

Л. П. Хорошун, Е. Н. Шикун

**ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ
СТОХАСТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ (ОБЗОР)**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

Abstract. A study on the theory of deformation as well as the short-time and long-time damageability of physically nonlinear composite materials is systematized. In the case of short-time damageability, the single microdamage is modeled by forming the empty quasi-spherical pore instead the microvolume, which is damaged by the Huber – Mises criteria. The limit of microstrength is assumed to be the random function of coordinates. In the case of long-term damageability, the criterion of damage of single microvolume is characterized by its long-term strength, which is caused by dependence of the brittle fracture time on the degree of closeness of equivalent stress to its limit value, which characterizes the short-time strength. For arbitrary value of time, the balance equation of damage is formulated, which together with the equations of link between macrostresses and macrostrains forms the closed system. The algorithms for calculation of dependences of macrostresses and microdamage on macrostrains and time is built as well as the effect of nonlinearity of material on the corresponding curves is studied.

Key words: composite material, stochastic structure, physical nonlinearity, deformation, short-term damageability, long-term damageability, porosity, effective deformative characteristics.

Введение.

Появление и развитие во времени рассеянных микроповреждений в материалах при деформировании приводит, как правило, к образованию и развитию магистральных трещин, являющихся причиной разрушения материалов и элементов конструкций. Согласно физическим представлениям, поврежденность материала можно рассматривать как наличие рассеянных дефектов в виде микротрещин, микропустот или разрушенных микрообъемов, которые приводят к уменьшению эффективной или несущей части материала, оказывающей сопротивление нагрузкам.

Для построения известных математических моделей повреждаемости материала используется три подхода. Первый подход исходит из микронеоднородности деформативно-прочностных свойств материала, что приводит при нагружении к образованию рассеянных микроразрушений, моделируемых системой микротрещин или микропор [3, 7, 13, 17, 19, 20, 27 – 34, 40 – 46, 50, 51, 55 – 100]. Уравнения повреждаемости здесь строятся на основе теории деформирования структурно-неоднородных сред и определенных критериев разрушения микрообъемов материала. В основе второго подхода лежит формальное представление о параметре поврежденности как некоторой меры нарушения сплошности материала без указания ее физического смысла, и постулирование для него эволюционного уравнения в виде зависимости скорости образования повреждений от действующих напряжений [1, 8 – 10, 15, 16, 25, 26]. Третий подход предполагает, что поврежденность описывается не структурными параметрами, а термодинамическими, вносящими свой вклад, наряду с напряжениями и деформациями, в законы термодинамики. На этой основе формально записываются зависимости между напряжениями, деформациями и параметрами поврежденности [2, 5, 18, 23, 24, 52, 53].

Многие однородные и композитные материалы при увеличении нагрузки проявляют нелинейный характер зависимостей между макронапряжениями и макродефор-

мациями. Это может быть обусловлено физической нелинейностью деформирования компонентов [14], а также образованием рассеянных микроповреждений [33], проявляющихся в виде возникновения микротрещин или микропор в местах разрушенных микрообъемов [55, 56, 66]. Первый вид нелинейности является типичным для композитов на основе пластической металлической матрицы, а также на основе полимеров при повышенных температурах. Второй вид нелинейности характерен для материалов с хрупкими компонентами, таких как полимерные композиты при низких температурах, композиты с углеродным связующим, керамические композиты и т.п. В действительности оба вида нелинейности проявляются одновременно, поэтому представляет интерес исследование связанных процессов физически нелинейного деформирования и повреждаемости однородных и композитных материалов.

Прогнозирование эффективных деформативных свойств композитных материалов, компоненты которых следуют закону нелинейной связи между напряжениями и деформациями, связано с решением физически нелинейной задачи упругости для микронеоднородного тела, трудности которого существенно возрастают по сравнению с линейной задачей, особенно для регулярных структур [6]. В случае стохастической структуры использование свойства эргодичности [36, 37, 49] позволяет заменить усреднение окончательного решения по макрообъему предварительным статистическим усреднением в одной точке, что существенно упрощает постановку задачи и ее решение. Сингулярное [49] или одностепенное [36] приближение позволяют исследовать нелинейную задачу только для композитных материалов с квазисферическими структурными элементами или армированных однонаправленными бесконечными волокнами. Применение метода условных моментов [37] дает возможность привести задачу об эффективных свойствах физически нелинейных композитных материалов с произвольной формой структурных элементов к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций. Это позволило исследовать нелинейные деформативные свойства дисперсно-упрочненных материалов [43] на основе мягкой металлической или полимерной матрицы и твердых частиц квазисферической формы.

Очевидно, что неформальное первое направление является наиболее адекватным моделированием реальных процессов повреждаемости материала. Исходя из стохастической неоднородности микропрочности, свойственной реальным материалам и описываемой вероятностными распределениями, можно объяснить процесс и построить модель как кратковременной (мгновенной) повреждаемости [55, 56], проявляющейся в момент приложения нагрузки, так и длительной, представляющей собой процесс накопления микроразрушений во времени после приложения нагрузки [57]. Реальная повреждаемость материала, в общем случае, является комбинированной, т.е. кратковременная повреждаемость дополняется длительной с течением времени.

В основу математической теории связанных процессов деформирования и повреждаемости физически нелинейного материала положены стохастические уравнения упругости пористой среды, материал каркаса которой следует физически нелинейному закону деформирования. Процесс повреждаемости материала моделируется разрушением рассеянных микрообъемов и образованием на их месте стохастически расположенных микропор. Микроразрушение единичного микрообъема характеризуется его кратковременной прочностью согласно критерию Губера – Мизеса или длительной прочностью, описываемой дробно-степенной или экспоненциально-степенной функцией долговечности, определяемой зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Губера – Мизеса. Предел кратковременной микропрочности принимается случайной функцией координат, одностепенное распределение которой описывается степенной функцией на некотором отрезке или распределением Вейбулла. Эффективные деформативные свойства и напряженно-деформированное состояние физически нелинейного материала с системой стохастически расположенных микроповреждений определяются на основе стохастических уравнений упругости физически нелинейных пористых сред. Исходя из свойств функций распределения и условия эргодичности случайного поля кратковре-

менной микропрочности, а также зависимости времени хрупкого разрушения микрообъема от его напряженного состояния и кратковременной микропрочности, сформулированы для произвольного момента времени уравнения баланса поврежденности (пористости) материала. Зависимости макронапряжения – макродеформации для пористого физически нелинейного материала и уравнения баланса его пористости образуют замкнутую систему, описывающую совместный процесс физически нелинейного деформирования и микроповреждаемости. На основе метода итераций построены алгоритмы вычисления зависимостей макронапряжений и микроповреждаемости материала от заданных макродеформаций, макронапряжений и микроповреждаемости материала от времени, а также получены соответствующие кривые. Исследовано влияние нелинейности на деформирование и микроповреждаемость материалов.

Настоящая работа посвящена систематизации исследований по теории деформирования, а также кратковременной и долговременной повреждаемости физически нелинейных композитных материалов стохастической структуры. В основу положены работы, выполненные в Институте механики им. С.П.Тимошенко Национальной Академии наук Украины на протяжении 1993 – 2010 годов.

§1. Нелинейное деформирование материалов.

1.1. Постановка задачи о нелинейном деформировании дисперсно упрочненных материалов. На практике весьма распространенными являются дисперсно упрочненные материалы, представляющие собой композиты на основе равномерно распределенных мельчайших твердых частиц квазисферической или квазисфероидальной формы в матрице. Композитный материал стохастической структуры с идеальной связью физически нелинейных компонентов (непрерывность усилий и перемещений на границе раздела компонентов) может быть представлен как микронеоднородная упругая среда. Зависимости между макронапряжениями σ_{ij} и макродеформациями ε_{ij} в произвольной точке композита можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijmn}(\varepsilon_{\alpha\beta}) \varepsilon_{mn}, \quad (1.1)$$

где тензор модулей упругости λ_{ijmn} , детерминированно зависящий от деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$, является случайной статистически однородной функцией координат x_r .

Если макрообъем (объем, размеры которого значительно превосходят размеры микронеоднородностей) композита находится в условиях однородных макронапряжений и макродеформаций, то напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} будут статистически однородными случайными функциями, удовлетворяющими свойству эргодичности. При этом их математические ожидания $\langle \sigma_{ij} \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ в произвольной точке совпадают, соответственно, с макронапряжениями и макродеформациями. Подставляя (1.1) в уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1.2)$$

и, пользуясь соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.3)$$

получаем физически и статистически нелинейные уравнения равновесия относительно перемещений

$$[\lambda_{ijmn}(\varepsilon_{\alpha\beta}) u_{m,n}]_{,j} = 0. \quad (1.4)$$

Поскольку размеры макрообъема значительно превосходят размеры микронеоднородностей, то его рассматривают как бесконечную область V [35, 36, 48]. Представим случайные поля напряжений, деформаций и перемещений в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}^0; \quad \varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \varepsilon_{ij}^0; \quad u_i = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j + u_i^0, \quad (1.5)$$

тогда уравнение (1.4) можно записать в виде

$$\lambda_{ijmn}^c u_{m,nj}^0 + \{[\lambda_{ijmn}^c(\varepsilon_{\alpha\beta}) - \lambda_{ijmn}^c] \varepsilon_{mn}\}_{,j} = 0, \quad (1.6)$$

где λ_{ijmn}^c – некоторый тензор модулей упругости с независимыми от координат компонентами, а граничное условие на бесконечно удаленной границе S , согласно (1.5), будет

$$u_i^0|_S = 0. \quad (1.7)$$

С помощью тензорной функции Грина, удовлетворяющей уравнению

$$\lambda_{ijmn}^c G_{mk,jn}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) + \delta(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \delta_{ik} = 0, \quad (1.8)$$

краевая задача (1.6), (1.7) приводится к интегральному уравнению относительно тензора деформаций

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)})[\lambda_{pqmn}^{(2)}(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}) - \lambda_{pqmn}^c] \varepsilon_{mn}^{(2)}, \quad (1.9)$$

где действие интегрального оператора K_{ijpq} определяется формулой

$$K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \varphi^{(2)} = \int_{V^{(2)}} G_{(ip,j)q}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) (\varphi^{(2)} - \langle \varphi \rangle) dV^{(2)}, \quad (1.10)$$

причем индекс в круглой скобке сверху обозначает соответствующую точку пространства.

Нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями (1.1) относится к произвольной точке тела, которая может находиться в одном из компонентов. Если точка находится в k -компоненте, то можно записать

$$\sigma_{ij}^k = \lambda_{ijmn}^k(\varepsilon_{\alpha\beta}^k) \varepsilon_{mn}^k. \quad (1.11)$$

Напряжения σ_{ij}^k и деформации ε_{ij}^k в k -компоненте можно представить в виде суммы

$$\sigma_{ij}^k = \langle \sigma_{ij}^k \rangle + \sigma_{ij}^{k0}; \quad \varepsilon_{ij}^k = \langle \varepsilon_{ij}^k \rangle + \varepsilon_{ij}^{k0}, \quad (1.12)$$

где $\langle \sigma_{ij}^k \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij}^k \rangle$ – соответственно, средние напряжения и деформации по k -компоненту; σ_{ij}^{k0} , ε_{ij}^{k0} – соответствующие флуктуации в пределах k -компонента. Если пренебречь флуктуациями напряжений и деформаций в пределах компонента, то нелинейный закон (1.11) примет вид

$$\langle \sigma_{ij}^k \rangle = \lambda_{ijmn}^k (\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle. \quad (1.13)$$

Усредняя (1.13) по макрообъему, получаем выражение для макронапряжений

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{k=1}^2 c_k \lambda_{ijmn}^k (\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle, \quad (1.14)$$

где c_k – объемное содержание k -компонента.

Усредним (1.9) по условной плотности $f(\varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \lambda_{ijmn}^{(2)} |_{\nu}^{(1)})$ (плотность распределения деформаций в точках $x_r^{(1)}$, $x_r^{(2)}$ и модулей упругости в точке $x_r^{(2)}$ при условии, что точка $x_r^{(1)}$ находится в ν -компоненте). Тогда, пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонента, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \sum_{k=1}^2 K_{ijpq}^{vk} [\lambda_{pqmn}^k (\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle) - \lambda_{pqmn}^c] \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle \quad (v=1, 2), \quad (1.15)$$

где матричный оператор K_{ijpq}^{vk} определяется формулой

$$K_{ijpq}^{vk} = K_{ijpq} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) p_{vk} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}), \quad (1.16)$$

причем $p_{vk} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) = f_k^{(2)} \Big|_v^{(1)}$ – вероятность перехода из v -компонента в точке $x_r^{(1)}$ в k -компонент в точке $x_r^{(2)}$. Определив из (1.15) средние деформации компонентов $\langle \varepsilon_{ij}^k \rangle$ как функции $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ и подставив их в (1.14), получим нелинейный закон связи между макронапряжениями и макродеформациями.

Рассмотрим композитный материал с изотропной матрицей и изотропными однонаправленными квазисфероидальными включениями, т.е.

$$\lambda_{ijmn}^k = \lambda_k \delta_{ij} \delta_{mn} + 2\mu_k I_{ijmn} \quad (k=1, 2); \quad \lambda_{ijmn}^c = \lambda_c \delta_{ij} \delta_{mn} + 2\mu_c I_{ijmn};$$

$$p_{vk} = c_k + (\delta_{vk} - c_k) \exp(-\sqrt{n_1^2 (x_1^2 + x_2^2) + n_2^2 x_3^2}), \quad (1.17)$$

где $\lambda_k, \mu_k, \lambda_c, \mu_c$ – модули упругости компонентов и тела сравнения; $I_{ijmn} = (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) / 2$ – единичный тензор; n_1, n_2 – величины, обратные к полуосям квазисфероидальных включений в поперечном и продольном направлениях. Оператор (1.16) в этом случае имеет вид

$$K_{ijpq}^{vk} = (\delta_{vk} - c_k) \{ a_1 \delta_{ij} \delta_{pq} + a_2 I_{ijpq} + a_3 [\delta_{ij} \delta_{3p} \delta_{3q} + \delta_{i3} \delta_{j3} (\delta_{pq} - 2\delta_{3p} \delta_{3q})] +$$

$$+ a_4 \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{3p} \delta_{3q} + a_5 (I_{i3pq} \delta_{j3} + I_{j3pq} \delta_{i3} - 2\delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{3p} \delta_{3q}) \};$$

$$a_1 = \frac{(\lambda_c + \mu_c)(1 - s_1 - s_2)}{8\mu_c (\lambda_c + 2\mu_c)}; \quad a_2 = -\frac{(\lambda_c + 3\mu_c)(1 - s_1) + (\lambda_c + \mu_c)s_2}{4\mu_c (\lambda_c + 2\mu_c)};$$

$$a_3 = \frac{(\lambda_c + \mu_c)(s_1 + 5s_2 - 1)}{8\mu_c (\lambda_c + 2\mu_c)}; \quad a_5 = \frac{\mu_c - (2\lambda_c + 5\mu_c)s_1 + 5(\lambda_c + \mu_c)s_2}{4\mu_c (\lambda_c + 2\mu_c)}; \quad (1.18)$$

$$a_4 = \frac{\lambda_c + 5\mu_c - (\lambda_c + 13\mu_c)s_1 - 5(\lambda_c + 2\mu_c)s_2}{8\mu_c (\lambda_c + 2\mu_c)}; \quad s_1 = \frac{1}{1 - k^2} (1 - s);$$

$$s_2 = \frac{1 - (1 + 2k^2)s_1}{2(1 - k^2)}; \quad k = \frac{n_1}{n_2}; \quad s = \begin{cases} -\frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} \ln(k - \sqrt{k^2 - 1}), & k \geq 1; \\ \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \arcsin \sqrt{1 - k^2}, & k \leq 1. \end{cases}$$

Отсюда как предельные случаи при $k = 0, \infty, 1$ следуют выражения оператора, соответственно, для слоистых, однонаправленных волокнистых и зернистых материалов.

