УДК 662.767.2:636.5/.6

MATHEMATICAL MODELING OF MASS TRANSFER IN PERIODIC VIBROEXTRACTION FROM HER BAL RAW MATERIAL

V. Zavialov, V. Decanskiy, A. Loboc, T. Misyura, V. Bodrov
National University of Food Technologies

Key words:
Mathematical modeling
Mass transfer
Vibroextraction
Molecular and convective diffusion

Article history:
Received 03.03.2015
Received in revised form 12.03.2015
Accepted 25.04.2015

Corresponding author:
V. Zavialov
E-mail:
npnuft@ukr.net

ABSTRACT

The article presents the results of mathematical modeling of mass transfer in periodic vibroextraction from plant material. Mathematically justified mass transfer phenomena at the level of molecular diffusion and convective transport of the target substance in the working volume vibroextractor batch. The resulting mathematical description of the process can be used for modeling the kinetics of batch extraction from plant material, and is taken as a base for modeling more complex phenomena of heat and mass transfer processes.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ ПРИ ПЕРІОДИЧНОМУ ВІБРОЕКСТРАГУВАННІ З РОСЛИННОЇ СИРОВИНИ

В.Л. Зав'ялов, В.Є. Деканський, О.П. Лобок, Т.Г. Мисюра, В.С. Бодров
Національний університет харчових технологій

У статті представлено результати математичного моделювання масоперенесення при періодичному віброекстрагуванні з рослинної сировини. Математично обґрунтовано явища масоперенесення на рівні молекулярної дифузії та конвективного перенесення цільової речовини в робочому об'ємі віброекстрактора періодичної дії. Отриманий математичний опис процесу може бути використано для моделювання кінетики періодичного екстрагування з рослинної сировини, а також як базовий для моделювання більш складних явищ теплових і масообмінних процесів.

Ключові слова: *математичне моделювання, масообмін, віброекстрагування, молекулярна і конвективна дифузія.*

Постановка завдання. Складність морфологічної будови рослинної тканини та її новий стан після фізичного або фізико-хімічного впливу під час робочого процесу ускладнює створення універсальних методів опису кінетики процесу екстрагування, тому процес описують рівняннями, що побудовані на чисельних припущеннях і спрощеннях реалій процесу.

На сьогодні інженерія не має уніфікованих та апробованих математичних моделей і алгоритмів прямих методів розрахунку твердофазової віброекстракційної апаратури. Пропоновані різними авторами математичні моделі не враховують гідродинамічних обставин і розподіленість параметрів у просторі, адже ефективність екстрагування визначається рушійною силою процесу за довжиного апарата, яка залежить від реальної гідродинамічної обстановки в апараті. Крім того, для опису нестаціонарного процесу дифузійного вилучення з рослинної сировини використовують рівняння Фіка, розв'язання якого навіть за ідеалізованих граничних умов і формі часток є достатньо громіздким, що ускладнює використання цих залежностей для аналізу масоперенесення в екстракторах. На процес вилучення цільових компонентів в однаковій мірі впливають внутрішній і зовнішній дифузійний опір, тому дослідження масообміну при віброекстрагуванні, встановлення залежності інтенсивності масовіддачі від головних факторів, що визначають ефективність процесу масообміну, є одним із головних завдань.

Теоретичний опис математичних моделей складних систем наштовхнувся на певні труднощі. Тільки за останні 30—40 років, поряд з експериментальними дослідженнями, були запропоновані фізичні моделі окремих явищ і зроблено їх математичний опис. Загалом, зважаючи на потреби, шукають спрощені методи, які надають можливість описати систему обмеженим числом диференціальних рівнянь у частинних похідних з певними граничними умовами [1, 2, 3, 4, 5].

Мета дослідження. Виконати математичний опис молекулярного та конвективного масоперенесення цільового компонента з рослинної сировини в умовах періодичного віброекстрагування, провести обчислювальний експеримент з використанням реальних даних лабораторних досліджень з метою підтвердження адекватності отриманої математичної моделі.

Виклад основного матеріалу. Одним із найважливіших і впливових аспектів при віброекстрагуванні є створення надійних умов для турбулентної дифузії. При цьому турбулентність характеризується нерегулярними пульсаціями швидкості. Важливим є те, що при масовіддачі від поверхні частинки до турбулентного потоку опір масоперенесенню зосереджено в тонкому шарі, прилеглому до границі поділу фаз.

