Самсонов,В.В.
Самсонов,В.В.
Samsonov,V.

ДВУХУРОВНЕВЫЙ АЛГОРИТМ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ ПРЕДПРИЯТИЯ

В статье представлено рассмотрение двухуровневого алгоритма выбора эффективных решений подсистемы верхнего уровня относительно эффективных решений подчиненных подсистем с учетом их агрегирования.

Ключевые слова: двухуровневый алгоритм, многоуровневые системы, оптимизация.

ДВОРІВНЕВИЙ АЛГОРИТМ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ВИРОБНИЧОЇ ПРОГРАМИ ПІДПРИЄМСТВА

У статті представлено розгляд дворівневого алгоритму вибору ефективних рішень підсистеми верхнього рівня щодо ефективних рішень підлеглих підсистем з урахуванням їх агрегування.

Ключові слова: дворівневий алгоритм, багаторівневі системи, оптимізація.

TWO-TIER PROBLEM OF OPTIMIZATION OF PRODUCTIVE PROGRAM ENTERPRISES ALGORITHM

In the article consideration of two-tier algorithm of choice of effective decisions of subsystem is presented top level relatively effective decisions of inferior subsystems taking into account their aggregating.

Keywords: two-tier algorithm, multilevel systems, optimization.

Рассмотрим задачу планирования производства предприятия в двухуровневой иерархической системе, которая состоит из подсистемы верхнего уровня (руководство предприятия) и подчиненных подсистем нижнего уровня (производственных участков). Подсистема верхнего уровня при выборе плановых заданий исходит из набора собственных критериев, которые зависят от значений критериев подчиненных подсистем, т.е. пространство переменных подсистемы верхнего уровня совпадает с пространством критериев подчиненных подсистем. В случае многокритериальности задач, которые решаются в подсистемах, оптимальными являются эффективные решения на множестве критериев подсистем относительно множества допустимых решений. При этом подсистему верхнего уровня интересуют такие эффективные решения на множестве ее критериев, которые являются эффективными оценками для каждой подсистемы нижнего уровня. Поэтому подсистема верхнего уровня при выборе эффективных решений должна учитывать агрегацию эффективных решений подсистем нижнего уровня в виде эффективных оценок.

Рассмотрим двухуровневый алгоритм выбора эффективных решений подсистемы верхнего уровня относительно эффективных решений подчиненных подсистем с учетом их агрегирования. Модели подсистем будем рассматривать как многокритериальные задачи линейного программирования и не учитывать связи между подсистемами нижнего уровня.

Множество допустимых решений l-ой подсистемы нижнего уровня характеризуется вектором переменных X_l, удовлетворяющих множеству допустимых решений

$$X_l = \left\{x_l / \sum_{j \in J_l} a_{kj}^l x_j^l \le b_k^l, k \in K_l, x_j^l \ge 0, j \in J_l\right\} \qquad (1)$$

где J_l, K_l - множества переменных и ограничений l-ой подсистемы нижнего уровня соответственно, $x_l = (x_j^l, j \in J_l)$. Критерии l-ой подсистемы имеют вид

$$f_{li}(x_l) = \sum_{j \in J_l} c_{ij}^l x_j^l, i \in I_l, \qquad (2)$$

где I_l - множество критериев l-ой подсистемы нижнего уровня.

Подсистема верхнего уровня характеризуется вектором переменных $Y = (y_{li}, i \in I_l, l \in Z)$, удовлетворяющим систему линейных неравенств

$$Y = \left\{y / \sum_{l \in Z} \sum_{i \in I_l} \alpha_{li}^k y_{li} \ge \beta_k, k \in K\right\}, \qquad (3)$$

и векторным критерием

$$F_j(y) = \sum_{l \in Z} \sum_{i \in I_l} \gamma_{li}^j y_{li}, j \in J, \qquad (4)$$

где Z - множество подсистем нижнего уровня, K, J - множество ограничений и критериев подсистемы верхнего уровня соответственно. Предположим, что критерии всех подсистем максимизируются.

Считаем, что $y_l = (y_{li}, i \in I_l)$ - слабо эффективная оценка задачи (1), (2), если существует $x_l^0 \in X_l$, что $f_{li}(x_l^0) = y_{li}, i \in I_l$ и не существует $x_l \in X_l$, чтобы $f_{li}(x_l) \succ y_{li}, i \in I_l$. Обозначим множество слабо эффективных оценок задачи (1), (2) через S_l. Пусть $Y_0 = Y \bigcap_{l \in Z} S_l, F_j^0 = \max\left\{F_j(y) / y \in Y_0\right\}$.

Подсистему верхнего уровня интересуют такие слабо эффективные оценки подсистем нижнего уровня, которые определяют слабо эффективные решения подсистемы верхнего уровня на множестве критериев (4) относительно ограничений (3). Для выбора определенного слабо эффективного решения подсистемой верхнего уровня в пространстве оценок (4) задаются “желаемые” значения этих критериев $F_j^*, j \in J$ такие, чтобы $F_j^* \langle F_j^0, j \in J$, и решается следующая задача

$$\min\left\{\max_{j \in J}\left[(F_j^0 - F_j(y)) / (F_j^0 - F_j^*\right] / y \in Y_0\right\}. \qquad (5)$$

Так как множества $S_l, l \in Z$ невыпуклые и отсутствует описание множеств слабо эффективных оценок подсистем нижнего уровня, то решение непосредственно задачи (5) невозможно. Для ее решения рассмотрим следующий двухуровневый алгоритм, который основан на внешней аппроксимации множества слабо эффективных оценок подсистем нижнего уровня.