Примем, что объемные деформации и напряжения включений и матрицы связаны линейно, т.е. модули объемного сжатия $K_v = \lambda_v + 2\mu_v / 3$ не зависят от деформаций, а дивергенты напряжений $\langle \sigma_{ij}^v \rangle'$ и деформаций $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle'$ связаны нелинейным законом

$$\langle \sigma_{ij}^v \rangle' = 2\mu_v (J_v) \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle'; \quad J_v = [\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle']^{1/2} \quad (v=1, 2). \quad (1.19)$$

Для средних по компонентам деформаций на основе (1.15), (1.17) – (1.19) находим

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = & \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (-1)^{v+1} c_{3-v} \{ [\lambda_1(J_1) - \lambda_2(J_2)] Q_{ijkk} \langle \varepsilon_{pp} \rangle \delta_{ij} + \\ & + 2[\mu_1(J_1) - \mu_2(J_2)] Q_{ijmn} \langle \varepsilon_{mn} \rangle \}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где ненулевые компоненты трансверсально-изотропного тензора Q_{ijmn} имеют вид

$$\begin{aligned} Q_{1111} + Q_{1122} &= Q_{2222} + Q_{2211} = \\ &= -\frac{1}{2\Delta} \{ (\lambda_c + \mu_c)(\lambda_c + 2\mu_c + \lambda' + \mu')s_2 + \mu_c [(\lambda_c + 2\mu_c)(1-s_1) + (\lambda' + 2\mu')s_1(1-s_1)] \}; \\ Q_{1133} &= Q_{2233} = Q_{3311} = Q_{3322} = \frac{1}{2\Delta} [(\lambda_c + \mu_c)(\lambda_c + 2\mu_c + \lambda')s_2 + \lambda' \mu_c s_1(1-s_1)]; \\ Q_{3333} &= \frac{1}{\Delta} \{ \mu_c (\lambda' + \mu')s_1^2 - (\lambda_c + 2\mu_c + \lambda' + \mu') [(\lambda_c + \mu_c)s_2 + \mu_c s_1] \}; \\ Q_{2121} = Q_{2121} &= Q_{2112} = Q_{1221} = -\frac{1}{4} \frac{(\lambda_c + \mu_c)s_2 + (\lambda_c + 3\mu_c)(1-s)}{2\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c) + \mu' [(\lambda_c + \mu_c)s_2 + (\lambda_c + 3\mu_c)(1-s_1)]}; \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} Q_{1313} = Q_{3131} = Q_{3113} &= Q_{1331} = Q_{2323} = Q_{3232} = Q_{3223} = Q_{2332} = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{(\lambda_c + 2\mu_c)(1+s_1)s_2 - 4(\lambda_c + \mu_c)s_2}{2\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c) + \mu' [(\lambda_c + 2\mu_c)(1+s_1)s_2 - 4(\lambda_c + \mu_c)s_2]}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta = \mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)[\lambda_c + 2\mu_c + \lambda' + \mu'(1+s_1)] + \mu' \{ 3(\lambda_c + \mu_c)(\lambda_c + 3\mu_c)s_2 + \\ + (3\lambda' + 2\mu') [(\lambda_c + \mu_c)s_2 + \mu_c s_1(1+s_1)] \}); \end{aligned}$$

$$\lambda' = c_1 \lambda_2(J_2) + c_2 \lambda_1(J_1) - \lambda_c; \quad \mu' = c_1 \mu_2(J_2) + c_2 \mu_1(J_1) - \mu_c.$$

Подставляя (1.17), (1.20), (1.21), (1.22) в (1.14), приходим к зависимостям между макронапряжениями и макродеформациями

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle = & (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (\lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle) \delta_{ij}; \\ \langle \sigma_{33} \rangle = & \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, k, r = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.23)$$

где эффективные модули упругости определяются формулами [43]

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*}{2} &= c_1 [\lambda_1(J_1) + \mu_1(J_1)] + c_2 [\lambda_2(J_2) + \mu_2(J_2)] - \frac{c_1 c_2}{\Delta} \{ [\lambda_1(J_1) - \lambda_2(J_2)]^2 \times \\ &\times [\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c) + 3\mu' A] + 2[\lambda_1(J_1) - \lambda_2(J_2)][\mu_1(J_1) - \mu_2(J_2)][\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)(1-s_1) + 4\mu' A] + \\ &+ [\mu_1(J_1) - \mu_2(J_2)]^2 [\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)(1-s_1) + (\lambda_c + \mu_c)(\lambda_c + 2\mu_c)s_2 + (\lambda' + 2\mu')A] \}; \\ \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*}{2} &= c_1 \mu_1(J_1) + c_2 \mu_2(J_2) - \frac{c_1 c_2 [\mu_1(J_1) - \mu_2(J_2)]^2 [(\lambda_c + 3\mu_c)(1-s_1) + (\lambda_c + 3\mu_c)s_2]}{2\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c) + \mu' [(\lambda_c + 3\mu_c)(1-s_1) + (\lambda_c + 3\mu_c)s_2]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{13}^* &= c_1 \lambda_1(J_1) + c_2 \lambda_2(J_2) - \frac{c_1 c_2}{\Delta} \{[\lambda_1(J_1) - \lambda_2(J_2)]^2 [\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c) + 3\mu' A] + \\
&+ [\lambda_1(J_1) - \lambda_2(J_2)][\mu_1(J_1) - \mu_2(J_2)][\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)(1 - s_1) + 4\mu' A] - \\
&- 2[\mu_1(J_1) - \mu_2(J_2)]^2 [(\lambda_c + \mu_c)(\lambda_c + 2\mu_c)s_2 + \lambda' A]; \\
\lambda_{33}^* &= c_1 [\lambda_1(J_1) + 2\mu_1(J_1)] + c_2 [\lambda_2(J_2) + 2\mu_2(J_2)] - \\
&- \frac{c_1 c_2}{\Delta} \{[\lambda_1(J_1) - \lambda_2(J_2)]^2 [\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c) + 3\mu' A] + \\
&+ 4[\lambda_1(J_1) - \lambda_2(J_2)][\mu_1(J_1) - \mu_2(J_2)][\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)s_1 + \mu' A] + \\
&+ 4[\mu_1(J_1) - \mu_2(J_2)]^2 [\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)s_1 + (\lambda_c + \mu_c)(\lambda_c + 2\mu_c)s_2 + (\lambda' + \mu') A]\}; \\
\lambda_{44}^* &= c_1 \mu_1(J_1) + c_2 \mu_2(J_2) - \frac{c_1 c_2 [\mu_1(J_1) - \mu_2(J_2)]^2 [(\lambda_c + 2\mu_c)(1 + s_1) - 4(\lambda_c + 2\mu_c)s_2]}{2\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c) + \mu'[(\lambda_c + 2\mu_c)(1 + s_1) - 4(\lambda_c + 2\mu_c)s_2]}; \\
A &= \mu_c s_1 (1 - s_1) + (\lambda_c + \mu_c) s_2.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

В эти формулы, вследствие приближенности решения, связанного с пренебрежением флуктуаций деформаций в пределах компонента, входят упругие модули тела сравнения λ_c, μ_c . Их выбор целесообразно осуществлять, исходя из связности компонентов и близости к их действительным значениям, экспериментальным [36, 37] или полученным другими методами [6, 49]. Когда жесткость включений выше жесткости матрицы, следует положить

$$\lambda_c = \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} \right)^{-1} - \frac{2}{3} \mu_c; \quad \mu_c = \left[\frac{c_1}{\mu_1(J_1)} + \frac{c_2}{\mu_2(J_2)} \right]^{-1}; \tag{1.25}$$

в случае, когда жесткость матрицы больше жесткости включений, положим

$$\lambda_c = (c_1 K_1 + c_2 K_2) - 2\mu_c / 3; \quad \mu_c = c_1 \mu_1(J_1) + c_2 \mu_2(J_2). \tag{1.26}$$

Эффективные упругие постоянные (1.24) – (1.26), входящие в определяющие соотношения (1.23), зависят от девиатора средних деформаций матрицы $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'$, поэтому их необходимо выразить через задаваемые макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$. Для этого имеем соотношения (1.23) и

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{ij} \rangle' &= c_1 \langle \sigma_{ij}^1 \rangle' + c_2 \langle \sigma_{ij}^2 \rangle'; \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle' = c_1 \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle' + c_2 \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'; \\
\langle \sigma_{ij}^v \rangle &= \lambda_v(J_v) \langle \varepsilon_{pp}^v \rangle + 2\mu_v(J_v) \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle \quad (i, j, p = 1, 2, 3, v = 1, 2),
\end{aligned} \tag{1.27}$$

из которых находим

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle &= (-1)^{(v+1)} \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^* - 2\mu_{3-v}(J_{3-v})}{2c_v [\mu_2(J_2) - \mu_1(J_1)]} \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \\
&+ \frac{2[\lambda_{13}^* - \lambda_{3-v}(J_{3-v})][\mu_2(J_2) - \mu_1(J_1)] - [\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^* - 2\mu_{3-v}(J_{3-v})][\lambda_2(J_2) - \lambda_1(J_1)]}{6(-1)^{(v+1)} c_v (K_1 - K_2) [\mu_2(J_2) - \mu_1(J_1)]} \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_{33}^v \rangle &= \frac{2[\lambda_{13}^* - \lambda_{3-v}(J_{3-v})][\mu_2(J_2) - \mu_1(J_1)] - [\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* - 2\lambda_{13}^* - 2\mu_{3-v}(J_{3-v})][\lambda_2(J_2) - \lambda_1(J_1)]}{6(-1)^{(v+1)}c_v(K_1 - K_2)[\mu_2(J_2) - \mu_1(J_1)]} \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \\
&+ \frac{2[\lambda_{33}^* - \lambda_{3-v}(J_{3-v}) - 2\mu_{3-v}(J_{3-v})][\mu_2(J_2) - \mu_1(J_1)] + 2[\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^* - 2\mu_{3-v}(J_{3-v})][\lambda_2(J_2) - \lambda_1(J_1)]}{6(-1)^{(v+1)}c_v(K_1 - K_2)[\mu_2(J_2) - \mu_1(J_1)]} \langle \varepsilon_{33} \rangle; \\
\langle \varepsilon_{i3}^v \rangle &= (-1)^{(v+1)} \frac{\lambda_{44}^* - \mu_{3-v}(J_{3-v})}{c_v[\mu_2(J_2) - \mu_1(J_1)]} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2, v = 1, 2). \tag{1.28}
\end{aligned}$$

Определяя из нелинейных уравнений (1.28) инварианты J_1, J_2 как функции макродеформаций и подставляя их в (1.23) – (1.26), получаем нелинейные зависимости между макронапряжениями и макродеформациями.

Численное решение нелинейной системы уравнений (1.23) – (1.28) можно построить итерационным методом согласно следующей схеме. Эффективные упругие модули в n -ом приближении определяются формулами

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{12}^{*(n)}}{2} &= c_1[\lambda_1(J_{1(n)}) + \mu_1(J_{1(n)})] + c_2[\lambda_2(J_{2(n)}) + \mu_2(J_{2(n)})] - \\
&- \frac{c_1 c_2}{\Delta_{(n)}} \{[\lambda_1(J_{1(n)}) - \lambda_2(J_{2(n)})]^2 [\mu_{c(n)}(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)}) + 3\mu'_{(n)} A_{(n)}] + \\
&+ 2[\lambda_1(J_{1(n)}) - \lambda_2(J_{2(n)})][\mu_1(J_{1(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})][\mu_{c(n)}(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)})(1 - s_1) + 4\mu'_{(n)} A_{(n)}] + \\
&+ [\mu_1(J_{1(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})]^2 [\mu_{c(n)}(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)})(1 - s_1) + \\
&+ (\lambda_{c(n)} + \mu_{c(n)})(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)})s_2 + (\lambda'_{(n)} + 2\mu'_{(n)})A_{(n)}]\}; \\
\frac{\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{12}^{*(n)}}{2} &= c_1 \mu_1(J_{1(n)}) + c_2 \mu_2(J_{2(n)}) - \\
&- \frac{c_1 c_2 [\mu_1(J_{1(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})]^2 [(\lambda_{c(n)} + 3\mu_{c(n)})(1 - s_1) + (\lambda_{c(n)} + 3\mu_{c(n)})s_2]}{2\mu_{c(n)}(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)}) + \mu'_{(n)} [(\lambda_{c(n)} + 3\mu_{c(n)})(1 - s_1) + (\lambda_{c(n)} + 3\mu_{c(n)})s_2]}, \\
\lambda_{13}^{*(n)} &= c_1 \lambda_1(J_{1(n)}) + c_2 \lambda_2(J_{2(n)}) - \frac{c_1 c_2}{\Delta_{(n)}} \{[\lambda_1(J_{1(n)}) - \lambda_2(J_{2(n)})]^2 [\mu_{c(n)}(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)}) + 3\mu'_{(n)} A_{(n)}] + \\
&+ [\lambda_1(J_{1(n)}) - \lambda_2(J_{2(n)})][\mu_1(J_{1(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})][\mu_{c(n)}(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)})(1 + s_1) + 4\mu'_{(n)} A_{(n)}] - \\
&- 2[\mu_1(J_{1(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})]^2 [(\lambda_{c(n)} + \mu_{c(n)})(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)})s_2 + \lambda'_{(n)} A_{(n)}]\}; \\
\lambda_{33}^{*(n)} &= c_1[\lambda_1(J_{1(n)}) + 2\mu_1(J_{1(n)})] + c_2[\lambda_2(J_{2(n)}) + 2\mu_2(J_{2(n)})] - \\
&- \frac{c_1 c_2}{\Delta_{(n)}} \{[\lambda_1(J_{1(n)}) - \lambda_2(J_{2(n)})]^2 [\mu_{c(n)}(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)}) + 3\mu'_{(n)} A_{(n)}] + \\
&+ 4[\lambda_1(J_{1(n)}) - \lambda_2(J_{2(n)})][\mu_1(J_{1(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})][\mu_{c(n)}(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)})s_1 + \mu'_{(n)} A_{(n)}] + \\
&+ 4[\mu_1(J_{1(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})]^2 [\mu_{c(n)}(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)})s_1 + \\
&+ (\lambda_{c(n)} + \mu_{c(n)})(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)})s_2 + (\lambda'_{(n)} + \mu'_{(n)})A_{(n)}]\}; \tag{1.29}
\end{aligned}$$

$$\lambda_{44}^{*(n)} = c_1 \mu_1 (J_{1(n)}) + c_2 \mu_2 (J_{2(n)}) -$$

$$\frac{c_1 c_2 [\mu_1 (J_{1(n)}) - \mu_2 (J_{2(n)})]^2 [(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)})(1 + s_1) - 4(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)})s_2]}{2\mu_{c(n)}(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)}) + \mu'_{(n)} [(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)})(1 + s_1) - 4(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)})s_2]}$$

$$(\lambda'_{(n)} = c_1 \lambda_2 (J_{2(n)}) + c_2 \lambda_1 (J_{1(n)}) - \lambda_{c(n)}; \mu'_{(n)} = c_1 \mu_2 (J_{2(n)}) + c_2 \mu_1 (J_{1(n)}) - \mu_{c(n)});$$

$$\Delta_{(n)} = \mu_{c(n)}(\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)})[\lambda_{c(n)} + 2\mu_{c(n)} + \lambda'_{(n)} + \mu'_{(n)}(1 + s_1)] + \quad (1.30)$$

$$+ \mu'_{(n)} \{3(\lambda_{c(n)} + \mu_{c(n)})(\lambda_{c(n)} + 3\mu_{c(n)})s_2 + (3\lambda'_{(n)} + 2\mu'_{(n)})[(\lambda_{c(n)} + \mu_{c(n)})s_2 + \mu_{c(n)}s_1(1 + s_1)]\};$$

$$A_{(n)} = \mu_{c(n)}s_1(1 - s_1) + (\lambda_{c(n)} + \mu_{c(n)})s_2,$$

причем

$$\lambda_{c(n)} = (c_1 K_1 + c_2 K_2) - 2\mu_{c(n)} / 3; \mu_{c(n)} = c_1 \mu_1 (J_{1(n)}) + c_2 \mu_2 (J_{2(n)}), \quad (1.31)$$

если жесткость матрицы больше жесткости включений, и

$$\lambda_{c(n)} = \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} \right)^{-1} - \frac{2}{3} \mu_{c(n)}; \mu_{c(n)} = \left[\frac{c_1}{\mu_1 (J_{1(n)})} + \frac{c_2}{\mu_2 (J_{2(n)})} \right]^{-1} \quad (1.32)$$

– в противном случае). Средние по компонентам деформации в $(n+1)$ -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n+1)}$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n+1)} &= (-1)^{(v+1)} \frac{\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{12}^{*(n)} - 2\mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})}{2c_v [\mu_2 (J_{2(n)}) - \mu_1 (J_{1(n)})]} \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \\ &+ \frac{2[\lambda_{12}^{*(n)} - \lambda_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\mu_2 (J_{2(n)}) - \mu_1 (J_{1(n)})] - [\lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{13}^{*(n)} - 2\lambda_{12}^{*(n)} - 2\mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\lambda_2 (J_{2(n)}) - \lambda_1 (J_{1(n)})]}{6(-1)^{(v+1)} c_v (K_1 - K_2) [\mu_1 (J_{1(n)}) - \mu_2 (J_{2(n)})]} \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \delta_{ij} + \\ &+ \frac{2[\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\mu_2 (J_{2(n)}) - \mu_1 (J_{1(n)})] - [\lambda_{33}^{*(n)} - \lambda_{13}^{*(n)} - 2\mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\lambda_2 (J_{2(n)}) - \lambda_1 (J_{1(n)})]}{6(-1)^{(v+1)} c_v (K_1 - K_2) [\mu_1 (J_{1(n)}) - \mu_2 (J_{2(n)})]} \langle \varepsilon_{33} \rangle + \delta_{ij}; \\ \langle \varepsilon_{33}^v \rangle^{(n+1)} &= \\ &= \frac{2[\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\mu_2 (J_{2(n)}) - \mu_1 (J_{1(n)})] - [\lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{12}^{*(n)} - 2\lambda_{13}^{*(n)} - 2\mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\lambda_2 (J_{2(n)}) - \lambda_1 (J_{1(n)})]}{6(-1)^{(v+1)} c_v (K_1 - K_2) [\mu_1 (J_{1(n)}) - \mu_2 (J_{2(n)})]} \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \\ &+ \frac{2[\lambda_{33}^{*(n)} - \lambda_{3-v}(J_{(3-v)(n)}) - 2\mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\mu_2 (J_{2(n)}) - \mu_1 (J_{1(n)})] + 2[\lambda_{33}^{*(n)} - \lambda_{13}^{*(n)} - 2\mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\lambda_2 (J_{2(n)}) - \lambda_1 (J_{1(n)})]}{6(-1)^{(v+1)} c_v (K_1 - K_2) [\mu_1 (J_{1(n)}) - \mu_2 (J_{2(n)})]} \langle \varepsilon_{33} \rangle; \\ \langle \varepsilon_{i3}^v \rangle^{(n+1)} &= (-1)^{(v+1)} \frac{\lambda_{44}^{*(n)} - \mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})}{c_v [\mu_2 (J_{2(n)}) - \mu_1 (J_{1(n)})]} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2, v = 1, 2); \quad (1.33) \end{aligned}$$

$$J_{k(0)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

При этом предполагаем, что нелинейные диаграммы деформирования включений и матрицы при малых деформациях имеют линейные участки, которым соответствуют модули сдвига, соответственно, $\mu_1(0)$ и $\mu_2(0)$.

1.2. Исследование нелинейного деформирования зернистых композитных материалов. Рассмотрим матричный композитный материал зернистой структуры, изотропные включения и матрица которого деформируются нелинейно. Обозначим модули объемного сжатия и сдвига материалов включений и матрицы, соответственно, K_1, μ_2 и K_2, μ_2 , а объемные содержания включений и матрицы, соответственно, c_1, c_2 . В случае зернистого композитного материала зависимости между макронапряжениями и макродеформациями (1.23) примут вид

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (K^* - 2\mu^*/3) \langle \varepsilon_{pp} \rangle \delta_{ij} + 2\mu^* \langle \varepsilon_{ij} \rangle. \quad (1.34)$$

Для зернистого композита эффективные упругие постоянные (1.24) – (1.26) будут определяться формулами [11, 36, 37, 39]

$$K^* = \langle K \rangle - \frac{c_1 c_2 (K_1 - K_2)^2}{c_1 K_2 + c_2 K_1 + n_c}; \quad \mu^* = \langle \mu \rangle - \frac{c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + m_c}; \quad \lambda^* = K^* - 2\mu^*/3 \quad (1.35)$$

$$\left(n_c = \frac{4}{3} \mu_c; \quad m_c = \frac{\mu_c (9K_c + 8\mu_c)}{6(K_c + 2\mu_c)}; \quad K_c = \lambda_c + 2\mu_c/3 \right). \quad (1.36)$$

Вследствие приближенности решения, что обусловлено пренебрежением флуктуациями параметров в пределах компонентов, в выражения (1.35), (1.36) входят упругие модули тела сравнения K_c, μ_c , выбором которых определяется связность композита и максимальная близость полученных коэффициентов к их действительным значениям. Анализ выбора различных вариантов K_c, μ_c показывает [39], что для зернистого композита целесообразно положить

$$K_c = c_1 K_1 + c_2 K_2; \quad \mu_c = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2, \quad (1.37)$$

если жесткость матрицы больше жесткости включений, и

$$K_c = \frac{K_1 K_2}{c_1 K_2 + c_2 K_1}; \quad \mu_c = \frac{\mu_1 \mu_2}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1} \quad (1.38)$$

– в противном случае.