Відомо, що конвективна дифузія в рухомому середовищі відбувається двома потоками: потоком молекулярної дифузії всередині пор твердої фази, питоме значення якого визначається рівнянням $q_м = -D dC/dn$ і потоком речовини разом із середовищем у процесі його руху з питомим значенням $q_п = C \cdot w$, або $q_п = \beta \cdot \Delta C$, де C — концентрація цільового компоненту, кг/м^3; D — коефіцієнт молекулярної дифузії, м^2/с; dC/dn — градієнт концентрацій, кг/м^4, β — коефіцієнт масовіддачі, м/с; w — швидкість руху середовища, м/с. Таким чином, швидкість конвективної дифузії дорівнюватиме сумі цих двох потоків: $q_{конв} = q_м + q_п$, кожен з яких окремо не відображає дійсного фізичного змісту процесу масоперенесення на всіх масштабних рівнях процесу.

Для моделювання періодичного процесу віброекстрагування за основу було взято рівняння зовнішнього масообміну Щукарьова:

$$\frac{dC(\tau)}{d\tau} = k\left(C^* - C(\tau)\right), \tag{1}$$

де τ — тривалість процесу, с; k — коефіцієнт масовіддачі, м/с; C^* — рівноважна концентрація цільового компонента, кг/м^3; $C(\tau)$ — поточна концентрація цільового компонента, кг/м^3.

Аналізуючи одновимірну задачу молекулярного перенесення речовини всередині твердої фази з розподіленими параметрами, а також перерозподіл речовини під час її конвективного перенесення в робочому об'ємі вздовж віброекстрактора періодичної дії, узагальнимо рівняння (1). З цією метою розглянемо модель періодичного масоперенесення у вигляді рівняння в частинних похідних параболічного типу:

$$\frac{\partial C(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 C(x,\tau)}{\partial x^2} + k\left(C^* - C(x,\tau)\right) \tag{2}$$

з початковими та крайовими умовами другого роду:

$$C(x,\tau_2) = C_0(x), \qquad 0 \le x \le L;$$
$$\left.\frac{\partial C(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; \qquad \left.\frac{\partial C(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \qquad \tau > \tau_0. \tag{3}$$

Після перетворень права частина рівняння (1) матиме такий вигляд:

$$\frac{\partial C(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 C(x,\tau)}{\partial x^2} + bC(x,\tau) + q, \tag{4}$$

де $b = -k$, а $q = kC^*$.

Використовуючи метод розділення змінних, можна одержати розв'язок крайової задачі (1), (2), (3) у такому вигляді:

$$C(x,\tau) = \int_0^L G(x,\varsigma,\tau)C_0(\varsigma)\,d\varsigma + \int_0^\tau\int_0^L G(x,\varsigma,\tau-t)q(\varsigma,\tau)\,d\varsigma\,dt, \tag{5}$$

де $G(x,\varsigma,\tau)$ — функція Гріна виду :

$$G(x,\varsigma,\tau) = \mathrm{e}^{b\tau}\left[\frac{1}{L} + \frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{\pi k x}{L}\cdot\cos\frac{\pi k\varsigma}{L}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{a\pi^2 k^2}{L^2}\tau}\right]. \tag{6}$$

Розглянемо окремий випадок, коли початкова концентрація є сталою, тобто $C_0(\varsigma) = C_0 = \mathrm{const}$.

У цьому випадку розв'язок крайової задачі (1)—(3) можна спростити. Дійсно, інтегруючи функцію Гріна (6) по просторовій координаті ς, одержимо:

$$\int_0^L G(x,\varsigma,\tau)\,d\varsigma = \mathrm{e}^{b\tau}\left[\int_0^L \frac{1}{L}\,d\varsigma + \frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{\pi k x}{L}\cdot\int_0^L \cos\frac{\pi k\varsigma}{L}\,d\varsigma\cdot \mathrm{e}^{-\frac{a\pi^2 k^2}{L^2}\tau}\right]. \tag{7}$$

Враховуючи, що наступний інтеграл дорівнює:

$$\int_0^L \cos\frac{\pi k\varsigma}{L}d\varsigma = \frac{L}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k\varsigma}{L}\right)\Big|_0^L = \frac{L}{\pi k}\left(\sin(\pi k)-\sin(0)\right) = \frac{L}{\pi k}\sin(\pi k) = 0, \tag{8}$$

