидкостей під час турбулентного режиму течії псевдопластичних рідин в трубах.

Використовуючи рівняння (13) і (18), для розподілу середньої швидкості можна написати:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{4m}{3m+1} 5,75 \ln \left(\frac{u_*^{2-m} R^m}{v_p} \right)^{1/m} + 11,6 \frac{3m+1}{4m} - 5,75 \frac{4m}{3m+1} 11,6 \ln \frac{3m+1}{4m} - 3,75 \frac{4m}{3m+1}, \quad (19)$$

Звідки за умови, що коефіцієнт гідравлічного тертя $\lambda = 8(u_* / \bar{u})^2$, $d = 2R$ і число Рейнольдса для реологічної рідини становитиме $Re_p = \frac{\bar{u}^{2-m} d^m}{\frac{v_p}{8} \left(\frac{6m+2}{m} \right)^m}$, можна

отримати закон опору псевдопластичного середовища:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{4}{3m+1} 2 \ln Re_p \lambda^{\frac{2-m}{2}} - B, \quad (20)$$

де значення B для різних m наведені в таблиці.

У [7] дослідним шляхом отримано наступну розрахункову формулу, яка схожа з [20]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{m^{0,75}} \ln Re_p \lambda^{\frac{2-m}{2}} - \frac{0,8}{m^{1,2}}, \quad (21)$$

але була отримана для значень $m = 0,4 \dots 1,0$. Дослідна величина при $m < 0,4$ неправомірна, тому що за цих значень m другий член правої частини рівняння (21) стає більшим першого члена і вся закономірність губить фізичний зміст.

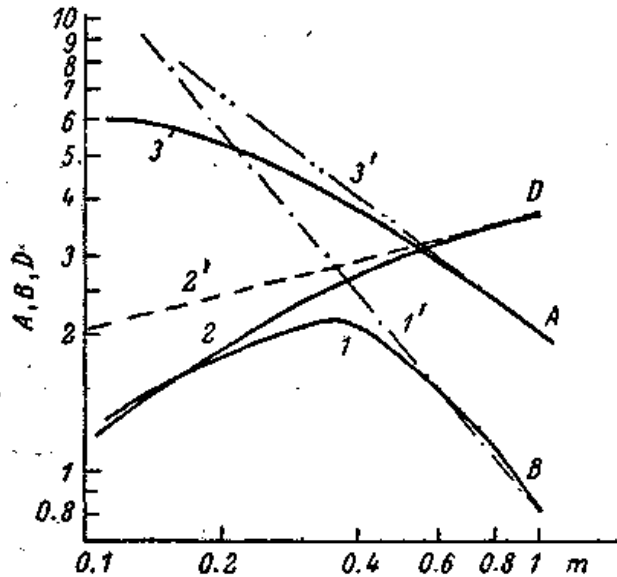


Рис. 1. Співставлення аналітичних і дослідних значень величин A, B, D у залежності від m :

1 — постійного члена в (20), 1' — те саме з (21), 2 і 2' — недостача середньої швидкості за (13) і (14) відповідно; 3 і 3' — множника з рівнянь (20) і (21) відповідно

Це слідує з рис. 1, на якому наведено порівняння постійних членів рівнянь (20) і (21): $A = 2[4/(3m + 1)]$ і $A' = 2/m^{0,75}$, B і $B' = 0,8/m^{1,2}$.

Значення постійних величин і показників степеня при різних значеннях величини m

Формула	Величини	Значення параметрів при величині m								
		1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
20	B	0,8	0,949	1,07	1,28	1,52	1,81	2,05	2,05	1,65
22	$A(m)$	8,74	9,1	9,6	10,4	11,1	12,4	14,0	15,7	19,6
22	n	7,0	7,5	8,0	8,5	9,5	10,5	12,0	15,0	20,0
24	\bar{u}/u_{\max}	0,8	0,827	0,837	0,845	0,86	0,872	0,886	0,907	0,929
25	$A_1(m)$	6,99	7,53	8,04	8,79	9,5	10,8	12,4	14,25	18,2
26	$a(m)$	0,316	0,31	0,305	0,3	0,295	0,29	0,285	0,275	0,26
26	b	0,25	0,255	0,263	0,276	0,282	0,296	0,312	0,323	0,345