Отметим, что в случае физической нелинейности компонентов композита (1.19) упругие характеристики (1.35), (1.36) являются функциями инвариантов J_1, J_2 , а следовательно, – средних в этом компоненте деформаций $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle$ ($v=1, 2$). Выразив средние деформации в компонентах через средние деформации в композите $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ получим эффективные модули как функции средних деформаций в композите. В случае зернистого композитного материала из выражений (1.28) получим [11, 36, 37, 39]

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = (-1)^{v+1} \left[\frac{2\mu^* (\mu_1 - \mu_2) (K^* - K_{3-v}) - 3K^* (K_1 - K_2) (\mu^* - \mu_{3-v})}{6c_v \mu^* (\mu_1 - \mu_2) (K_1 - K_2)} \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + \frac{\mu^* - \mu_{3-v}}{c_v (\mu_1 - \mu_2)} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \right]. \quad (1.39)$$

Подставив выражения (1.39) в (1.35), (1.36), получим выражения для эффективных модулей как функций средних деформаций в композите $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Эффективные модули зернистого композита с физически нелинейными компонентами определим методом последовательных приближений по итерационному алгоритму, аналогичному алгоритму (1.29) – (1.33). Эффективные модули объемного сжатия $K^{*(n)}$ и сдвига $\mu^{*(n)}$ в n -ом приближении определяем формулами

$$K^{*(n)} = c_1 K_1 + c_2 K_2 - \frac{c_1 c_2 (K_1 - K_2)^2}{c_1 K_2 + c_2 K_1 + n_c^{(n)}};$$

$$\mu^{*(n)} = c_1 \mu_1(J_{1(n)}) + c_2 \mu_2(J_{2(n)}) - \frac{c_1 c_2 [\mu_1(J_{1(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})]^2}{c_1 \mu_2(J_{2(n)}) + c_2 \mu_1(J_{1(n)}) + m_c^{(n)}};$$

$$\lambda^{*(n)} = K^{*(n)} - \frac{2}{3} \mu^{*(n)};$$
(1.40)

$$\left(n_c^{(n)} = \frac{4}{3} \mu_c^{(n)}; m_c^{(n)} = \frac{\mu_c^{(n)} (9K_c + 8\mu_c^{(n)})}{6(K_c + 2\mu_c^{(n)})} \right),$$
(1.41)

причем

$$K_c = c_1 K_1 + c_2 K_2; \mu_c^{(n)} = c_1 \mu_1(J_{1(n)}) + c_2 \mu_2(J_{2(n)}),$$
(1.42)

если жесткость матрицы больше жесткости включений, и

$$K_c = \frac{K_1 K_2}{c_1 K_2 + c_2 K_1}; \mu_c^{(n)} = \frac{\mu_1(J_{1(n)}) \mu_2(J_{2(n)})}{c_1 \mu_2(J_{2(n)}) + c_2 \mu_1(J_{1(n)})}$$
(1.43)

– в противном случае). Средние по компонентам деформации в $(n+1)$ -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n+1)}$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n+1)} = (-1)^{v+1} \left\{ \frac{\mu^{*(n)} - \mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})}{c_v [\mu_1(J_{1(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})]} \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{2\mu^{*(n)} [\mu_1(J_{1(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})] (K^{*(n)} - K_{3-v}) - 3K^{*(n)} (K_1 - K_2) [\mu^{*(n)} - \mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})]}{6c_v \mu^{*(n)} [\mu_1(J_{1(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})] (K_1 - K_2)} \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} \right\}.$$
(1.44)

При этом предполагаем, что нелинейные диаграммы деформирования компонентов при малых деформациях имеют линейные участки, которым соответствуют модули сдвига $\mu_1(0)$, $\mu_2(0)$.

В качестве конкретной задачи исследуем нелинейное деформирование зернистого композита с линейно-упругими включениями и нелинейно деформирующейся матрицей, причем объемные деформации матрицы являются линейными, т.е. модуль объемного сжатия $K_2 = \lambda_2 + 2\mu_2/3$ не зависят от деформаций, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. девиатор напряжений $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle'$ и деформаций $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'$ связаны нелинейным законом. Таким образом, имеют место соотношения

$$\sigma_{rr}^2 = K_2 \varepsilon_{rr}^2; \sigma_{ij}^2 = 2\mu_2(J_2) \varepsilon_{ij}^2.$$
(1.45)

Здесь модуль сдвига $\mu_2(J_2)$ описывается функцией

$$\mu_2(J_2) = \begin{cases} \mu_2, & T_2 \leq T_{20}; \\ \mu_2' + (1 - \mu_2'/\mu_2) T_{20}/(2J_2), & T_2 \geq T_{20}, \end{cases}$$
(1.46)

$$(J_2 = [\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle']^{1/2}; T_2 = [\langle \sigma_{ij}^2 \rangle' \langle \sigma_{ij}^2 \rangle']^{1/2}; T_{20} = \sigma_{20} \sqrt{2/3});$$
(1.47)

$\langle \sigma_{ij}^2 \rangle'$, $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'$ – соответственно, девиаторы средних в матрице напряжений и деформаций; σ_{20} – предел пропорциональности матрицы).

На основе полученных зависимостей были исследованы эффективные диаграммы нелинейного деформирования зернистого композита при различных объемных концентрациях компонентов в случае заданных макропараметров

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0. \quad (1.48)$$

В этом случае согласно (1.34) макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ в композите связаны с макродеформацией $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{3K^* \mu^*}{K^* + \mu^*/3} \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (1.49)$$

При выполнении расчетов в качестве включений и матрицы приняты, соответственно, линейно-упругие включения из алюмоборосиликатного стекла с характеристиками [11]

$$K_1 = 38,89 \text{ ГПа}; \quad \mu_1 = 29,17 \text{ ГПа} \quad (1.50)$$

и эпоксидная матрица, которая имеет диаграмму линейного упрочнения (1.45) – (1.47) с постоянными [11, 22]

$$K_2 = 3,33 \text{ ГПа}; \quad \mu_{20} = 1,11 \text{ ГПа}; \quad \mu_2' = 0,331 \text{ ГПа} \quad (1.51)$$

и пределом текучести

$$\sigma_{20} = 0,015 \text{ ГПа}. \quad (1.52)$$

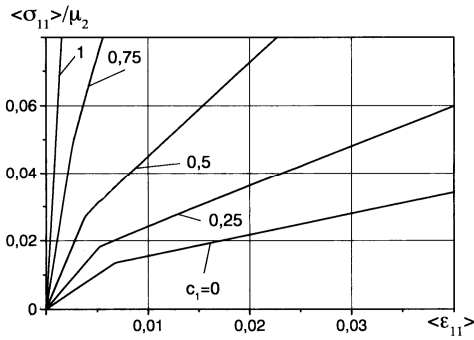


Рис. 1.1

На рис. 1.1 показаны графики зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для зернистого композита при различных объемных концентрациях компонентов c_1 . Как видим, физическая нелинейность матрицы материала оказывает существенное влияние на характер диаграмм деформирования для всех значений объемного содержания включений $c_1 < 1$. При деформировании материала с линейно упрочняющейся матрицей диаграмма состоит из двух линейных участков.

1.3. Исследование нелинейного деформирования слоистых композитных материалов. Рассмотрим слоистый материал с нелинейно деформирующимися изотропными компонентами. Обозначим модули объемного сжатия и сдвига ν -компонента K_ν , μ_ν , а объемные содержания ν -компонента – c_ν . Примем, что заданы макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ композита, тогда макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ композита согласно (1.23) связаны с ними соотношениями

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (\lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle) \delta_{ij}; \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Для слоистого композитного материала эффективные модули упругости композита λ_{11}^* , λ_{12}^* , λ_{13}^* , λ_{33}^* , λ_{44}^* согласно (1.24) – (1.26) определяются формулами [11, 36, 37, 39]

$$\lambda_{11}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \cdot \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2 + 4 \left\langle \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \right\rangle;$$

$$\lambda_{12}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \cdot \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \right\rangle;$$

$$\lambda_{13}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle; \quad \lambda_{33}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}; \quad \lambda_{44}^* = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} \quad (1.54)$$

$$(\lambda_v = K_v - 2\mu_v / 3; \langle f \rangle = c_1 f_1 + c_2 f_2; \quad v = 1, 2). \quad (1.55)$$

Отметим, что в случае физической нелинейности компонентов композита (1.19) упругие модули (1.54), (1.55) являются функциями инвариантов J_1, J_2 , а следовательно, – средних в этом компоненте деформаций $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle$ ($v = 1, 2$). Выразив средние деформации в компонентах через средние деформации в композите $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$, получим эффективные коэффициенты как функции средних деформаций в композите. В случае слоистого композитного материала из выражений (1.28) получим [11, 36, 37, 39]

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{i3}^v \rangle = \frac{1}{\mu_v} \cdot \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle;$$

$$\langle \varepsilon_{33}^v \rangle = \frac{1}{\lambda_v + 2\mu_v} \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \cdot \left[\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle - \lambda_v \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \right] \langle \varepsilon_{33} \rangle + \langle \varepsilon_{rr} \rangle \quad (v = 1, 2). \quad (1.56)$$

Подставив выражения (1.56) в (1.54), (1.55), получим выражения для эффективных коэффициентов как функций средних деформаций в композите $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Эффективные коэффициенты слоистого композита с физически нелинейными компонентами определим методом последовательных приближений по итерационному алгоритму, аналогичному алгоритму (1.29) – (1.33) или (1.40) – (1.44). Эффективные модули упругости композита $\lambda_{11}^{*(n)}, \lambda_{12}^{*(n)}, \lambda_{13}^{*(n)}, \lambda_{33}^{*(n)}, \lambda_{44}^{*(n)}$ в n -ом приближении определяются формулами

$$\lambda_{11}^{*(n)} = \left\langle \frac{1}{\lambda(J_{(n)}) + 2\mu(J_{(n)})} \right\rangle^{-1} \cdot \left\langle \frac{\lambda(J_{(n)})}{\lambda(J_{(n)}) + 2\mu(J_{(n)})} \right\rangle^2 + 4 \left\langle \frac{\mu(J_{(n)})[\lambda(J_{(n)}) + \mu(J_{(n)})]}{\lambda(J_{(n)}) + 2\mu(J_{(n)})} \right\rangle;$$

$$\lambda_{12}^{*(n)} = \left\langle \frac{1}{\lambda(J_{(n)}) + 2\mu(J_{(n)})} \right\rangle^{-1} \cdot \left\langle \frac{\lambda(J_{(n)})}{\lambda(J_{(n)}) + 2\mu(J_{(n)})} \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\lambda(J_{(n)})\mu(J_{(n)})}{\lambda(J_{(n)}) + 2\mu(J_{(n)})} \right\rangle; \quad (1.57)$$

$$\lambda_{13}^{*(n)} = \left\langle \frac{1}{\lambda(J_{(n)}) + 2\mu(J_{(n)})} \right\rangle^{-1} \cdot \left\langle \frac{\lambda(J_{(n)})}{\lambda(J_{(n)}) + 2\mu(J_{(n)})} \right\rangle; \quad \lambda_{33}^{*(n)} = \left\langle \frac{1}{\lambda(J_{(n)}) + 2\mu(J_{(n)})} \right\rangle^{-1};$$

$$\lambda_{44}^{*(n)} = \left\langle \frac{1}{\mu(J_{(n)})} \right\rangle^{-1}$$

$$(\lambda_v(J_{v(n)}) = K_v - 2\mu_v / 3 (J_{v(n)}) \quad (v = 1, 2); \langle f(J_{(n)}) \rangle = c_1 f_1(J_{1(n)}) + c_2 f_2(J_{2(n)})). \quad (1.58)$$

Средние по компонентам деформации в $(n+1)$ -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n+1)}$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^{v(n+1)} \rangle &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{i3}^{v(n+1)} \rangle = \frac{1}{\mu_v(J_{v(n)})} \left\langle \frac{1}{\mu(J_{(n)})} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle; \\ \langle \varepsilon_{33}^{v(n+1)} \rangle &= \frac{1}{\lambda_v(J_{v(n)}) + 2\mu_v(J_{v(n)})} \left\langle \frac{1}{\lambda(J_{(n)}) + 2\mu(J_{(n)})} \right\rangle^{-1} \times \\ &\times \left[\left\langle \frac{\lambda(J_{(n)})}{\lambda(J_{(n)}) + 2\mu(J_{(n)})} \right\rangle - \lambda_v(J_{v(n)}) \left\langle \frac{1}{\lambda(J_{(n)}) + 2\mu(J_{(n)})} \right\rangle \right] \langle \varepsilon_{33} \rangle + \langle \varepsilon_{rr} \rangle \quad (v = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.59)$$

При этом предполагаем, что нелинейные диаграммы деформирования компонентов при малых деформациях имеют линейные участки, которым соответствуют модули сдвига $\mu_1(0)$, $\mu_2(0)$.

В качестве конкретной задачи исследуем нелинейное деформирование слоистого композита с линейно-упругим жестким компонентом и нелинейно деформирующимся связующим, причем его объемные деформации являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. имеет место (1.46), (1.47).

На основе изложенной теории исследовано нелинейное деформирование слоистого композита при различных случаях нагружения. В качестве компонентов приняты алюмоборосиликатное стекло с характеристиками (1.50) и эпоксидное связующее с постоянными (1.51), диаграммой линейного упрочнения (1.45) – (1.47) и пределом текучести (1.52).

В случае задания макропараметров

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = 0, \quad (1.60)$$

согласно (1.53) макронапряжения $\langle \sigma_{33} \rangle$ в композите связано с макродеформациями $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \frac{1}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} [(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*)\lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2] \langle \varepsilon_{33} \rangle. \quad (1.61)$$

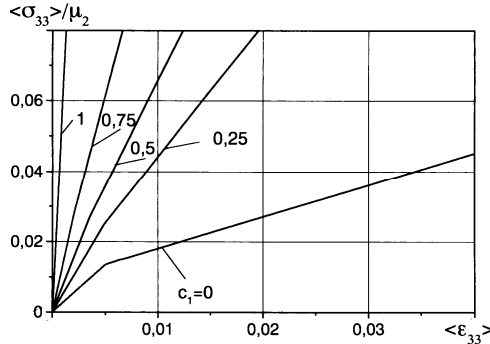


Рис. 1.2

На рис. 1.2 сплошными линиями изображены кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{33} \rangle / \mu_2$ от макродеформации $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ для слоистого композита при различных значениях объемного содержания наполнителя c_1 . Графики показывают, что физическая нелинейность связующего композита оказывает существенное влияние на характер диаграммы деформирования $\langle \sigma_{33} \rangle / \mu_2$ от $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ при всех значениях $c_1 < 1$. При деформировании материала с линейно упрочняющейся матрицей диаграмма состоит из двух линейных участков.

1.4. Исследование нелинейного деформирования волокнистых композитных материалов. Рассмотрим однонаправленный волокнистый композитный материал с нелинейно деформирующимися изотропными компонентами. Обозначим модули объемного сжатия и сдвига волокон и матрицы, соответственно, K_1 , μ_1 и K_2 , μ_2 , а объемные содержания волокон и матрицы, соответственно, c_1 , c_2 . Примем, что заданы макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ композита, тогда макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ композита согласно (1.23) связаны с ними соотношениями (1.53).

Для волокнистого композитного материала эффективные модули упругости композита λ_{11}^* , λ_{12}^* , λ_{13}^* , λ_{33}^* , λ_{44}^* согласно (1.24) – (1.26) определяются формулами [11, 36, 37, 39]

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*}{2} &= c_1(\lambda_1 + \mu_1) + c_2(\lambda_2 + \mu_2) - \frac{c_1 c_2 (\lambda_1 + \mu_1 - \lambda_2 - \mu_2)^2}{c_1(\lambda_2 + \mu_2) + c_2(\lambda_1 + \mu_1) + \mu_c}; \\ \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*}{2} &= c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 - \frac{c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \frac{\mu_c (\lambda_c + \mu_c)}{\lambda_c + 3\mu_c}}; \\ \lambda_{13}^* &= c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 - \frac{c_1 c_2 (\lambda_1 + \mu_1 - \lambda_2 - \mu_2)(\lambda_1 - \lambda_2)}{c_1(\lambda_2 + \mu_2) + c_2(\lambda_1 + \mu_1) + \mu_c}; \\ \lambda_{33}^* &= c_1(\lambda_1 + 2\mu_1) + c_2(\lambda_2 + 2\mu_2) - \frac{c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{c_1(\lambda_2 + \mu_2) + c_2(\lambda_1 + \mu_1) + \mu_c}; \\ \lambda_{44}^* &= c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 - \frac{c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \mu_c} \quad (\lambda_v = K_v - 2\mu_v / 3; \quad v = 1, 2); \quad (1.62)\end{aligned}$$

$$(\mu_c = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2; \quad \lambda_c = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2, \quad (1.63)$$

если жесткость матрицы больше жесткости волокон, и

$$\mu_c = \left(\frac{c_1}{\mu_1} + \frac{c_2}{\mu_2} \right)^{-1}; \quad \lambda_c = \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} \right)^{-1} - \frac{2}{3} \mu_c, \quad (1.64)$$

если жесткость волокон больше жесткости матрицы).