зі співвідношень (7) та (8) одержимо:

$$\int_0^L G(x,\varsigma,\tau-t)d\varsigma = \mathrm{e}^{b(\tau-t)}. \tag{9}$$

Беручи до уваги останню рівність, перетворимо другий доданок у правій частині співвідношення (5):

$$\begin{gathered}\int_0^\tau\int_0^L G(x,\varsigma,\tau-t)d\varsigma\, dt = \int_0^\tau \mathrm{e}^{b(\tau-t)}dt = e^{b\tau}\int_0^\tau \mathrm{e}^{-bt}dt = \mathrm{e}^{b\tau}\left(-\frac{1}{b}\mathrm{e}^{-bt}\Big|_0^\tau\right) = \\ = -\frac{1}{b}\mathrm{e}^{b\tau}\left(\mathrm{e}^{-b\tau}-1\right) = -\frac{1}{b}\left(1-\mathrm{e}^{b\tau}\right) = \frac{1}{b}\left(\mathrm{e}^{b\tau}-1\right).\end{gathered} \tag{10}$$

Таким чином, у результаті виконаних перетворень одержимо формулу для розрахунку поточної концентрації цільового компонента в апараті у вигляді:

$$C(x,\tau) = C_0\cdot\mathrm{e}^{b\tau} + \frac{q}{b}\left(\mathrm{e}^{b\tau}-1\right). \tag{11}$$

Варто зауважити, що в останній формулі (11) концентрація С не залежить від просторової координати х, а лише від часової координати τ.

З урахуванням прийнятих позначень у рівнянні (4), де $b=-k$, $q=kC^*$, рівняння (11) можна звести до вигляду :

$$\begin{gathered}C(x,\tau) = C_0\cdot\mathrm{e}^{-k\tau} - \frac{kC^*}{k}\left(\mathrm{e}^{-k\tau}-1\right) = C_0\cdot\mathrm{e}^{-k\tau} - C^*\left(\mathrm{e}^{-k\tau}-1\right) = \\ = C_0\cdot\mathrm{e}^{-k\tau} + C^*\left(1-\mathrm{e}^{-k\tau}\right).\end{gathered} \tag{12}$$

Отримане рівняння (12) враховує молекулярну внутрішню дифузію та кінетику зовнішнього масоперенесення і фактично збігається з розв'язком рівняння Щукарьова:

$$\begin{cases}\dfrac{dC(\tau)}{d\tau} = k\left(C^*-C(\tau)\right), \\ C(0) = C_0.\end{cases} \tag{13}$$

Рівняння (12) фактично визначає розв'язок моделі ідеального перемішування, яке відображає процес масоперенесення цільових компонентів в умовах періодичного віброекстрагування.

У розглянутій моделі (2) невідомими є параметри a — коефіцієнт молекулярної дифузії, а також коефіцієнт k, який визначає лінійну модель кінетики процесу. Ідентифікація цих параметрів здійснювалась зваженим методом найменших квадратів на основі експериментальних даних, отриманих на віброекстракторі періодичної дії з комбінованим енергопідведенням [6]. Віброекстрактор являє собою циліндричний корпус, в об'ємі якого розміщено віброперемішувальну систему, що складається з гнучкого контейнера, проникного для екстрагенту, закріпленого на ситчастій опорі та з'єднаного штоком через верхній перфорований диск з віброприводом. Також віброекстрактор оснащено високочастотним випромінювачем, встановленим під гнучким контейнером. Дослідження проводилися при фіксованій амплітуді $20\cdot10^{-3}$ м, з частотами коливань віброперемішувальної системи 3—7 Гц та гідромодулях 15—25 з і без застосування високочастотного випромінювача. Температура екстрагенту складала 20 °C. Як сировину використовували подрібнений вівсяний солод середнього помелу.

Вимірювання концентрації цільового компонента здійснювалось у кінці експериментальної ділянки в точці $x=L$ у задані дискретні моменти часу τ_i:

$$y_i = C(L,\tau i)+\xi_i, \quad i=1,2,...,n,$$

де y_i — результат i-того вимірювання поточної концентрації; ξ_i — похибка i-того вимірювання.