Полагается, что выпуклое множество D_l определяет внешнюю аппроксимацию множества слабо эффективных оценок l-ой подсистемы, если для произвольного $y_l^0 \in S_l, y_l^0 = (y_{li}^0, i \in I_l)$ выполняются следующие условия: $y_l^0 \in D_l$; не существует $y_l \in D_l, y_l = (y_{li}, i \in I_l)$, чтобы $y_{li} \rangle y_{li}^0, i \in I_l$. Формирование множеств D_l будем проводить, используя решения следующей задачи:

$$\varphi_l^0 = \min\left\{\max_{i \in I_l}\left[(y_{li}^* - f_{li}(x_l)) / (y_{li}^0 - f_{li}^*)\right] / x_l \in x_l\right\}, \qquad (6)$$

где $y_{li}^0, i \in I_l$ - заданные подсистемой верхнего уровня значения критериев l-ой подсистемы нижнего уровня, $f_{li}^*, i \in I_l$ - “желаемые” для подсистемы нижнего уровня значения критериев, причем $f_{li}^* \langle y_{li}^0, i \in I_l$.

Задача (6) эквивалентна следующей задаче линейного програмування:

$$nin\varphi_l, \quad (7)$$

$$\sum_{j \in J_l} c_{ij}^l x_j^l + \varphi_l (y_{li}^0 - f_{li}^*) \ge y_{li}^0, i \in I_l, \quad (8)$$

$$\sum_{j \in J_l} a_{kj}^l x_j^l \le b_k^l, k \in K_l, \quad (9)$$

$$x_j^l \ge 0, j \in J_l. \quad (10)$$

Задача, двойственная к (7)-(10), имеет вид:

$$\max \sum_{i \in I_l} y_{li}^0 v_{li} - \sum_{k \in K_l} b_k^l u_{lk}, \quad (11)$$

$$\sum_{i \in I_l} (y_{li}^0 - f_{li}^*) v_{li} = 1, \quad (12)$$

$$\sum_{i \in I_l} c_{ij}^l v_{li} - \sum_{k \in K_l} a_{kj}^l u_{lk} \le 0, j \in J_l, \quad (13)$$

$$v_{li} \ge 0, i \in I_l, u_{lk} \ge 0, k \in K_l, \quad (14)$$

где $v_{li}, i \in I_l$ - двойственные переменные, соответствующие ограничениям (8), а $u_{lk}, k \in K_l$ - соответствующие ограничениям (9).

Двухуровневый алгоритм решения задачи (5) состоит в следующем.

Этап 0. Каждая подсистема нижнего уровня определяет максимальные значения своих критериев $y_{li}^{\max}, i \in I_l$. Внешняя аппроксимация множества слабо эффективных оценок l-ой подсистемы определяется множеством

$$D_l^0 = \left\{ y_l / y_{li} \le y_{li}^{\max}, i \in I_l \right\}.$$

Полагаем $h = 1$ и переходим на следующий этап.

Этап 1. Подсистема верхнего уровня решает задачу:

$$\varphi_0^h = \min \left\{ \max_{j \in J} \left[(F_j^0 - F_j(y)) / (F_j^0 - F_j^*) \right] / y \in D_0^{h-1} \right\}, \quad (15)$$

где $D_0^{h-1} = Y \bigcap_{l \in Z} D_l^{h-1}$ и находит управляющие воздействия $y_l^h = (y_{li}^h, i \in I_l), l \in Z$ для подсистем нижнего уровня. Переходим на следующий этап.

Этап 2. Каждая подсистема нижнего уровня решает следующую задачу:

$$\varphi_l^h = \min \left\{ \max_{i \in I_l} \left[(y_{li}^h - f_{li}(x_l) / (y_{li}^h - f_{li}^{*h}) \right] / x_l \in X_l \right\}$$

при любых $f_{li}^{*h} \langle y_{li}^h, i \in I_l$. Пусть x_l^h - решение этой задачи, а $v_{li}^h, i \in I_l, u_{lk}^h, k \in K_l$ - соответствующие двойственные переменные задачи (11)-(14). Переходим на следующий этап.

Этап 3. Проверяется выполнение условия $\varphi_l^h \le 0, l \in Z$. Если они выполняются для всех $l, l \in Z$, то переходим на этап 4. Для тех подсистем нижнего уровня, у которых $\varphi_l^h \rangle 0$ формируются ограничения вида

$$\sum_{i \in II_l} v_{li}^h y_{li} \le \sum_{k \in KK_l} b_l^k u_{lk}^h$$

и добавляются к ограничениям D_l^{h-1}. Полагаем $h = h+1$ и переходим на этап 1.

Этап 4. $f_{li}(x_l^h), i \in I_l, l \in Z$ - решение задачи (5), а $x_l^h, l \in Z$ - соответствующие решения подсистем нижнего уровня.

Представлений двухуровневый алгоритм легко может быть применен и для многоуровневых систем подобного класса. Для этого при решении задачи (15) необходимо формировать внешнюю аппроксимацию множества слабо эффективных оценок подсистемы верхнего уровня. При этом в качестве значений

$F_j^0, j \in J$ необходимо использовать решения, полученные вышестоящей подсистемой при решении задачи аналогичной (15).