Отметим, что в случае физической нелинейности компонентов композита (1.19) упругие модули (1.62) – (1.64) являются функциями инвариантов J_1, J_2 , а следовательно, – средних в этом компоненте деформаций $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle, \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle$. Выразив средние деформации в компонентах через средние деформации в композите $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$, получим эффективные модули как функции средних деформаций в композите. В случае волокнистого композитного материала из выражений (1.28) получим [11, 36, 37, 39]

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle &= (-1)^{v+1} \left[\frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^* - 2\mu_{3-v}}{2c_v(\mu_2 - \mu_1)} \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \right. \\ &+ \frac{2(\lambda_{12}^* - \lambda_{3-v}) (\mu_2 - \mu_1) - (\lambda_{11}^* + \lambda_{13}^* - 2\lambda_{12}^* - 2\mu_{3-v})(\lambda_2 - \lambda_1)}{6c_v(K_2 - K_1)(\mu_2 - \mu_1)} \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + \\ &+ \left. \frac{2(\lambda_{13}^* - \lambda_{3-v}) (\mu_2 - \mu_1) - (\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^* - 2\mu_{3-v})(\lambda_2 - \lambda_1)}{6c_v(K_2 - K_1)(\mu_2 - \mu_1)} \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij} \right]; \\ \langle \varepsilon_{33}^v \rangle &= (-1)^{v+1} \left[\frac{2(\lambda_{13}^* - \lambda_{3-v}) (\mu_2 - \mu_1) - (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* - 2\lambda_{13}^* - 2\mu_{3-v})(\lambda_2 - \lambda_1)}{6c_v(K_2 - K_1)(\mu_2 - \mu_1)} \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \right. \\ &+ \left. \frac{(\lambda_{33}^* - \lambda_{3-v} - 2\mu_{3-v})(\mu_2 - \mu_1) - (\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^* - 2\mu_{3-v})(\lambda_2 - \lambda_1)}{3c_v(K_2 - K_1)(\mu_2 - \mu_1)} \langle \varepsilon_{33} \rangle \right];\end{aligned}$$

$$\langle \varepsilon_{i3}^v \rangle = (-1)^{v+1} \frac{\lambda_{44}^* - \mu_{3-v}}{c_v(\mu_2 - \mu_1)} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2). \quad (1.65)$$

Подставив выражения (1.65) в (1.62) – (1.64), получим выражения для эффективных модулей как функций средних деформаций в композите $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Эффективные модули волокнистого композита с физически нелинейными компонентами определим методом последовательных приближений по итерационному алгоритму, аналогичному алгоритму (1.29) – (1.33) или (1.40) – (1.44), или (1.57) – (1.59). Эффективные модули упругости композита $\lambda_{11}^{*(n)}$, $\lambda_{12}^{*(n)}$, $\lambda_{13}^{*(n)}$, $\lambda_{33}^{*(n)}$, $\lambda_{44}^{*(n)}$ в n -ом приближении определяются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{12}^{*(n)}}{2} &= c_1[\lambda_1(J_{1(n)}) + \mu_1(J_{1(n)})] + c_2[\lambda_2(J_{2(n)}) + \mu_2(J_{2(n)})] - \\ &\quad - \frac{c_1 c_2 [\lambda_1(J_{1(n)}) + \mu_1(J_{1(n)}) - \lambda_2(J_{2(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})]^2}{c_1[\lambda_2(J_{2(n)}) + \mu_2(J_{2(n)})] + c_2[\lambda_1(J_{1(n)}) + \mu_1(J_{1(n)})] + \mu_c^{(n)}}; \\ \frac{\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{12}^{*(n)}}{2} &= c_1 \mu_1(J_{1(n)}) + c_2 \mu_2(J_{2(n)}) - \frac{c_1 c_2 [\mu_1(J_{1(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})]^2}{c_1 \mu_2(J_{2(n)}) + c_2 \mu_1(J_{1(n)}) + \frac{\mu_c^{(n)}(\lambda_c^{(n)} + \mu_c^{(n)})}{\lambda_c^{(n)} + 3\mu_c^{(n)}}}; \\ \lambda_{13}^{*(n)} &= c_1 \lambda_1(J_{1(n)}) + c_2 \lambda_2(J_{2(n)}) - \\ &\quad - \frac{c_1 c_2 [\lambda_1(J_{1(n)}) + \mu_1(J_{1(n)}) - \lambda_2(J_{2(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})][\lambda_1(J_{1(n)}) - \lambda_2(J_{2(n)})]}{c_1[\lambda_2(J_{2(n)}) + \mu_2(J_{2(n)})] + c_2[\lambda_1(J_{1(n)}) + \mu_1(J_{1(n)})] + \mu_c^{(n)}}; \\ \lambda_{33}^{*(n)} &= c_1[\lambda_1(J_{1(n)}) + 2\mu_1(J_{1(n)})] + c_2[\lambda_2(J_{2(n)}) + 2\mu_2(J_{2(n)})] - \\ &\quad - \frac{c_1 c_2 [\lambda_1(J_{1(n)}) - \lambda_2(J_{2(n)})]^2}{c_1[\lambda_2(J_{2(n)}) + \mu_2(J_{2(n)})] + c_2[\lambda_1(J_{1(n)}) + \mu_1(J_{1(n)})] + \mu_c^{(n)}}; \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{44}^{*(n)} &= c_1 \mu_1(J_{1(n)}) + c_2 \mu_2(J_{2(n)}) - \frac{c_1 c_2 [\mu_1(J_{1(n)}) - \mu_2(J_{2(n)})]^2}{c_1 \mu_2(J_{2(n)}) + c_2 \mu_1(J_{1(n)}) + \mu_c^{(n)}} \\ (\mu_c^{(n)} &= c_1 \mu_1(J_{1(n)}) + c_2 \mu_2(J_{2(n)}); \lambda_c^{(n)} = c_1 \lambda_1(J_{1(n)}) + c_2 \lambda_2(J_{2(n)}), \end{aligned} \quad (1.67)$$

если жесткость матрицы больше жесткости волокон, и

$$\mu_c^{(n)} = \left[\frac{c_1}{\mu_1(J_{1(n)})} + \frac{c_2}{\mu_2(J_{2(n)})} \right]^{-1}; \quad \lambda_c^{(n)} = \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} \right)^{-1} - \frac{2}{3} \mu_c^{(n)}, \quad (1.68)$$

если жесткость волокон больше жесткости матрицы).

Средние по компонентам деформации в $(n+1)$ -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n+1)}$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} = (-1)^{v+1} \left\{ \frac{\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{12}^{*(n)} - 2\mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})}{2c_v[\mu_2(J_{2(n)}) - \mu_1(J_{1(n)})]} \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2[\lambda_{12}^{*(n)} - \lambda_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\mu_2(J_{2(n)}) - \mu_1(J_{1(n)})] - [\lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{13}^{*(n)} - 2\lambda_{12}^{*(n)} - 2\mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\lambda_2(J_{2(n)}) - \lambda_1(J_{1(n)})]}{6c_v(K_2 - K_1)[\mu_2(J_{2(n)}) - \mu_1(J_{1(n)})]} < \varepsilon_{rr} > \delta_{ij} + \\
& + \frac{2[\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\mu_2(J_{2(n)}) - \mu_1(J_{1(n)})] - [\lambda_{33}^{*(n)} - \lambda_{13}^{*(n)} - 2\mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\lambda_2(J_{2(n)}) - \lambda_1(J_{1(n)})]}{6c_v(K_2 - K_1)[\mu_2(J_{2(n)}) - \mu_1(J_{1(n)})]} < \varepsilon_{33} > \delta_{ij} \Big\}; \\
& < \varepsilon_{33}^v >^{(n)} = (-1)^{v+1} \times \\
& \times \left\{ \frac{2[\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\mu_2(J_{2(n)}) - \mu_1(J_{1(n)})] - [\lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{12}^{*(n)} - 2\lambda_{13}^{*(n)} - 2\mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\lambda_2(J_{2(n)}) - \lambda_1(J_{1(n)})]}{6c_v(K_2 - K_1)[\mu_2(J_{2(n)}) - \mu_1(J_{1(n)})]} < \varepsilon_{rr} > + \right. \\
& \left. + \frac{[\lambda_{33}^{*(n)} - \lambda_{3-v}(J_{(3-v)(n)}) - 2\mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\mu_2(J_{2(n)}) - \mu_1(J_{1(n)})] - [\lambda_{33}^{*(n)} - \lambda_{13}^{*(n)} - 2\mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})][\lambda_2(J_{2(n)}) - \lambda_1(J_{1(n)})]}{3c_v(K_2 - K_1)[\mu_2(J_{2(n)}) - \mu_1(J_{1(n)})]} < \varepsilon_{33} > \right\}; \\
& < \varepsilon_{i3}^v >^{(n)} = (-1)^{v+1} \frac{\lambda_{44}^{*(n)} - \mu_{3-v}(J_{(3-v)(n)})}{c_v[\mu_2(J_{2(n)}) - \mu_1(J_{1(n)})]} < \varepsilon_{i3} > \quad (i, j, r = 1, 2). \quad (1.69)
\end{aligned}$$

При этом предполагаем, что нелинейные диаграммы деформирования компонентов при малых деформациях имеют линейные участки, которым соответствуют модули сдвига $\mu_1(0)$, $\mu_2(0)$.

Простейшее обобщение изложенного выше можно построить, предположив, что матрица изотропная и физически нелинейная, а волокна являются линейно-упругими трансверсально-изотропными, направленными по нормали к плоскости изотропии x_1x_2 . Обозначим модули упругости волокон λ_{11}^1 , λ_{12}^1 , λ_{13}^1 , λ_{33}^1 , λ_{44}^1 . Пусть заданы макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ композита, тогда, как и в случае материала с изотропными компонентами, макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ композита связаны с ними соотношениями (1.53), где эффективные модули упругости композита λ_{pq}^* определяются формулами [11, 36, 37, 39]

$$\begin{aligned}
\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* &= c_1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2(\lambda_2 + \mu_2) - \frac{c_1c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_2 - 2\mu_2)^2}{2c_1(\lambda_2 + \mu_2) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m}; \\
\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^* &= c_1(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2\mu_2 - \frac{c_1c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_2)^2}{2c_1\mu_2 + c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2n}; \\
\lambda_{13}^* &= c_1\lambda_{13}^* + c_2\lambda_2 - \frac{c_1c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_2 - 2\mu_2)(\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^1)}{2c_1(\lambda_2 + \mu_2) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m}; \\
\lambda_{33}^* &= c_1\lambda_{33}^* + c_2(\lambda_2 + 2\mu_2) - \frac{2c_1c_2(\lambda_{13}^1 - \lambda_2)^2}{2c_1(\lambda_2 + \mu_2) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m}; \\
\lambda_{44}^* &= c_1\lambda_{44}^1 + c_2\mu_2 - \frac{c_1c_2(\lambda_{44}^1 - \mu_2)^2}{c_1\mu_2 + c_2\lambda_{44}^1 + s}
\end{aligned} \quad (1.70)$$

$$(2m = c_1(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2\mu_2; \quad 2n = c_1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2(\lambda_2 + \mu_2); \quad s = c_1\lambda_{44}^1 + 2c_2\mu_2, \quad (1.71))$$

если жесткость матрицы больше жесткости волокон, и

$$2m = \left(\frac{c_1}{\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2\mu_2} \right)^{-1}; \quad 2n = \left[\frac{c_1}{\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \right]^{-1}; \quad s = \left(\frac{c_1}{\lambda_{44}^1} + \frac{c_2}{2\mu_2} \right)^{-1}, \quad (1.72)$$

если жесткость волокон больше жесткости матрицы).

Отметим, что в случае физической нелинейности компонентов композита (1.19) ($\nu = 2$) упругие характеристики (1.70) – (1.72) являются функцией инварианта J_2 , а следовательно, – средних в этом компоненте деформаций $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle$. Выразив средние в матрице деформации через средние деформации в композите $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$, получим эффективные модули как функции средних деформаций в матрице [11, 36, 37, 39]

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle &= \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^* - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1}{c_2(2\mu_2 - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1)} \langle \varepsilon_{ij} \rangle - \\ & - \frac{1}{\Delta_2} \{[(\lambda_{11}^* - \lambda_{11}^1)a_1 - (\lambda_{12}^* - \lambda_{12}^1)a_2 - (\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)a_3] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \\ & + [(\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)(a_1 - a_2) - (\lambda_{33}^* - \lambda_{33}^1)a_3] \langle \varepsilon_{33} \rangle\} \delta_{ij}; \\ \langle \varepsilon_{33}^2 \rangle &= -\frac{1}{\Delta_2} \{[(\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)a_4 - (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* - \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1)a_3] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \\ & + [(\lambda_{33}^* - \lambda_{33}^1)a_4 - 2(\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)a_3] \langle \varepsilon_{33} \rangle\}; \\ \langle \varepsilon_{i3}^2 \rangle &= \frac{\lambda_{44}^* - \lambda_{44}^1}{c_2(\mu_2 - \lambda_{44}^1)} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2); \end{aligned} \quad (1.73)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_2) \times [(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_2 - 2\mu_2)(\lambda_{33}^1 - \lambda_2 - 2\mu_2) - 2(\lambda_{13}^1 - \lambda_2)^2]; \\ a_1 &= (\lambda_{13}^1 - \lambda_2)^2 - (\lambda_{12}^1 - \lambda_2)(\lambda_{33}^1 - \lambda_2 - 2\mu_2); \\ a_2 &= (\lambda_{13}^1 - \lambda_2)^2 - (\lambda_{11}^1 - \lambda_2 - 2\mu_2)(\lambda_{33}^1 - \lambda_2 - 2\mu_2); \\ a_3 &= (\lambda_{13}^1 - \lambda_2)(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_2); \quad a_4 = (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_2 - 2\mu_2)(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_2). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Эффективные модули волокнистого композита с физически нелинейными компонентами определим методом последовательных приближений по итерационному алгоритму, аналогичному алгоритму (1.66) – (1.69). Эффективные модули упругости композита $\lambda_{11}^{*(n)}$, $\lambda_{12}^{*(n)}$, $\lambda_{13}^{*(n)}$, $\lambda_{33}^{*(n)}$, $\lambda_{44}^{*(n)}$ в n -ом приближении определяются формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{12}^{*(n)} &= c_1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2[\lambda_2(J_{2(n)}) + \mu_2(J_{2(n)})] - \\ & - \frac{c_1 c_2 [\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_2(J_{2(n)}) - 2\mu_2(J_{2(n)})]^2}{2c_1[\lambda_2(J_{2(n)}) + \mu_2(J_{2(n)})] + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m^{(n)}}; \\ \lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{12}^{*(n)} &= c_1(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2\mu_2(J_{2(n)}) - \frac{c_1 c_2 [\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_2(J_{2(n)})]^2}{2c_1\mu_2(J_{2(n)}) + c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + \frac{2m^{(n)}n^{(n)}}{n^{(n)} + 2m^{(n)}}}; \\ \lambda_{13}^{*(n)} &= c_1\lambda_{13}^1 + c_2\lambda_2(J_{2(n)}) - \frac{c_1 c_2 [\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_2(J_{2(n)}) - 2\mu_2(J_{2(n)})][\lambda_{13}^1 - \lambda_2(J_{2(n)})]}{2c_1[\lambda_2(J_{2(n)}) + \mu_2(J_{2(n)})] + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m^{(n)}}; \end{aligned}$$

$$\lambda_{33}^{*(n)} = c_1 \lambda_{33}^1 + c_2 [\lambda_2(J_{2(n)}) + 2\mu_2(J_{2(n)})] - \frac{2c_1 c_2 [\lambda_{13}^1 - \lambda_2(J_{2(n)})]^2}{2c_1 [\lambda_2(J_{2(n)}) + \mu_2(J_{2(n)})] + c_2 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m^{(n)}};$$

$$\lambda_{44}^{*(n)} = c_1 \lambda_{44}^1 + c_2 \mu_2(J_{2(n)}) - \frac{c_1 c_2 [\lambda_{44}^1 - \mu_2(J_{2(n)})]^2}{c_1 \mu_2(J_{2(n)}) + c_2 \lambda_{44}^1 + s^{(n)}} \quad (1.75)$$

$$(2m^{(n)} = c_1 (\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_{22}(J_{2(n)});$$

$$2n^{(n)} = c_1 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2 [\lambda_2(J_{2(n)}) + \mu_2(J_{2(n)})]; \quad s^{(n)} = c_1 \lambda_{44}^1 + c_2 \mu_2(J_{2(n)}), \quad (1.76)$$

если жесткость матрицы больше жесткости волокон, и

$$2m^{(n)} = \left[\frac{c_1}{\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2\mu_2(J_{2(n)})} \right]^{-1}; \quad 2n^{(n)} = \left\{ \frac{c_1}{\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2[\lambda_2(J_{2(n)}) + \mu_2(J_{2(n)})]} \right\}^{-1}; \quad (1.77)$$

$$s^{(n)} = \left[\frac{c_1}{\lambda_{44}^1} + \frac{c_2}{\mu_2(J_{2(n)})} \right]^{-1},$$

если жесткость волокон больше жесткости связующего).

Средние по компонентам деформации в $(n+1)$ -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n+1)}$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам

$$\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)} = \frac{\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{12}^{*(n)} - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1}{c_2 [2\mu_2(J_{2(n)}) - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1]} \langle \varepsilon_{ij} \rangle -$$

$$-\frac{1}{\Delta_2^{(n)}} \{ [(\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{11}^1) a_1^{(n)} - (\lambda_{12}^{*(n)} - \lambda_{12}^1) a_2^{(n)} - (\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1) a_3^{(n)}] \langle \varepsilon_{rr} \rangle +$$

$$+ [(\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1) (a_1^{(n)} - a_2^{(n)}) - (\lambda_{33}^{*(n)} - \lambda_{33}^1) a_3^{(n)}] \langle \varepsilon_{33} \rangle \} \delta_{ij};$$

$$\langle \varepsilon_{33}^2 \rangle^{(n)} = -\frac{1}{\Delta_2^{(n)}} \{ [(\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1) a_4^{(n)} - (\lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{12}^{*(n)} - \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) a_3^{(n)}] \langle \varepsilon_{rr} \rangle +$$

$$+ [(\lambda_{33}^{*(n)} - \lambda_{33}^1) a_4^{(n)} - 2(\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1) a_3^{(n)}] \langle \varepsilon_{rr} \rangle \}; \quad (1.78)$$

$$\langle \varepsilon_{i3}^2 \rangle^{(n)} = \frac{\lambda_{44}^{*(n)} - \lambda_{44}^1}{c_2 [\mu_2(J_{2(n)}) - \lambda_{44}^1]} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2)$$

$$(\Delta_2^{(n)} = c_2 [\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_2(J_{2(n)})] \times$$

$$\times \{ [\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_2(J_{2(n)}) - 2\mu_2(J_{2(n)})] [\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_2(J_{2(n)})] - 2[\lambda_{13}^1 - \lambda_2(J_{2(n)})]^2 \};$$

$$a_1^{(n)} = [\lambda_{13}^1 - \lambda_2(J_{2(n)})]^2 - [\lambda_{12}^1 - \lambda_2(J_{2(n)})] [\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_2(J_{2(n)})];$$

$$a_2^{(n)} = [\lambda_{13}^1 - \lambda_2(J_{2(n)})]^2 - [\lambda_{11}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_2(J_{2(n)})] [\lambda_{33}^1 - \lambda_2(J_{2(n)}) - 2\mu_2(J_{2(n)})];$$

$$a_3^{(n)} = [\lambda_{13}^1 - \lambda_2(J_{2(n)})] [\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_2(J_{2(n)})]; \quad (1.79)$$

$$a_4^{(n)} = [\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_2(J_{2(n)}) - 2\mu_2(J_{2(n)})][\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_2(J_{2(n)})].$$

При этом предполагаем, что нелинейная диаграмма деформирования матрицы при малых деформациях имеет линейный участок, которому соответствует модуль сдвига $\mu_2(0)$.