Тому, що функція (20) не має явного розв'язку відносно λ , то її використання справедливе тільки при великих значеннях числа Рейнольдса ($Re_p > 10^5$) і у цьому разі логарифмічний закон (18) доцільно апроксимувати степеневою залежністю виду

$$\frac{u}{u_*} = A(m) \left[\left(\frac{u_*^{2-m} y^m}{\nu_p} \right)^{1/m} \right]^{1/n}. \quad (22)$$

Внаслідок такої апроксимації в діапазоні $60 \leq (u_*^{2-m} y^m / \nu_p)^{1/m} \leq 600$ знайдені значення множника $A(m)$ і показника степеня n (див. табл.) для псевдопластичних рідин з різними m .

Із залежності (22) при $y = R$ і $u = u_{\max}$ виходить, що

$$\frac{u}{u_{\max}} \left(\frac{y}{R} \right)^{1/n}, \quad (23)$$

звідки, після інтегрування у відповідності з формулою (12), приходимо до узагальненого відношення середньої швидкості до максимальної:

$$\frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \frac{2n^2}{(1+n)(1+2n)}. \quad (24)$$

Сумісний розв'язок рівнянь (22) і (24) в загальному вигляді приводить до виразу:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = A(m) \frac{2n^2}{(1+n)(1+2n)} \left(\frac{u_*^{2-m} R^m}{\nu_p} \right)^{\frac{m}{n}} = A_1 \left(\frac{u_*^{2-m} R^m}{\nu_p} \right)^{\frac{m}{n}}. \quad (25)$$

Підставляючи в рівняння (25) значення коефіцієнта тертя λ і доповнюючи його необхідними множниками типу Re_p , отримуємо аналог формули Блазіуса для ньютонівських рідин:

$$\lambda = \frac{8 \cdot 8^{\frac{2}{(n-1)m+2}} \cdot 2^{\frac{2m}{(n-1)m+2}}}{A_1(m)^{\frac{2}{(n-1)m+2}} \left(\frac{6m+2}{m} \right)^{\frac{2m}{(n-1)m+2}} Re_p^{\frac{2}{(n-1)m+2}}} = a(m) Re_p^b. \quad (26)$$

Значення величин \bar{u} / u_{\max} , $A_1(m)$ і b наведені в таблиці.

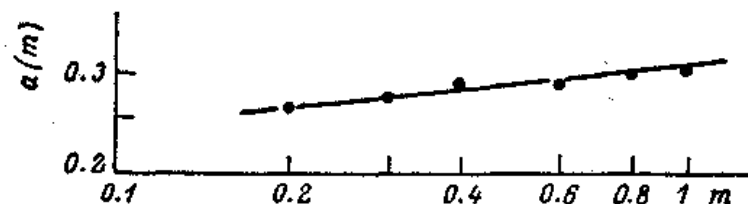


Рис. 2. Залежність коефіцієнта $a(m)$ від показника m неньютонівської поведінки рідини: суцільна лінія — за рівнянням (26), точки — дані роботи [7]

Для зручності використання розрахункової залежності (26) в інженерній практиці вона може бути замінена наступними формулами. Так, в області $0,75 \leq m \leq 1,0$ з похибкою $\pm 3\%$ справедливо (рис. 2):

$$\lambda = 0,316 \frac{m^{0,121}}{\text{Re}_p^{\frac{2}{6+2m}}}, \quad (27)$$

а в діапазоні $0,2 \leq m \leq 0,75$ з похибкою $\pm 3\%$ справедливо (рис. 3):

$$\lambda = \frac{0,316m^{0,121}}{\text{Re}_p^{\frac{2}{5,5+2,5m}}}. \quad (28)$$

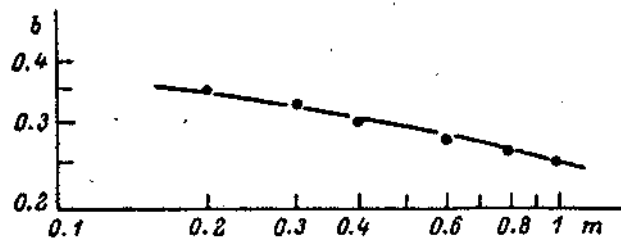


Рис. 3. Залежність показника степені b при Re_p від m : суцільна лінія — за рівнянням (26), точки — дані роботи [7]

На рис. 2 і 3 наведено співставлення постійного множника і степені біля числа Рейнольдса з даними [7], заданими таблично, при цьому максимальна похибка не перевищує $\pm 5\%$.