Невідомі параметри a і k визначаються з такої умови:

$$S(a,k)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\left(y_i-C(L,\tau_i)\right)^2\to\min_{a,\,k},$$

де α_i — вагові множники, які дозволяють враховувати ступінь точності вимірювань у різні моменти часу. Якщо виміри протягом усього періоду спостереження рівноточні, то $\alpha_i=1$, $i = 1,2, \dots ,n$.

На рисунку, як приклад, наведено деякі результати обчислювального експерименту для вибраного гідромодуля $q=15$ для дослідів, що проведені в системі подрібнений вівсяний солод–вода.

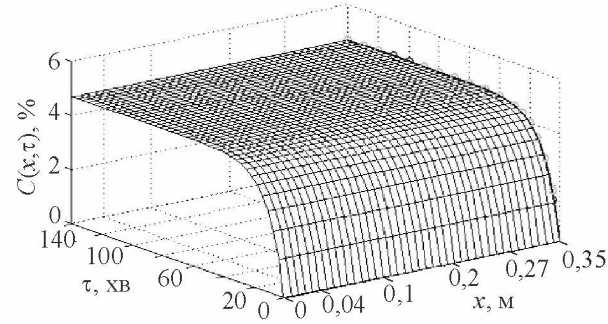

Рис. Динаміка концентрації речовини в рідкій фазі:
τ — тривалість процесу, хв; x — переріз апарата, м

Рисунок ілюструє, що рівняння (2) з лінійною функцією кінетики процесу вилучення цільового компонента з рослинної сировини дійсно зводиться до моделі ідеального перемішування.

Висновок

Наведений математичний опис пропонується використати для моделювання кінетики періодичного екстрагування з рослинної сировини в розподілених середовищах. Ця модель може бути взята за базову для моделювання більш складних явищ масообміну, дифузії, адсорбції, теплообміну тощо.

Література

1. *Гумницький Я.М.* Кінетика екстрагування цільового компонента з поодинокого капіляра в умовах вакуумування системи / Я.М. Гумницький, Л.О. Венгер, М.Ф. Юрим // Хімія, технологія речовин та їх застосування: Вісник НУ «Львівська політехніка». — 2003. — № 488 — С. 220—222.
2. *Девидсон И.Ф.* Псевдоожижение / И.Ф. Девидсон, Д. Харрисон [пер с англ. под ред. Н.И. Гельперина]. — М.: Химия, 1974. — 725 с.
3. *Лобода П.П.* Влияние интенсивности механических колебаний на скорость растворения / П.П. Лобода, В.Н. Стабников // Пищевая технология. — 1965. — № 2. — С. 165—170.
4. *Лобода П.П.* Исследование масоотдачи от твердых тел к жидкости в аппарате с вибрирующим устройством: дис. канд. техн. наук: 05.18.12 / Лобода Павел Петрович. — К., 1966. — 182 с.
5. *Рыбальченко А.С.* Исследование экстракции солодкового корня / А.С. Рыбальченко, В.П. Голицын, Л.Ф. Комарова // Химия растительного сырья. — 2002. — № 4. — С. 55—59.
6. *Патент* 103838 України, МПК B 01 D 11/02. Вібраційний екстрактор періодичної дії з комбінованим енергопідведеням / Зав'ялов В.Л., Деканський В.Є., Попова Н.В., Мисюра Т.Г., Бодров В.С., Запорожець Ю.В. —№ а 2012 08141; заявл. 30.07.12; опубл. 25.11.13, Бюл. № 4.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАССОПЕРЕНОСА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВИБРОЭКСТРАГИРОВАНИИ ИЗ РАСТИТЕЛЬНОГО СЫРЬЯ

В.Л. Завьялов, В.Е. Деканский, А.П. Лобок, Т.Г. Мисюра, В.С. Бодров
Национальный университет пищевых технологий

В статье представлены результаты математического моделирования массопереноса при периодическом виброэкстрагировании из растительного сырья. Математически обоснованы явления массопереноса на уровне молекулярной диффузии и конвективного переноса целевого вещества в рабочем объеме виброэкстрактора периодического действия. Полученное математическое описание процесса может быть использовано для моделирования кинетики периодического извлечения из растительного сырья, а также взято как базовое для моделирования более сложных явлений тепловых и массообменных процессов.

Ключевые слова: *математическое моделирование, массообмен, виброэкстрагирование, молекулярная и конвективная диффузия.*