В качестве конкретной задачи исследуем нелинейное деформирование слоистого композита с линейно-упругим жестким компонентом и нелинейно деформирующимся связующим, причем его объемные деформации являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. имеет место (1.45)–(1.47).

На основе изложенной теории исследовано нелинейное деформирование слоистого композита при различных случаях нагружения. В качестве компонентов приняты, соответственно, высококомодульные углеродные волокна с характеристиками [22]

$$E_1^1 = 8 \text{ ГПа}; \quad E_3^1 = 226 \text{ ГПа}; \quad \nu_{12}^1 = 0,3; \quad \nu_{13}^1 = 0,2; \quad G_{13}^1 = 60 \text{ ГПа}, \quad (1.80)$$

объемным содержанием $c_1 = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0$ и эпоксидная матрица с постоянными (1.51), диаграммой линейного упрочнения (1.46), (1.47) и пределом текучести (1.52), где E_1^1 и E_3^1 , ν_{12}^1 и ν_{13}^1 , G_{12}^1 и G_{13}^1 – соответственно, поперечный и продольный модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модули сдвига волокон, которые связаны с $\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1$ формулами

$$\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 = E_1^1 E_3^1 \left[E_3^1 \left(2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right) - 2E_1^1 (\nu_{13}^1)^2 \right]^{-1}; \quad \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 = G_{12}^1;$$

$$\lambda_{13}^1 = \nu_{13}^1 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1); \quad \lambda_{33}^1 = (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) \frac{E_3^1}{E_1^1} \left(2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right); \quad \lambda_{44}^1 = G_{13}^1. \quad (1.81)$$

В случае задания макропараметров

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0 \quad (1.82)$$

согласно (1.53) макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ в композите связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} [(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2] \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (1.83)$$

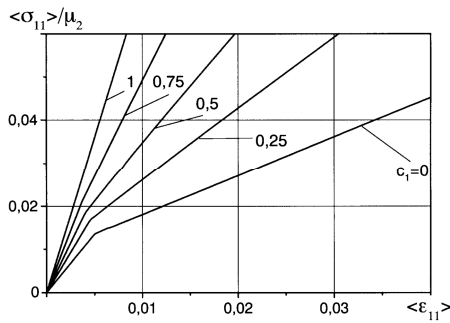


Рис. 1.3

На рис. 1.3 сплошными линиями изображены кривые зависимостей, соответственно, макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для волокнистого композита при различных значениях объемного содержания наполнителя c_1 . Графики показывают, что физическая нелинейность связующего композита оказывает существенное влияние на характер диаграммы деформирования $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ при всех значениях $c_1 < 1$. При деформировании материала с линейно упрочняющейся матрицей диаграмма состоит из двух линейных участков.

§2. Кратковременная микроповреждаемость материалов при нелинейном деформировании.

2.1. Однородный материал. Рассмотрим физически нелинейное деформирование изотропного материала, описываемое зависимостью модулей объемного сжатия K и сдвига μ от деформаций, которое сопровождается микроповреждаемостью в процессе нагружения. Микроповреждаемость материала моделируем образованием системы

стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности.

Зависимости между макронапряжениями и макродеформациями описываются формулой (1.34), где эффективные модули объемного сжатия K^* и сдвига μ^* будут функциями пористости p и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Определение эффективных модулей упругости пористого физически нелинейного материала сводится к итерационному алгоритму [38]. Эффективные модули объемного сжатия $K^{*(n)}$ и сдвига $\mu^{*(n)}$ в n -ом приближении определяются формулами

$$K^{*(n)} = \frac{4K\mu(J_{(n)}^1)(1-p)^2}{3Kp + 4\mu(J_{(n)}^1)(1-p)}; \quad \mu^{*(n)} = \frac{[9K + 8\mu(J_{(n)}^1)]\mu(J_{(n)}^1)(1-p)^2}{3K(3-p) + 4\mu(J_{(n)}^1)(2+p)}, \quad (2.1)$$

где $J_{(n)}^1 = [(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle')^{(n)} (\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle')^{(n)}]^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора средних деформаций по неповрежденной части материала в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle'^{(n)}$. В $(n+1)$ -ом приближении эти деформации определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам

$$\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle'^{(n+1)} = \frac{1}{(1-p)} \left[\frac{K^{*(n)}}{K} V_{ij\alpha\beta} + \frac{\mu^{*(n)}}{\mu(J_{(n)}^1)} D_{ij\alpha\beta} \right] \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle, \quad (2.2)$$

где $V_{ij\alpha\beta}$, $D_{ij\alpha\beta}$ – объемная и девиаторная составляющие единичного тензора $I_{ij\alpha\beta}$, т.е.

$$I_{ij\alpha\beta} = V_{ij\alpha\beta} + D_{ij\alpha\beta}, \quad V_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}; \quad D_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha j} \delta_{i\beta} + \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}). \quad (2.3)$$

Эффективные модули при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ находятся как предельные значения итерационного процесса

$$K^* = \lim_{n \rightarrow \infty} K^{*(n)}; \quad \mu^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{*(n)}. \quad (2.4)$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала примем критерий прочности Губера – Мизеса [15]

$$I_{\sigma}^1 = k, \quad (2.5)$$

где $I_{\sigma}^1 = (\langle \sigma_{ij}^1 \rangle' \langle \sigma_{ij}^1 \rangle')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle'$ по неповрежденной части материала; k – предел микропрочности, являющийся случайной функцией координат. Так как средние по неповрежденной части материала напряжения $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle'$ связаны с макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ зависимостями [33]

$$\langle \sigma_{ij}^1 \rangle' = \frac{1}{1-p} \langle \sigma_{ij} \rangle, \quad (2.6)$$

то из (2.5) получим критерий прочности в пространстве макронапряжений

$$\frac{I_{\sigma}}{1-p} = k, \quad (2.7)$$

где $I_{\sigma} = (\langle \sigma_{ij} \rangle' \langle \sigma_{ij} \rangle')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора макронапряжений. Если принять заданными макродеформации, то согласно (1.34), (2.7) критерий прочности в пространстве макродеформаций принимает вид

$$\frac{2\mu^*(p, \langle \varepsilon_{ij} \rangle)}{1-p} I_\varepsilon = k, \quad (2.8)$$

где $I_\varepsilon = (\langle \varepsilon_{ij} \rangle' \langle \varepsilon_{ij} \rangle')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора макродеформаций.

Простейшим заданием одноточечной функции распределения $F(k)$ предела микропрочности k неповрежденной части материала является степенной закон на некотором отрезке

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0; \\ \left(\frac{k - k_0}{k_1 - k_0} \right)^n, & k_0 \leq k \leq k_1; \\ 1, & k > k_1, \end{cases} \quad (2.9)$$

а также распределение Вейбулла

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0; \\ 1 - \exp[-m(k - k_0)^n], & k \geq k_0, \end{cases} \quad (2.10)$$

где k_0 – минимальное значение предела микропрочности; k_1, m, n – детерминированные постоянные, описывающие конкретный характер функции распределения, которые определяются путем аппроксимации экспериментальных кривых по разбросу микропрочности или диаграмм деформирования.

Случайное поле предела микропрочности k является статистически однородным для реальных материалов. При этом его масштаб корреляции, а также размеры единичных микроповреждений и расстояния между ними принимаем пренебрежимо малыми по сравнению с макрообъемом материала. Тогда случайное поле k и распределение микронапряжений в материале при однородном нагружении удовлетворяют свойству эргодичности, а функция распределения $F(k)$ определяет относительное содержание материала неразрушенной части, в котором предел прочности меньше соответствующего значения k . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle$ функция $F(I_\sigma^1)$ согласно (2.5), (2.9), (2.10) определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, обозначая начальную пористость p_0 , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости [55]

$$p = p_0 + (1 - p_0)F(I_\sigma^1). \quad (2.11)$$

Если заданы однородные макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$, то согласно (2.7) уравнение баланса пористости (2.11) имеет вид

$$p = p_0 + (1 - p_0)F\left(\frac{I_\sigma}{1-p}\right). \quad (2.12)$$

При заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ приходим согласно (2.8) к уравнению

$$p = p_0 + (1 - p_0)F\left(\frac{2\mu^*(p, \langle \varepsilon_{ij} \rangle)}{1-p} I_\varepsilon\right). \quad (2.13)$$

Таким образом, при заданных макронапряжениях микроповреждаемость материала, как следует из (2.12), не зависит от упругих свойств материала, включая и физиче-

скую нелинейность. При заданных макродеформациях микроповрежденность определяется более сложным уравнением (2.13), которое содержит эффективный модуль сдвига μ^* , зависящий от пористости и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Уравнения (1.34), (2.13) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и повреждаемости материала. Физическая нелинейность влияет на образование пористости материала при деформировании, изменение пористости в процессе деформирования влияет на кривую деформирования. Поэтому результирующая диаграмма деформирования обусловлена физической нелинейностью материала и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости при физически нелинейном деформировании.

Решение задачи о совместном физически нелинейном деформировании и повреждаемости материала при заданных макродеформациях сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости пористого материала, зависящих от макродеформаций, согласно итерационному алгоритму (2.1) – (2.3), и определению пористости из уравнения (2.13), что осуществляется также определенным итерационным методом. Представим уравнение (2.13) для n -го шага итерационного процесса (2.1) – (2.3) в виде

$$f^{(n)}(p) \equiv p - p_0 - (1 - p_0) F \left(\frac{2\mu^{*(n)}(p, \langle \varepsilon_{ij} \rangle) I_\varepsilon}{1 - p} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Тогда определение корня p уравнения (2.14) на m -ом шаге некоторого итерационного процесса можно представить формулой

$$p^{(m,n)} = A f^{(n)}(p^{(m-1)}), \quad (2.15)$$

где A – определенный оператор, действующий на функцию $f^{(n)}(p)$.

Искомый корень определяется как предельное значение

$$p = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} p^{(m,n)}. \quad (2.16)$$

Соотношения (1.34), (2.4), (2.16) дают решение поставленной задачи, т.е. для заданного физически нелинейного материала они определяют диаграммы макродеформирования (зависимости $\langle \sigma_{ij} \rangle$ от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$) и микроповрежденности (зависимости p от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$).

В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости материала, объемные деформации которого являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в микрообъеме имеют место соотношения

$$\sigma_{rr} = K \varepsilon_{rr}; \quad \sigma'_{ij} = 2\mu(J) \varepsilon'_{ij}. \quad (2.17)$$

Здесь модуль объемного сжатия K не зависит от деформаций, а модуль сдвига $\mu(J)$ описывается функцией

$$\mu(J) = \begin{cases} \mu_0, & T \leq T_0; \\ \mu' + \left(1 - \frac{\mu'}{\mu_0}\right) \frac{T_0}{2J}, & T \geq T_0, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$(J = (\varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij})^{1/2}; \quad T = (\sigma'_{ij} \sigma'_{ij})^{1/2}; \quad T_0 = \sigma_{20} \sqrt{2/3}), \quad (2.19)$$

где ε'_{ij} , σ'_{ij} – девиаторы, соответственно, тензоров деформаций и напряжений, σ_{20} – предел пропорциональности на растяжение, который принимаем независимым от координат, μ_0 , μ' – постоянные материала).

Алгоритм решения задачи о совместном физически нелинейном деформировании и кратковременной повреждаемости однородного материала при заданных макродеформациях будем строить на основе метода секущих [4]. На основе изложенной теории исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости однородного материала, имеющего диаграмму линейного упрочнения (2.17), (2.18) с постоянными [12]

$$K = 3,33 \text{ ГПа}; \quad \mu_0 = 1,11 \text{ ГПа}; \quad \mu' = 0,331 \text{ ГПа} \quad (2.20)$$

и пределами пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение $\sigma_p = k_0 \sqrt{3/2}$

$$\sigma_0 = 0,003 \text{ ГПа}; \quad \sigma_p = 0,011 \text{ ГПа}; \quad (2.21)$$

$$\sigma_0 = \sigma_p = 0,007 \text{ ГПа}; \quad (2.22)$$

$$\sigma_0 = 0,015 \text{ ГПа}; \quad \sigma_p = 0,003. \quad (2.23)$$

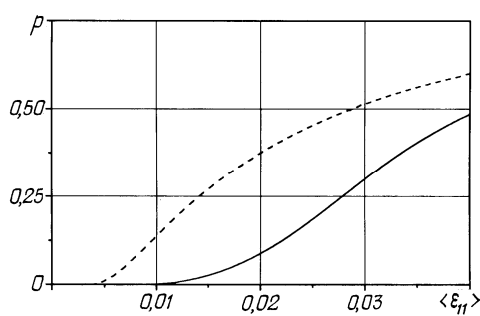


Рис. 2.1

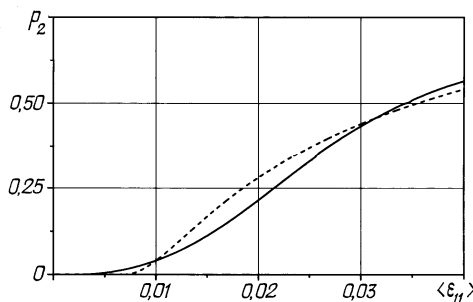


Рис. 2.2

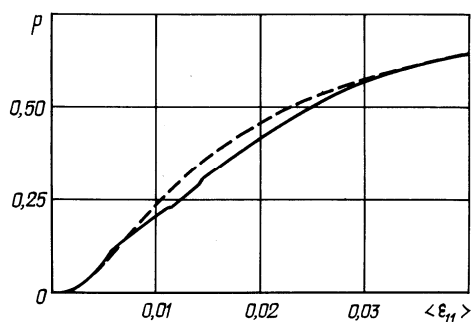


Рис. 2.3

На рис. 2.1 – 2.3, соответственно, при пределах пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение (2.21) – (2.23) сплошными линиями изображены кривые зависимостей пористости материала p от макродеформации $\langle \epsilon_{11} \rangle$ для линейно упрочняющегося материала. На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости p от $\langle \epsilon_{11} \rangle$ для линейного материала. Как видим, физическая нелинейность деформирования материала оказывает существенное влияние на его микроразрушение, особенно при $\sigma_p > \sigma_0$, т.е. когда предел пропорциональности меньше предела минимальной микропрочности. Графики показывают, что для линейно упрочняющегося материала при $\sigma_p > \sigma_0$ микроразрушения начинаются при более высоких макродеформациях, чем для линейного. При $\sigma_p < \sigma_0$ микроразрушения в физически нелинейном и линейном материалах начинаются при одинаковых макродеформациях, однако в линейном материале на начальном этапе микроразрушения происходят более интенсивно (фиксированным значениям макродеформации соответствуют более высокие значения пористости).

На рис. 2.4 – 2.6, соответственно, при пределах пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение (2.21) – (2.23) сплошными линиями изображены кривые зависимостей макро-

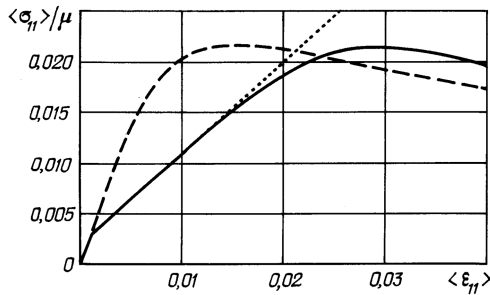


Рис. 2.4

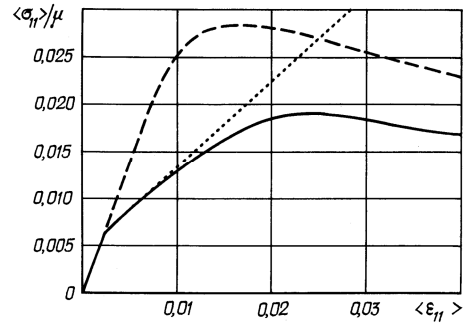


Рис. 2.5

пряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ от макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для линейно упрочняющегося материала при микроразрушениях. На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости $\langle \sigma_{11} \rangle$ от $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ при микроразрушениях для линейного материала (штриховые линии) и линейно упрочняющегося материала без микроразрушений (линии, состоящие из коротких штрихов). Как видим, физическая нелинейность материала оказывает существенное влияние на характер диаграмм деформирования, особенно при $\sigma_p > \sigma_0$. Для линейного материала при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из двух участков – линейного и нелинейного. При деформировании линейно упрочняющегося материала без микроразрушений диаграмма состоит из двух линейных участков. Для линейно упрочняющегося материала при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из трех участков – двух линейных и нелинейного. Сравнение результатов для линейного и нелинейного материалов, подверженных микроразрушениям, показывает, что для линейно упрочняющегося материала на начальном этапе деформирования ($\langle \varepsilon_{11} \rangle \ll 0,02$) заданным значениям макродеформаций будут соответствовать меньшие значения макронапряжений по сравнению с линейным материалом.