Коректність отриманих аналітичним шляхом формул (18), (19) (20) і (26), а також апроксимуючих залежностей (27) і (28) підтверджують той факт, що при $m = 1$ (ньютонівська рідина) вони переходять у загальновідомі з гідродинаміки турбулентних потоків вирази [6, 8].

Виявлений зв'язок між δ_l і δ_{lm} [рівняння (9)] дозволяє більш обгрунтовано підходити до знаходження критичного значення $\text{Re}_{p,кр}$, за якого відбувається перехід від ламінарного до турбулентного режиму течії. Число Рейнольдса для пограничного шару за аналогією можна записати $\text{Re}_{p,\delta} = \bar{u}\delta_{lm} / \nu_e$, чи з урахуванням формули (9)

$$\text{Re}_{p,\delta} = \frac{\bar{u}\delta_{лп}}{v_e} \frac{3m+1}{4m} \frac{\bar{u}\delta_l}{v_e} \frac{3m+1}{4m} \text{Re}_\delta. \quad (29)$$

Оскільки для ньютонівських рідин $\text{Re}_{кр} = \bar{u}\delta / v_e = 2320$, то виходячи з (29) отримаємо:

$$\text{Re}_{p,кр} = 2320 \frac{3m+1}{4m}. \quad (30)$$

Розраховані значення $\text{Re}_{p,кр}$ знаходяться в межах $\pm 5\%$ похибки у порівнянні з поданими в літературі [5, 7].

Висновок: Отримані розрахункові залежності, які дозволяють з достовірністю $\pm 5\%$ розв'язувати інженерні задачі пов'язані з проектуванням трубчастих апаратів при турбулентній течії в них ньютонівських рідин.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Романков П.Г.* Гидромеханические процессы химической технологии / П.Г. Романков, М.И. Курочкина. — Л.: Химия, 1974. — 288 с.
2. *Меткин В.П.* Ферментационное оборудование для производства лимонной кислоты / Меткин В.П. — М.: ЦНИТТЭИпищепром, 1978. — 23 с.
3. *Федосеев К.Г.* Физические основы и аппаратура микробиологического синтеза биологически активных соединений / Федосеев К.Г. — М.: Медицина, 1977. — 304 с.
4. *Соколов В.Н.* Газожидкостные реакторы / В.Н. Соколов, И.В. Доманский. — Л.: Машиностроение, 1976. — 214 с.
5. *Уилкинсон У.Л.* Неньютоновские жидкости / Уилкинсон У.Л. — М.: Мир, 1964. — 216 с.
6. *Лойцанский Л.Г.* Механика жидкостей и газа / Лойцанский Л.Г. — М.: Наука, 1970. — 904 с.
7. *Dodge D.W., Metzner A.V.* Am. Ind. Chem. Ing. J. 1959, vol. 5, No 2.— P. 189 – 196.
8. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя / Шлихтинг Г. — М.: Наука, 1969. — 742 с.

Одержана редколегією 5.11.2011 р.

В.Р. Кулинченко, И.В. Дубковецкий,

ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ТРУБАХ

Проведены теоретические исследования и их сопоставления с ранее полученными экспериментальными данными ряда авторов. Получены обобщающие зависимости, которые с высокой достоверностью характеризуют динамику движения неньютоновских жидкостей.

Ключевые слова: *реология, псевдопластичная среда, гидродинамика, гидравлические сопротивления, ламинарный и турбулентный режимы движения, аппроксимация.*

V. Kulintchenko, I. Dubkovetsky,

TURBULENT MODE OF THE MOTION OF REOLOGICAL LIQUIDS IN PIPES

He carried out theoretical studies and their comparison with the previously obtained experimental data of a number of authors. Obtained the generalized dependence, which with high reliability characterize the dynamics of motion of non-newtonian fluids.

Key words: *rheology, pseudoplastic environment, hydrodynamics, hydraulic outriggers, laminar and turbulent regimes of motion approximation.*