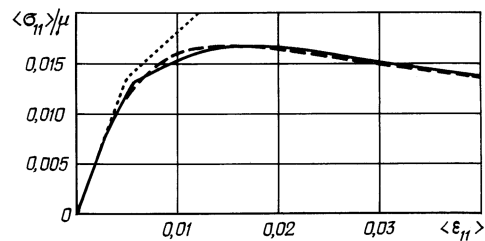


Рис. 2.6

2.2. Зернистый материал. Рассмотрим физически нелинейное деформирование зернистого композита, описываемое зависимостью модулей объемного сжатия K_v и сдвига μ_v ($v = 1, 2$) компонентов от деформаций, которое сопровождается микроповреждаемостью компонентов в процессе нагружения. Микроповреждаемость компонентов моделируем образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности. Пусть включения и матрица материала имеют пористость, соответственно, p_1 и p_2 . Обозначим модули объемного сжатия и сдвига материалов каркасов включений и матрицы, соответственно, K_1, μ_1 и K_2, μ_2 , а объемные содержания пористых включений и пористой матрицы, соответственно, c_1, c_2 . Тогда зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ можно представить в виде (1.34), причем эффективные модули объемного сжатия K^* и сдвига μ^* будут функциями пористостей компонентов p_1, p_2 и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Определение эффективных модулей упругости физически нелинейного зернистого композита с пористыми компонентами сводится к следующему итерационному

алгоритму. Эффективные модули объемного сжатия $K^{*(n)}$ и сдвига $\mu^{*(n)}$ в n -ом приближении согласно (1.40) – (1.43) определяются через соответствующие модули включений $K_{1p}^{(n)}$, $\mu_{1p}^{(n)}$ и матрицы $K_{2p}^{(n)}$, $\mu_{2p}^{(n)}$ в n -ом приближении формулами [11, 36, 37, 39]

$$K^{*(n)} = c_1 K_{1p} + c_2 K_{2p} - c_1 c_2 \frac{(K_{1p} - K_{2p})^2}{c_1 K_{2p} + c_2 K_{1p} + n_c^{(n)}};$$

$$\mu^{*(n)} = c_1 \mu_{1p}^{(n)} + c_2 \mu_{2p}^{(n)} - c_1 c_2 \frac{(\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)})^2}{c_1 \mu_{2p}^{(n)} + c_2 \mu_{1p}^{(n)} + m_c^{(n)}}, \quad (2.24)$$

$$\left(n_c^{(n)} = \frac{4}{3} \mu_c^{(n)}; m_c^{(n)} = \frac{\mu_c^{(n)} (9K_c + 8\mu_c^{(n)})}{6(K_c + 2\mu_c^{(n)})} \right), \quad (2.25)$$

причем

$$K_c = c_1 K_{1p} + c_2 K_{2p}; \quad \mu_c^{(n)} = c_1 \mu_{1p}^{(n)} + c_2 \mu_{2p}^{(n)}, \quad (2.26)$$

если жесткость пористой матрицы больше жесткости пористых включений, и

$$K_c = \frac{K_{1p} K_{2p}}{c_1 K_{2p} + c_2 K_{1p}}; \quad \mu_c^{(n)} = \frac{\mu_{1p}^{(n)} \mu_{2p}^{(n)}}{c_1 \mu_{2p}^{(n)} + c_2 \mu_{1p}^{(n)}} \quad (2.27)$$

– в противном случае). Эффективные модули пористых включений $K_{1p}^{(n)}$, $\mu_{1p}^{(n)}$ и матрицы $K_{2p}^{(n)}$, $\mu_{2p}^{(n)}$ в n -ом приближении согласно [35, 38, 39] определяются формулами

$$K_{vp}^{(n)} = \frac{4K_v \mu_v (J_{v(n)}^1) (1-p_v)^2}{3K_v p_v + 4\mu_v (J_{v(n)}^1) (1-p_v)};$$

$$\mu_{vp}^{(n)} = \frac{[9K_v + 8\mu_v (J_{v(n)}^1)] \mu_v (J_{v(n)}^1) (1-p_v)^2}{3K_v (3-p_v) + 4\mu_v (J_{v(n)}^1) (2+p_v)} \quad (v = 1, 2), \quad (2.28)$$

где $J_{v(n)}^1$ – второй инвариант девиатора тензора средних деформаций по неповрежденной части материала включения или матрицы в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^{1v} \rangle^{(n)}$. В $(n+1)$ -ом приближении эти деформации связаны со средними по компонентам деформациями в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)}$ зависимостями

$$\langle \varepsilon_{ij}^{1v} \rangle^{(n+1)} = \frac{1}{(1-p_v)} \left\{ \frac{\mu_{vp}^{(n)}}{\mu_v (J_{v(n)}^1)} \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} + \frac{1}{3} \left[\frac{K_{vp}^{(n)}}{K_v} - \frac{\mu_{vp}^{(n)}}{\mu_v (J_{v(n)}^1)} \right] \langle \varepsilon_{rr}^v \rangle^{(n)} \delta_{ij} \right\} \quad (v = 1, 2). \quad (2.29)$$

Средние по компонентам деформации в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)}$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам [11, 36, 37, 39]

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} = (-1)^{v+1} \left[\frac{\mu^{*(n)} - \mu_{(3-v)p}^{(n)}}{c_v (\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)})} \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{2\mu^{*(n)} (\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)}) (K^{*(n)} - K_{(3-v)p}^{(n)}) - 3K^{*(n)} (K_{1p}^{(n)} - K_{2p}^{(n)}) (\mu^{*(n)} - \mu_{(3-v)p}^{(n)})}{6c_v \mu^{*(n)} (\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)}) (K_{1p}^{(n)} - K_{2p}^{(n)})} \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} \right]. \quad (2.30)$$

Эффективные модули при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ вычислим как предельные значения итерационного процесса

$$K^* = \lim_{n \rightarrow \infty} K^{*(n)}; \quad \mu^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{*(n)}. \quad (2.31)$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала компонентов примем критерий прочности Губера – Мизеса [15]

$$I_\sigma^{1v} = k_v \quad (v = 1, 2), \quad (2.32)$$

где $I_\sigma^{1v} = (\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle' \langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений $\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle'$ по неповрежденной части материала k -компонента; k_v – предел микропрочности компонента, являющийся случайной функцией координат. Так как инвариант девиатора тензора средних напряжений по неповрежденной части материала компонента I_σ^{1v} связан с инвариантом девиаторов средних деформаций в компонентах $I_\varepsilon^k = (\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle')^{1/2}$ зависимостями

$$I_\sigma^{1v} = \frac{2\mu_{vp}}{1-p_v} I_\varepsilon^v, \quad (2.33)$$

а инварианты девиаторов средних деформаций в компонентах I_ε^v определяются через инвариант $I_\varepsilon = (\langle \varepsilon_{ij} \rangle' \langle \varepsilon_{ij} \rangle')^{1/2}$ для всего композита соотношениями

$$I_\varepsilon^v = (-1)^{v+1} \frac{\mu^* - \mu_{(3-v)p}}{c_v(\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_\varepsilon, \quad (2.34)$$

то с учетом соотношений (2.33), (2.34) критерий прочности (2.32) в пространстве макродеформаций принимает вид

$$(-1)^{v+1} \frac{2\mu_{vp}(\mu^* - \mu_{(3-v)p})}{c_v(1-p_v)(\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_\varepsilon = k_v \quad (v = 1, 2). \quad (2.35)$$

Простейшим заданием одноточечной функции распределения $F_v(k_v)$ предела микропрочности k_v неповрежденной части материала компонента является степенной закон на некотором отрезке

$$F_v(k_v) = \begin{cases} 0, & k_v < k_{v0}; \\ \left(\frac{k_v - k_{v0}}{k_{v1} - k_{v0}} \right)^{n_v}, & k_{v0} \leq k_v \leq k_{v1}; \\ 1, & k_v > k_{v1}, \end{cases} \quad (2.36)$$

а также распределение Вейбулла

$$F_v(k_v) = \begin{cases} 0, & k_v < k_{v0}; \\ 1 - \exp[-m_v(k_v - k_{v0})^{n_v}], & k_v \geq k_{v0}, \end{cases} \quad (2.37)$$

где k_{v0} – минимальное значение предела микропрочности компонента; k_{v1} , m_v , n_v – детерминированные постоянные, описывающие конкретный характер функции распределения, которые определяются путем аппроксимации экспериментальных кривых по разбросу микропрочности или диаграмм деформирования.

Случайное поле предела микропрочности компонента k_v является статистически однородным для реальных материалов. При этом его масштаб корреляции, а также размеры единичных микроповреждений и расстояния между ними принимаем пренебрежимо малыми по сравнению с макрообъемом материала. Тогда случайное поле k_v и распределение микронапряжений в материале компонента при однородном нагружении удовлетворяют свойству эргодичности, а функция распределения $F_v(k_v)$ определяет относительное содержание материала неразрушенной части компонента, в котором предел прочности меньше соответствующего значения k_v . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{ij}^{lv} \rangle$ функция $F_v(I_\sigma^{lv})$ согласно (2.32), (2.36), (2.37) определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета компонента. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, обозначая начальную пористость компонента p_{v0} , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов компонента или его пористости [55, 58, 62]

$$p_v = p_{v0} + (1 - p_{v0})F_v(I_\sigma^{lv}). \quad (2.38)$$

С учетом соотношений (2.34), (2.35) уравнение баланса пористости компонента (2.36) в пространстве макродеформаций принимает вид

$$p_v = p_{v0} + (1 - p_{v0})F_v \left[(-1)^{v+1} \frac{2\mu_{vp}(\mu^* - \mu_{(3-v)p})}{c_v(1-p_v)(\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_\varepsilon \right], \quad (2.39)$$

где эффективный модуль сдвига μ^* и модули сдвига компонентов μ_{1p} , μ_{2p} определяются формулами (2.24) – (2.28).

Уравнения (1.34), (2.24) – (2.30), (2.36) (или (2.37)), (2.39) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и повреждаемости зернистого композита. Физическая нелинейность его компонентов влияет на образование пористости в них при деформировании, изменение пористости компонентов в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита. Поэтому результирующая диаграмма деформирования зернистого композита обусловлена физической нелинейностью материала его компонентов и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости в них при физически нелинейном деформировании.

Решение задачи о совместном физически нелинейном деформировании и повреждаемости зернистого композита при заданных макродеформациях сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости зернистого материала с пористыми компонентами, зависящих от макродеформаций, согласно итерационному алгоритму (2.24) – (2.30), и определению пористости из уравнения (2.39), что осуществляется также определенным итерационным методом. Представим уравнение (2.39) для n -го шага итерационного процесса (2.24) – (2.30) в виде

$$f_v^{(n)} \equiv p_v - p_{v0} - (1 - p_{v0})F_v \left[(-1)^{v+1} \frac{2\mu_{vp}^{(n)}(\mu^{*(n)} - \mu_{(3-v)p}^{(n)})}{c_v(1-p_v)(\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)})} I_\varepsilon \right]. \quad (2.40)$$

Тогда вычисление корня p_v уравнения (2.40) на m -ом шаге некоторого итерационного процесса можно представить формулой

$$p_v^{(m,n)} = A_v f_v^{(n)}(p_v^{(m-1)}), \quad (2.41)$$

где A_v – определенный оператор, действующий на функцию $f_v^{(n)}(p_v)$.

Искомый корень определяется как предельное значение

$$p_v = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} p_v^{(m,n)}. \quad (2.42)$$

Соотношения (1.34), (2.24) – (2.31), (2.36) (или (2.37)), (2.40), (2.42) дают решение поставленной задачи, т.е. для заданного зернистого композита с физически нелинейными компонентами они определяют диаграммы макродеформирования (зависимости $\langle \sigma_{ij} \rangle$ от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$) и микроповрежденности компонентов (зависимости p_v от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$).

В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости зернистого композита с линейно-упругими включениями и нелинейно деформирующейся матрицей, причем объемные деформации матрицы являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в ее микрообъеме имеют место соотношения (1.45) – (1.47).

Алгоритм решения задачи о совместном физически нелинейном деформировании и кратковременной повреждаемости зернистого композита при заданных макродеформациях будем строить на основе метода секущих [4]. На основе изложенной теории исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости зернистого композита при микроразрушениях в матрице для распределения Вейбулла в случае заданных макропараметров (1.48). В этом случае согласно (1.34) макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ в композите связаны с макродеформацией $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ соотношением (1.49). При этом в уравнении баланса пористости (2.39) принимается

$$I_\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3K^* \langle \varepsilon_{11} \rangle}{2(K^* + \frac{1}{3}\mu^*)}, \quad (2.43)$$

что эквивалентно выполнению условий (1.48).

В качестве включений и матрицы приняты, соответственно, линейно-упругие зерна с характеристиками (1.50) и матрица, которая имеет диаграмму линейного упрочнения (1.45) – (1.47) с постоянными (1.51) и пределами текучести и минимальной микропрочности на растяжение $\sigma_{2p} = k_{20} \sqrt{3/2}$

$$\sigma_{20} = 0,003 \text{ ГПа}; \quad \sigma_{2p} = 0,011 \text{ ГПа}; \quad (2.44)$$

$$\sigma_{20} = \sigma_{2p} = 0,007 \text{ ГПа}; \quad (2.45)$$

$$\sigma_{20} = 0,015 \text{ ГПа}; \quad \sigma_{2p} = 0,003 \text{ ГПа}. \quad (2.46)$$

На рис. 2.7 – 2.9, соответственно, при пределах пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение (2.44) – (2.46) сплошными линиями изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для зернистого композита с линейно упрочняющейся матрицей. На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости p_2 от $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для зернистого композита с линейной матрицей. Как видим, физическая нелинейность деформирования матрицы композитного материала оказывает существенное влияние на ее мик-

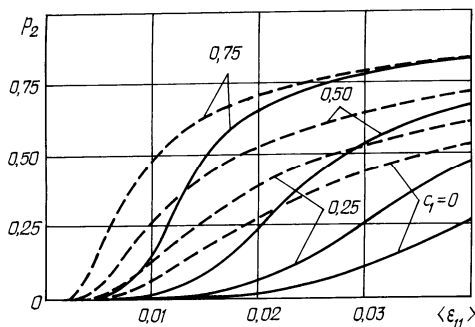


Рис. 2.7

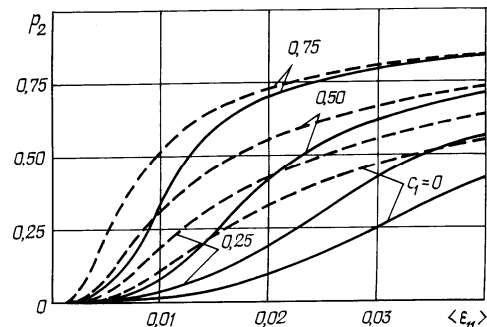


Рис. 2.8

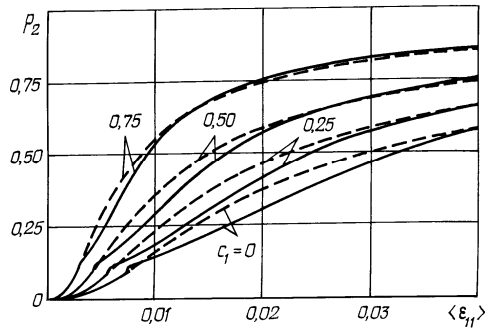


Рис. 2.9

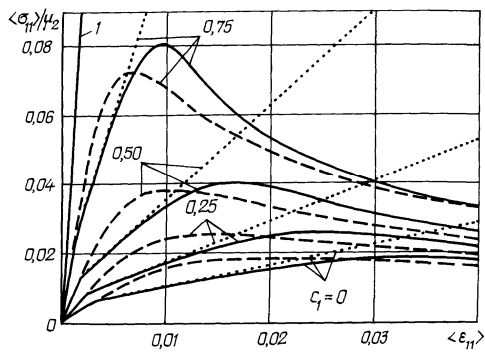


Рис. 2.10

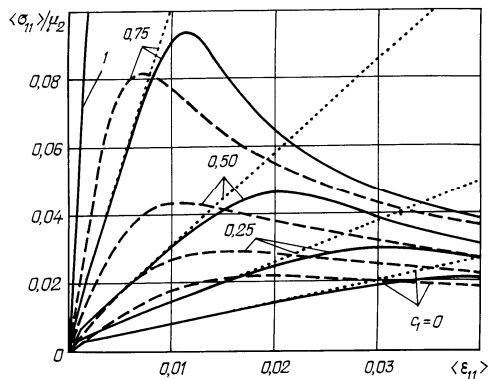


Рис. 2.11

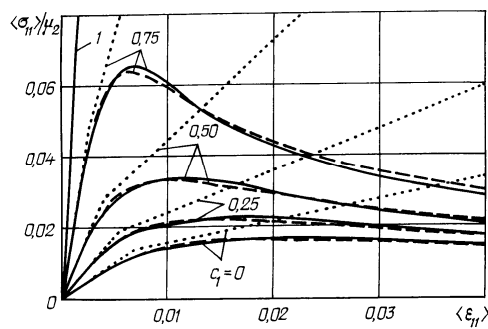


Рис. 2.12

роразрушение, особенно при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$, т.е. когда предел пропорциональности меньше предела минимальной микропрочности. Графики показывают, что при всех значениях объемного содержания включений c_1 для зернистого материала с линейно упрочняющейся матрицей при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$ микроразрушения начинаются при более высоких макродеформациях, чем для материала с линейной матрицей.

При $\sigma_{2p} < \sigma_{20}$ для всех значений объемного содержания включений c_1 микроразрушения в материалах с физически нелинейной и линейной матрицами начинаются при одинаковых макродеформациях, однако в материале с линейной матрицей на начальном этапе микроразрушения происходят более интенсивно, особенно при не очень больших значениях объемного содержания включений ($c_1 < 0,5$) (фиксированным значениям макродеформации соответствуют более высокие значения пористости).

На рис. 2.10 – 2.12, соответственно, при пределах пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение (2.44) – (2.46) сплошными линиями изображены кривые зависимостей макро-напряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ от макродеформации $\langle \epsilon_{11} \rangle$ для зернистого композита с линейно упрочняющейся матрицей при микроразрушениях. На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости $\langle \sigma_{11} \rangle$ от $\langle \epsilon_{11} \rangle$ при микроразрушениях для зернистых материалов с линейной матрицей (штриховые линии) и с линейно упрочняющейся матрицей без микроразрушений (линии, состоящие из коротких штрихов). Как видим, физическая нелинейность матрицы материала оказывает существенное влияние на характер диаграмм деформирования для всех значений объемного содержания включений c_1 , особенно при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$. Для материала с линейной матрицей при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из двух участков – линейного и нелинейного. При деформировании материала с

линейно упрочняющейся матрицей без микроразрушений диаграмма состоит из двух линейных участков. Для материала с линейно упрочняющейся матрицей при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из трех участков – двух линейных и нелинейного. Сравнение результатов для материалов с линейной и нелинейной матрицами, подверженными микроразрушениям, показывает, что для материала с линейно упрочняющейся матрицей в материале достигается более высокий уровень макронапряжений по сравнению с материалом, имеющим линейную матрицу, особенно при значительном объемном содержании включений ($c_1 \geq 0,5$).

2.3. Слоистый материал. Рассмотрим физически нелинейное деформирование слоистого материала с изотропными компонентами, описываемое зависимостью модулей объемного сжатия K_ν и сдвига μ_ν ($\nu = 1, 2$) компонентов от деформаций, которое сопровождается микрповреждаемостью компонентов в процессе нагружения. Микрповреждаемость компонентов моделируем образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности. Обозначим модули объемного сжатия и сдвига материала каркаса ν -компонента K_ν, μ_ν , его пористость p_ν , а объемное содержание пористого ν -компонента c_ν . Тогда зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ можно представить в виде (1.53), причем эффективные модули упругости композита $\lambda_{11}^*, \lambda_{12}^*, \lambda_{13}^*, \lambda_{33}^*, \lambda_{44}^*$ будут функциями пористостей компонентов p_ν ($\nu = 1, 2$) и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$. Определение эффективных модулей упругости физически нелинейного слоистого композита с пористыми компонентами сводится к следующему итерационному алгоритму. Эффективные модули упругости композита в n -ом приближении $\lambda_{11}^{*(n)}, \lambda_{12}^{*(n)}, \lambda_{13}^{*(n)}, \lambda_{33}^{*(n)}, \lambda_{44}^{*(n)}$ согласно (1.57), (1.58) определяются через соответствующие модули пористых компонентов в n -ом приближении $\lambda_{\nu p}^{(n)}, \mu_{\nu p}^{(n)}$ ($\nu = 1, 2$) формулами [11, 36, 37, 39]

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{*(n)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p^{(n)}}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\mu_p^{(n)}(\lambda_p^{(n)} + \mu_p^{(n)})}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle; \\ \lambda_{12}^{*(n)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p^{(n)}}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\lambda_p^{(n)} \mu_p^{(n)}}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle; \quad \lambda_{44}^{*(n)} = \left\langle \frac{1}{\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1}; \\ \lambda_{13}^{*(n)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p^{(n)}}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle; \quad \lambda_{33}^{*(n)} = \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

где для произвольной функции φ –

$$\langle \varphi_p^{(n)} \rangle = c_1 \varphi_{1p}^{(n)} + c_2 \varphi_{2p}^{(n)}. \quad (2.48)$$

Эффективные модули пористого ν -компонента в n -ом приближении $K_{\nu p}^{(n)}, \mu_{\nu p}^{(n)}, \lambda_{\nu p}^{(n)}$ ($\lambda_{\nu p}^{(n)} = K_{\nu p}^{(n)} - 2\mu_{\nu p}^{(n)} / 3$) определяются формулами (2.28), где $\langle \varepsilon_{ij}^{1\nu} \rangle^{(n)}$ – средние деформации по неповрежденной части ν -компонента в n -ом приближении. Они связаны со средними по компонентам деформациями $\langle \varepsilon_{ij}^\nu \rangle^{(n)}$ в n -ом приближении зависимостями (2.29). Средние по компонентам деформации в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^\nu \rangle^{(n)}$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам [11, 36, 37, 39]

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{i3}^v \rangle^{(n)} = \frac{1}{\mu_{vp}^{(n)}} \left\langle \frac{1}{\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle; \\ \langle \varepsilon_{33}^v \rangle^{(n)} &= \frac{1}{\lambda_{vp}^{(n)} + 2\mu_{vp}^{(n)}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \left[\left\langle \frac{\lambda_p^{(n)}}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle - \lambda_{vp}^{(n)} \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle \right] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \\ &\quad (i, v = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.49)$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала компонентов примем критерий прочности Губера – Мизеса (2.32). Одноточечную функцию распределения $F_v(k_v)$ предела микропрочности k_v неповрежденной части материала v -компонента можно принять в виде степенного закона на некотором отрезке (2.36) или распределения Вейбулла (2.37).

Исходя из тех же соображений, что и в 2.2, можем записать уравнение баланса поврежденных микрообъемов матрицы или ее пористости [55, 59, 63] в виде (2.38), где средние в неразрушенной части v -компонента напряжения $\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle$ связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ зависимостями [11, 36, 37, 39]

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle &= \frac{1}{1-p_v} \times \\ &\times \left[2\mu_{vp} \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{\lambda_{vp}}{\lambda_{vp} + 2\mu_{vp}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left(\left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle + 2\mu_{vp} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \delta_{ij} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_{vp}}{\lambda_{vp} + 2\mu_{vp}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{33} \rangle + \delta_{ij} \right]; \\ \langle \sigma_{33}^{1v} \rangle &= \frac{1}{1-p_v} \left[\left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left(\left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right) \right]; \\ \langle \sigma_{i3}^{1v} \rangle &= \frac{2}{1-p_v} \left\langle \frac{1}{\mu_p} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, v = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.50)$$

а эффективные модули v -компонента λ_{vp} , μ_{vp} определяются формулами (2.28).

Уравнения (1.53), (2.28), (2.47) – (2.49), (2.36) (или (2.37)), (2.38), (2.50) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и повреждаемости слоистого материала. Физическая нелинейность его компонентов влияет на образование пористости в них при деформировании, изменение пористости компонентов в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита. Поэтому результирующая диаграмма деформирования слоистого композита обусловлена физической нелинейностью материала его компонентов и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости в них при физически нелинейном деформировании.

Решение задачи о совместном физически нелинейном деформировании и повреждаемости слоистого композита при заданных макродеформациях сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости слоистого материала с пористыми компонентами, зависящих от макродеформаций, согласно итерационному алгоритму (2.28), (2.47) – (2.49), и определению пористости из уравнения (2.36) (или

(2.37)), (2.38), (2.50), что осуществляется также определенным итерационным методом. На основе соотношений (1.53), (2.28), (2.47) – (2.49), (2.36) (или (2.37)), (2.38), (2.50) представим уравнение (2.38) для n -го шага итерационного процесса (2.28), (2.47) – (2.49) в виде

$$f_k^{(n)} \equiv p_k - p_{k0} - (1 - p_{k0})F_k(I_\sigma^{1k(n)}), \quad (2.51)$$

где [11, 36, 37, 39]

$$I_\sigma^{1k(n)} = (\langle \sigma_{ij}^{1k(n)} \rangle' \langle \sigma_{ij}^{1k(n)} \rangle')^{1/2}; \quad (2.52)$$

$$\langle \sigma_{ij}^{1v(n)} \rangle = \frac{1}{1 - p_v} \times$$

$$\times \left[2\mu_{vp}^{(n)} \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{\lambda_{vp}^{(n)}}{\lambda_{vp}^{(n)} + 2\mu_{vp}^{(n)}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \left(\left\langle \frac{\lambda_p^{(n)}}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle + 2\mu_{vp}^{(n)} \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle \right) \times \right. \\ \left. \times \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + \frac{\lambda_{vp}^{(n)}}{\lambda_{vp}^{(n)} + 2\mu_{vp}^{(n)}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij} \right]; \quad (2.53)$$

$$\langle \sigma_{33}^{1v(n)} \rangle = \frac{1}{1 - p_v} \left[\left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \left(\left\langle \frac{\lambda_p^{(n)}}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right) \right];$$

$$\langle \sigma_{i3}^{1v(n)} \rangle = \frac{1}{1 - p_v} \left\langle \frac{1}{\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, v = 1, 2).$$

При помощи метода секущих [4] построен итерационный алгоритм для определения объемного содержания микроповреждений в компонентах и деформативных характеристик композита, т.е. для заданного слоистого композита с физически нелинейными компонентами соотношения (1.53), (2.28), (2.47) – (2.49), (2.36) (или (2.37)), (2.38), (2.50) определяют диаграммы макродеформирования (зависимости $\langle \sigma_{ij} \rangle$ от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$) и микроповрежденности компонентов (зависимости p_v от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$).

В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости слоистого композита, когда микроразрушения происходят в линейно упрочняющемся компоненте композита, а другой его компонент деформируется линейно-упруго без микроразрушений. Предположим, что объемные деформации линейно упрочняющегося компонента являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в его микрообъеме имеют место соотношения (1.45) – (1.47).

Исходя из изложенной теории исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости слоистого композита при микроразрушениях в связующем в случае распределения Вейбулла для различных случаев нагружения. В качестве компонентов приняты алюмоборосиликатное стекло с характеристиками (1.50) и эпоксидное связующее, которое имеет диаграмму линейного упрочнения (1.45) – (1.47) с постоянными (1.51) и пределами пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение $\sigma_{2p} = k_{20} \sqrt{3/2}$ (2.52) – (2.54).

В случае задания макропараметров (1.60) согласно (1.53) макронапряжения $\langle \sigma_{33} \rangle$ в композите связаны с макродеформацией $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ соотношением (1.61). При этом в уравнении баланса пористости (1.45) – (1.47) имеют место равенства

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle = -\frac{\lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} \langle \varepsilon_{33} \rangle. \quad (2.54)$$

Расчеты показывают, что при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$ физическая нелинейность деформирования связующего композитного материала оказывает существенное влияние на его микроповреждаемость, а при $\sigma_{2p} < \sigma_{20}$ влияние нелинейности заметно, но не так существенно. При всех значениях объемного содержания наполнителя c_1 для слоистого материала с линейно упрочняющимся связующим при $\sigma_{2p} \geq \sigma_{20}$ микроразрушения начинаются при более высоких макродеформациях, чем для материала с линейным связующим. При $\sigma_{2p} < \sigma_{20}$ для всех значений объемного содержания компонентов микроразрушения в материалах с физически нелинейным и линейным связующим начинаются при одинаковых макродеформациях, однако в материале с линейным связующим на начальном этапе микроразрушения происходят более интенсивно (фиксированным значениям макродеформации соответствуют более высокие значения пористости).

Физическая нелинейность связующего композита оказывает существенное влияние на характер диаграмм деформирования для всех значений объемного содержания компонентов, особенно при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$. Для материала с линейным связующим при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из двух участков – линейного и нелинейного. При деформировании материала с линейно упрочняющимся связующим без микроразрушений диаграмма состоит из двух линейных участков. Для материала с линейно упрочняющимся связующим при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из трех участков – двух линейных и нелинейного. Сравнение результатов для материалов с линейным и нелинейным связующими, подверженными микроразрушениям, показывает, что для материала с линейно упрочняющимся связующим в материале достигается более высокий уровень макронапряжений по сравнению с материалом, имеющим линейное связующее, особенно при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$.

2.4. Волокнистый материал. Рассмотрим физически нелинейное деформирование однонаправленного волокнистого материала с трансверсально-изотропными волокнами и изотропной матрицей, описываемое зависимостью модулей объемного сжатия K_2 и сдвига μ_2 матрицы от деформаций, которое сопровождается микроповреждаемостью матрицы в процессе нагружения. Микроповреждаемость матрицы моделируем образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности. Волокна примем трансверсально-изотропными, направленными по нормали к плоскости изотропии x_1x_2 . Обозначим модули упругости волокон $\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1$, модули объемного сжатия и сдвига материала каркаса матрицы K_2, μ_2 , ее пористость p_2 , а объемные содержания волокон и пористой матрицы, соответственно, c_1 и c_2 . Тогда зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ можно представить в виде (1.53), причем эффективные модули упругости композита $\lambda_{11}^*, \lambda_{12}^*, \lambda_{13}^*, \lambda_{33}^*, \lambda_{44}^*$ будут функциями пористости матрицы p_2 и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Определение эффективных модулей упругости физически нелинейного волокнистого композита с пористой матрицей сводится к следующему итерационному алгоритму. Эффективные модули упругости композита в n -ом приближении $\lambda_{11}^{*(n)}, \lambda_{12}^{*(n)}, \lambda_{13}^{*(n)}, \lambda_{33}^{*(n)}, \lambda_{44}^{*(n)}$ определяются через соответствующие модули волокон $\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1$ и пористой матрицы $\lambda_{2p}^{(n)}, \mu_{2p}^{(n)}$ ($\lambda_{2p}^{(n)} = K_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)} / 3$) в n -ом приближении формулами [11, 36, 37, 39]

$$\begin{aligned}
\lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{12}^{*(n)} &= c_1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}) - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)})^2}{2c_1(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m^{(n)}}; \\
\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{12}^{*(n)} &= c_1(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2\mu_{2p}^{(n)} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}^{(n)})^2}{2c_1\mu_{2p}^{(n)} + c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + \frac{2m^{(n)}n^{(n)}}{n^{(n)} + 2m^{(n)}}}; \\
\lambda_{13}^{*(n)} &= c_1\lambda_{13}^1 + c_2\lambda_{2p}^{(n)} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)})(\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})}{2c_1(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m^{(n)}}; \\
\lambda_{33}^{*(n)} &= c_1\lambda_{33}^1 + c_2(\lambda_{2p}^{(n)} + 2\mu_{2p}^{(n)}) - \frac{2c_1 c_2 (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})^2}{2c_1(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m^{(n)}}; \\
\lambda_{44}^{*(n)} &= c_1\lambda_{44}^1 + c_2\mu_{2p}^{(n)} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{44}^1 - \mu_{2p}^{(n)})^2}{c_1\mu_{2p}^{(n)} + c_2\lambda_{44}^1 + s^{(n)}};
\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$(2m^{(n)} = c_1(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2\mu_{2p}^{(n)}; 2n^{(n)} = c_1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}); s^{(n)} = c_1\lambda_{44}^1 + c_2\mu_{2p}^{(n)}), \tag{2.56}$$

если жесткость связующего больше жесткости волокон, и

$$2m^{(n)} = \left(\frac{c_1}{\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2\mu_{2p}^{(n)}} \right)^{-1}; 2n^{(n)} = \left(\frac{c_1}{\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)})} \right)^{-1}; s^{(n)} = \left(\frac{c_1}{\lambda_{44}^1} + \frac{c_2}{\mu_{2p}^{(n)}} \right)^{-1}, \tag{2.57}$$

если жесткость волокон больше жесткости связующего).

Эффективные модули пористой матрицы в n -ом приближении $K_{2p}^{(n)}$, $\lambda_{2p}^{(n)}$, $\mu_{2p}^{(n)}$ определяются формулами (2.28) ($\nu = 2$), где $\langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)}$ – средние деформации по неповрежденной части матрицы в n -ом приближении. Они связаны со средними по матрице деформациями $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)}$ в n -ом приближении зависимостями (2.29). Средние по матрице деформации в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)}$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам [11, 36, 37, 39]

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)} &= \frac{\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{12}^{*(n)} - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1}{c_2(2\mu_{2p}^{(n)} - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1)} \langle \varepsilon_{ij} \rangle - \\
&- \frac{1}{\Delta_2^{(n)}} \{ [(\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{11}^1)a_1^{(n)} - (\lambda_{12}^{*(n)} - \lambda_{12}^1)a_2^{(n)} - (\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1)a_3^{(n)}] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \\
&+ [(\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1)(a_1^{(n)} - a_2^{(n)}) - (\lambda_{33}^{*(n)} - \lambda_{33}^1)a_3^{(n)}] \langle \varepsilon_{33} \rangle \} \delta_{ij}; \\
\langle \varepsilon_{33}^2 \rangle^{(n)} &= -\frac{1}{\Delta_2^{(n)}} \{ [(\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1)a_4^{(n)} - (\lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{12}^{*(n)} - \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1)a_3^{(n)}] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \\
&+ [(\lambda_{33}^{*(n)} - \lambda_{33}^1)a_4^{(n)} - 2(\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1)a_3^{(n)}] \langle \varepsilon_{rr} \rangle \}; \\
\langle \varepsilon_{i3}^2 \rangle^{(n)} &= \frac{\lambda_{44}^{*(n)} - \lambda_{44}^1}{c_2(\mu_{2p}^{(n)} - \lambda_{44}^1)} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2);
\end{aligned} \tag{2.58}$$

$$(\Delta_2^{(n)} = c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}^{(n)})[(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)}) - 2(\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})^2];$$

$$\begin{aligned}
a_1^{(n)} &= (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})^2 - (\lambda_{12}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)}); \\
a_2^{(n)} &= (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})^2 - (\lambda_{11}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)}); \\
a_3^{(n)} &= (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}^{(n)}); \\
a_4^{(n)} &= (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)})(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}^{(n)}),
\end{aligned} \tag{2.59}$$

а эффективные коэффициенты пористой матрицы в n -ом приближении $K_{2p}^{(n)}$, $\lambda_{2p}^{(n)}$, $\mu_{2p}^{(n)}$ определяются формулами (2.28).

Эффективные модули при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ находятся как предельные значения итерационного процесса

$$\lambda_{lm}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{lm}^{*(n)}. \tag{2.60}$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала матрицы примем критерий прочности Губера – Мизеса (2.32) ($\nu = 2$). Одноточечную функцию распределения $F_2(k_2)$ предела микропрочности k_2 неповрежденной части материала матрицы можно принять в виде степенного закона на некотором отрезке (2.36) или распределения Вейбулла (2.37).

Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов матрицы или ее пористости (2.38) ($\nu = 2$), где средние в неразрушенной части матрицы напряжения в n -ом приближении $\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle^{(n)}$ связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ зависимостями (2.29), (2.58), (2.59) и

$$\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle^{(n)} = \frac{1}{1 - p_2} \left[(K_{2p}^{(n)} - \frac{2}{3} \mu_{2p}^{(n)}) \langle \varepsilon_{rr}^2 \rangle^{(n)} \delta_{ij} + 2\mu_{2p}^{(n)} \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right]. \tag{2.61}$$

Уравнения (1.53), (2.28), (2.55) – (2.57), (2.36) (или (2.37)), (2.38), (2.58), (2.59) (2.61) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и повреждаемости волокнистого материала. Физическая нелинейность его компонентов влияет на образование пористости в них при деформировании, изменение пористости компонентов в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита. Поэтому результирующая диаграмма деформирования волокнистого композита обусловлена физической нелинейностью материала его компонентов и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости в них при физически нелинейном деформировании.

Решение задачи о совместном физически нелинейном деформировании и повреждаемости волокнистого композита при заданных макродеформациях сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости слоистого материала с пористыми компонентами, зависящих от макродеформаций, согласно итерационному алгоритму (2.28), (2.55) – (2.57), и определению пористости из уравнения (2.36) (или (2.37)), (2.38), (2.58), (2.59) (2.61), что осуществляется также определенным итерационным методом. На основе соотношений (1.53), (2.28), (2.55) – (2.57), (2.36) (или (2.37)), (2.38), (2.58), (2.59) (2.61) представим уравнение (2.38) для n -го шага итерационного (2.28), (2.55) – (2.57) в виде (2.52), (2.53). При помощи метода секущих [4] построен итерационный алгоритм для определения объемного содержания микроповреждений в компонентах и деформативных характеристик композита, т.е. для заданного слоистого композита с физически нелинейными компонентами соотношения (1.53), (2.28), (2.55) – (2.57), (2.36) (или (2.37)), (2.38), (2.58), (2.59) (2.61) определяют диаграммы макродеформирования (зависимости $\langle \sigma_{ij} \rangle$ от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$) и микроповрежденности компонентов (зависимости p_v от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$).

В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости волокнистого композита, когда матрица композита деформируется по линейно упрочняющемуся закону. Предположим, что объемные деформации линейно упрочняющейся матрицы являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в ее микрообъеме имеют место соотношения (1.45) – (1.47).

Исходя из изложенной теории исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости волокнистого композита при микроразрушениях в связующем в случае распределения Вейбулла для различных случаев нагружения. В качестве компонентов приняты, соответственно, высокомодульные углеродные волокна с характеристиками (1.80) и эпоксидная матрица, которая имеет диаграмму линейного упрочнения (1.45) – (1.47) с постоянными (1.51), пределами пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение $\sigma_p = k_{02} \sqrt{3/2}$ (2.44) – (2.46).

В случае задания макропараметров (1.82) согласно (1.53) макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ в композите связаны с макродеформацией $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ соотношением (1.83). При этом в уравнении баланса пористости (2.38) имеют место равенства

$$\langle \varepsilon_{22} \rangle = \frac{(\lambda_{13}^*)^2 - \lambda_{12}^* \lambda_{33}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \langle \varepsilon_{11} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{33} \rangle = \frac{(\lambda_{12}^* - \lambda_{11}^*) \lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (2.62)$$

В случае задания макропараметров (1.62) согласно (1.53) макронапряжения $\langle \sigma_{33} \rangle$ в композите связаны с макродеформацией $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ соотношением (1.63). При этом в уравнении баланса пористости (1.45) – (1.47) имеют место равенства

Расчеты показывают, что физическая нелинейность деформирования матрицы композитного материала оказывает существенное влияние на его микроповреждаемость. При $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$, т.е. когда предел пропорциональности меньше предела минимальной микропрочности, влияние нелинейности деформирования матрицы на микроразрушение материала усиливается. При $\sigma_{2p} < \sigma_{20}$ влияние нелинейности заметно, хотя и не так существенно. При всех значениях объемного содержания волокон c_1 для волокнистого материала с линейно упрочняющейся матрицей при $\sigma_{2p} \geq \sigma_{20}$ микроразрушения начинаются при более высоких макродеформациях, чем для материала с линейной матрицей. При $\sigma_{2p} < \sigma_{20}$ для всех значений объемного содержания волокон c_1 микроразрушения в материалах с физически нелинейной и линейной матрицами начинаются при одинаковых макродеформациях, однако в материале с линейной матрицей на начальном этапе микроразрушения происходят более интенсивно (фиксированным значениям макродеформации соответствуют более высокие значения пористости).

Физическая нелинейность матрицы композита оказывает существенное влияние также и на характер диаграмм деформирования для всех значений объемного содержания волокон c_1 , особенно при $\sigma_{2p} \geq \sigma_{20}$. Для материала с линейной матрицей при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из двух участков – линейного и нелинейного. При деформировании материала с линейно упрочняющейся матрицей без микроразрушений диаграмма состоит из двух линейных участков. Для материала с линейно упрочняющейся матрицей при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из трех участков – двух линейных и нелинейного. Сравнение результатов для материалов с линейной и нелинейной матрицами, подверженными микроразрушениям, показывает, что для материала с линейно упрочняющейся матрицей в материале достигается более высокий уровень макронапряжений по сравнению с материалом, имеющим линейную матрицу, особенно при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$.

§3. Длительная повреждаемость материалов при нелинейном деформировании.

3.1. Однородный материал. Рассмотрим физически нелинейное деформирование изотропного материала, описываемое зависимостью модулей объемного сжатия K и сдвига μ от деформаций, которое сопровождается микроповреждаемостью в процесс нагружения. Микроповреждаемость материала будем моделировать образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности.

Зависимости между напряжениями и деформациями в произвольной точке пористого физически нелинейного материала можно записать в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{\alpha\beta})\varepsilon_{rr}\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{\alpha\beta})\varepsilon_{ij} \quad (\lambda = K - 2/3\mu), \quad (3.1)$$

где модули объемного сжатия K и сдвига μ , детерминированно зависящие от деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$, являются случайными функциями координат, которые принимают значения $K(\varepsilon_{\alpha\beta}^1)$, $\mu(\varepsilon_{\alpha\beta}^1)$ в скелете и $K = \mu = 0$ в порах, причем индекс 1 обозначает принадлежность микроточки скелету.

Если макрообъем (объем, размеры которого значительно превосходят размеры пор и расстояния между ними) находится в условиях однородных макронапряжений и макродеформаций, то микронапряжения σ_{ij} и микродеформации ε_{ij} будут статистически однородными случайными функциями координат, удовлетворяющими свойству эргодичности. При этом их математические ожидания $\langle \sigma_{ij} \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ в произвольной точке совпадают, соответственно, с макронапряжениями и макродеформациями. Подставляя (3.1) в уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (3.2)$$

и пользуясь соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3.3)$$

получим уравнение относительно флуктуаций перемещений

$$\mu_c u_{i,rr}^0 + (\lambda_c + \mu_c) u_{r,ri}^0 = \{[\lambda(\varepsilon_{\alpha\beta}) - \lambda_c]\varepsilon_{rr}\delta_{ij} + 2[\mu(\varepsilon_{\alpha\beta}) - \mu_c]\varepsilon_{ij}\}_{,j}, \quad (3.4)$$

где λ_c , μ_c – постоянные модули упругости некоторого тела сравнения, а флуктуации перемещений определяются равенством

$$u_i = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j + u_i^0. \quad (3.5)$$

Граничное условие на бесконечно удаленной границе s , как следует из (3.5), имеет вид

$$u_i^0|_s = 0. \quad (3.6)$$

Пользуясь функцией Грина, удовлетворяющей уравнению

$$\mu_c G_{in,rr}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) + (\lambda_c + \mu_c) G_{rn,ri}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) + \delta(x_r^{(1)} - x_r^{(2)})\delta_{in} = 0, \quad (3.7)$$

приведем краевую задачу (3.4), (3.6) к интегральному уравнению относительно тензора деформаций

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)})\{\lambda^{(2)}(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}) - \lambda_c\}\varepsilon_{rr}^{(2)}\delta_{pq} + 2[\mu^{(2)}(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}) - \mu_c]\varepsilon_{pq}^{(2)}, \quad (3.8)$$

где воздействие интегрального оператора K_{ijpq} определяется формулой

$$K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)})\varphi^{(2)} = \int_{V^{(2)}} G_{(ip,j)q}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) (\varphi^{(2)} - \langle \varphi \rangle) dV^{(2)}, \quad (3.9)$$

причем индекс в круглых скобках сверху обозначает соответствующую точку пространства.

Напряжения σ_{ij}^1 и деформации ε_{ij}^1 в каркасе (неразрушенной части материала) можно представить в виде суммы

$$\sigma_{ij}^1 = \langle \sigma_{ij}^1 \rangle + \sigma_{ij}^{10}; \quad \varepsilon_{ij}^1 = \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle + \varepsilon_{ij}^{10}, \quad (3.10)$$

где $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle$ – средние напряжения и деформации по каркасу; σ_{ij}^{10} , ε_{ij}^{10} – соответствующие флуктуации в пределах каркаса. Если пренебречь этими флуктуациями, то нелинейный закон (3.1) примет вид

$$\langle \sigma_{ij}^1 \rangle = \lambda \langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle \langle \varepsilon_{rr}^1 \rangle \delta_{ij} + 2\mu \langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle. \quad (3.11)$$

Отсюда следует выражение для макронапряжений

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (1-p) \langle \sigma_{ij}^1 \rangle = (1-p) [\lambda \langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle \langle \varepsilon_{rr}^1 \rangle \delta_{ij} + 2\mu \langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle]. \quad (3.12)$$

Для определения зависимостей между макронапряжениями и макродеформациями необходимо найти $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle$ как функцию $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ и подставить в (3.12). С этой целью усредним уравнение (3.8) по условной плотности $f(\varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)} | \varepsilon_{ij}^{(1)})$ (плотность распределения деформаций в точках $x_r^{(1)}$, $x_r^{(2)}$ при условии, что точка $x_r^{(1)}$, $x_r^{(2)}$ находится в каркасе). Тогда пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах каркаса, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно средних по каркасу деформаций [36, 37]

$$\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + K_{ijpq}^{11} \{ [\lambda \langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle - \lambda_c] \langle \varepsilon_{rr}^1 \rangle \delta_{pq} + 2[\mu \langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle - \mu_c] \langle \varepsilon_{pq}^1 \rangle \}. \quad (3.13)$$

Здесь матричный оператор K_{ijpq}^{11} определяется формулой

$$K_{ijpq}^{11} = K_{ijpq} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) p_{11} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}), \quad (3.14)$$

где $p_{11}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) = f_{(1)}^{(2)} | \varepsilon_{ij}^{(1)}$ – вероятность перехода из каркаса в точке $x_r^{(1)}$, $x_r^{(2)}$ в каркас в точке $x_r^{(2)}$. В случае квазисферических пор, расположенных статистически изотропно, вероятность перехода представляется в виде

$$p_{11}(r) = 1 - p[1 - \varphi(r)]; \quad r^2 = (x_i^{(2)} - x_i^{(1)})(x_i^{(2)} - x_i^{(1)}), \quad (3.15)$$

где $\varphi(r)$ – коэффициент корреляции, удовлетворяющий условиям $\varphi(0) = 1$; $\varphi(\infty) = 0$.

На основе (3.12) – (3.15) имеем зависимости между макронапряжениями и макродеформациями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (K^* - 2\mu^* / 3) \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + 2\mu^* \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad (3.16)$$

где эффективные модули объемного сжатия K^* и сдвига μ^* будут функциями пористости p и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$. Определение эффективных модулей упругости пористого физически нелинейного материала сводится к итерационному алгоритму [11, 35, 39]. Эффективные модули упругости пористого физически нелинейного материала K^* , μ^* определяются [11, 36, 37] через соответствующие модули его неразрушенной части K , μ формулами

$$K^* = \frac{4K \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle \mu \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle (1-p)^2}{3K \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle p + 4\mu \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle (1-p)};$$

$$\mu^* = \frac{[9K \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle + 8\mu \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle] \mu \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle (1-p)^2}{3K \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle (3-p) + 4\mu \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle (2+p)}, \quad (3.17)$$

где $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle$ – средние деформации по неповрежденной части материала. Поскольку они выражаются через его упругие модули компонентов K, μ , которые в свою очередь являются функциями средних по неповрежденной части ν -компонента деформаций, для их определения используется следующий итерационный алгоритм. В $(n+1)$ -ом приближении они связаны с соответствующими величинами в n -ом приближении зависимостями

$$\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n+1)} = \frac{1}{(1-p)} \left[\frac{K^{*(n)}}{K(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})} V_{ij\alpha\beta} + \frac{\mu^{*(n)}}{\mu(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})} D_{ij\alpha\beta} \right] \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle, \quad (3.18)$$

где $V_{ij\alpha\beta}, D_{ij\alpha\beta}$ – объемная и девиаторная составляющие единичного тензора $I_{ij\alpha\beta}$, т.е.

$$I_{ij\alpha\beta} = V_{ij\alpha\beta} + D_{ij\alpha\beta}; \quad V_{ij\alpha\beta} = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} / 3; \quad D_{ij\alpha\beta} = (\delta_{\alpha j}\delta_{i\beta} + \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} - 2\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} / 3) / 2.$$

Нулевое приближение соответствует случаю физически линейного материала.

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала возьмем критерий прочности Губера – Мизеса [15]

$$I_{\langle \sigma \rangle}^1 = k, \quad (3.19)$$

где $I_{\langle \sigma \rangle}^1 = (\langle \sigma_{ij}^1 \rangle' \langle \sigma_{ij}^1 \rangle')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle'$ по неповрежденной части материала; k – предел микропрочности, являющийся случайной функцией координат. Так как средние по неповрежденной части материала напряжения $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle$ связаны с макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ зависимостями [35, 39]

$$\langle \sigma_{ij}^1 \rangle = \frac{1}{1-p} \langle \sigma_{ij} \rangle, \quad (3.20)$$

то инвариант девиатора тензора средних напряжений по неповрежденной части материала $I_{\langle \sigma \rangle}^1$ связан с инвариантом девиатора тензора макронапряжений $I_{\langle \sigma \rangle} = (\langle \sigma_{ij} \rangle' \langle \sigma_{ij} \rangle')^{1/2}$ и с инвариантом девиатора тензора деформаций $I_{\langle \varepsilon \rangle} = (\langle \varepsilon_{ij} \rangle' \langle \varepsilon_{ij} \rangle')^{1/2}$ зависимостями

$$I_{\langle \sigma \rangle}^1 = \frac{1}{1-p} I_{\langle \sigma \rangle}, \quad (3.21)$$

$$I_{\langle \sigma \rangle}^1 = \frac{2\mu^*}{1-p} I_{\langle \varepsilon \rangle}. \quad (3.22)$$

Поэтому из (3.19), (3.21) получим критерий прочности в пространстве макронапряжений

$$\frac{1}{1-p} I_{\langle \sigma \rangle} = k, \quad (3.23)$$

а согласно (3.19), (3.22) критерий прочности в пространстве макродеформаций принимает вид

$$\frac{2\mu^*(p, \langle \varepsilon_{ij} \rangle)}{1-p} I_{\langle \varepsilon \rangle} = k. \quad (3.24)$$

Если величина $I_{\langle \sigma \rangle}^1$ для некоторого микрообъема материала не достигает соответствующего предельного значения k , то, согласно критерию длительной прочно-

сти, разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени τ_k , длительность которого зависит от степени близости $I_{<\sigma>}^1$ к предельному значению k . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k = \varphi(I_{<\sigma>}^1, k), \quad (3.25)$$

причем $\varphi(k, k) = 0$, $\varphi(0, k) = \infty$ согласно (3.19).

Одноточечную функцию распределения $F(k)$ предела прочности k микрообъема неповрежденной части материала можно аппроксимировать степенным законом на некотором отрезке

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0; \\ \left(\frac{k - k_0}{k_1 - k_0} \right)^\beta, & k_0 \leq k \leq k_1; \\ 1, & k > k_1 \end{cases}, \quad (3.26)$$

или распределением Вейбулла

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0; \\ 1 - \exp[-m(k - k_0)^\beta], & k \geq k_0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Здесь k_0 – минимальная величина предельного значения k , с которого начинается разрушение в некоторых объемах материала; k_1 , m , β – постоянные, выбираемые из условия аппроксимации разброса прочности в материале.

Примем, что случайное поле предела микропрочности материала k является статистически однородным, что характерно для реальных материалов, а размеры единичных микроразрушений и расстояний между ними пренебрежимо малы по сравнению с размерами включений и расстояний между ними. Тогда имеет место свойство эргодичности, согласно которому функция распределения $F(k)$ определяет относительное содержание неразрушенной части материала, в котором предел микропрочности меньше значения k . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle$ функция $F(I_{<\sigma>}^1)$ определяет согласно (3.19), (3.26), (3.27) относительное содержание мгновенно разрушенных микрообъемов материала. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, принимая начальную пористость материала равной p_0 , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости материала при кратковременной повреждаемости [55]

$$p = p_0 + (1 - p_0)F(I_{<\sigma>}^1). \quad (3.28)$$

Если заданы однородные макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$, то согласно (3.21) уравнение баланса пористости (3.28) имеет вид

$$p = p_0 + (1 - p_0)F\left(\frac{1}{1 - p} I_{<\sigma>}^1\right). \quad (3.29)$$

При заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ приходим согласно (3.22) к уравнению

$$p = p_0 + (1 - p_0)F\left(\frac{2\mu^*(p, \langle \varepsilon_{ij} \rangle)}{1 - p} I_{<\varepsilon>}^1\right). \quad (3.30)$$

Если напряжения в материале $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle$ действуют в течение некоторого времени t , то, согласно критерию длительной прочности (3.25), за это время в материале разру-

шатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k , для которых имеет место неравенство

$$t \geq \tau_k = \varphi(I_{<\sigma>}^1, k), \quad (3.31)$$

где величина $I_{<\sigma>}^1$ определяется выражениями (3.21), (3.22).

Время τ_k хрупкого разрушения материала для реальных материалов при невысоких температурах имеет конечное значение начиная только с некоторого значения $I_{<\sigma>}^1 > 0$. В этом случае функцию долговечности материала $\phi(I_{<\sigma>}^1, k)$ можно представить, например, дробно-степенной зависимостью [57]

$$\phi(I_{<\sigma>}^1, k) = \tau_0 \left(\frac{k - I_{<\sigma>}^1}{I_{<\sigma>}^1 - \gamma k} \right)^{n_1} \quad (\gamma k \leq I_{<\sigma>}^1 \leq k, \quad \gamma < 1), \quad (3.32)$$

где некоторое характерное время τ_0 , показатель n_1 и коэффициент γ определяются из аппроксимации экспериментальных кривых долговечности материала.

Подставляя (3.32) в (3.31), приходим к неравенству

$$k \leq I_{<\sigma>}^1 \frac{1 + \bar{t}^{1/n_1}}{1 + \gamma \bar{t}^{1/n_1}} \quad \left(\bar{t} = \frac{t}{\tau_0} \right). \quad (3.33)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F(k)$, приходим к выводу, что функция $F[(I_{<\sigma>}^1)\psi(\bar{t})]$, где

$$\psi(\bar{t}) = \frac{1 + \bar{t}^{1/n_1}}{1 + \gamma \bar{t}^{1/n_1}}, \quad (3.34)$$

определяет в момент времени \bar{t} относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала. Тогда с учетом (3.28) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для материала при длительной повреждаемости можно представить в виде [57]

$$p = p_0 + (1 - p_0)F[(I_{<\sigma>}^1)\psi(\bar{t})] \quad (3.35)$$

или с учетом (3.21) в виде

$$p = p_0 + (1 - p_0)F\left[\frac{I_{<\sigma>}^1 \psi(\bar{t})}{1 - p}\right], \quad (3.36)$$

где пористость p является функцией безразмерного времени \bar{t} , а величина $I_{<\sigma>}^1$ определяется выражениями (3.22).

Если время τ_k хрупкого разрушения материала имеет конечное значение для произвольных значений величины $I_{<\sigma>}^1$, что может наблюдаться при высоких температурах, то функцию долговечности можно представить экспоненциально-степенной зависимостью [57]

$$\varphi(I_{<\sigma>}^1, k) = \tau_0 \left\{ \exp m_1 \left[\left(\frac{k}{I_{<\sigma>}^1} \right)^{n_1} - 1 \right] - 1 \right\}^{n_2}, \quad (3.37)$$

имеющей достаточное число постоянных τ_0 , m_1 , n_1 , n_2 для аппроксимации экспериментальных кривых. Подставляя (3.37) в (3.31), приходим к неравенству

$$k \leq I_{<\sigma>}^1 \left[1 + \frac{1}{m_1} \ln \left(1 + \bar{t}^{1/n_2} \right) \right]^{1/n_1} \left(\bar{t} = \frac{t}{\tau_0} \right). \quad (3.38)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F(k)$, приходим к выводу, что функция $F[(I_{<\sigma>}^1)\psi(\bar{t})]$, где

$$\psi(\bar{t}) = \left[1 + \frac{1}{m_1} \ln \left(1 + \bar{t}^{1/n_2} \right) \right]^{1/n_1}, \quad (3.39)$$

определяет в момент времени \bar{t} относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала. Тогда с учетом (3.20) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для материала при длительной повреждаемости (3.25) можно также представить в виде (3.35).

Уравнения баланса пористости (3.35) с учетом (3.26), (3.27) в начальный момент $\bar{t} = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала. С ростом времени уравнения (3.35), (3.26), (3.27), (3.34) (или (3.39)) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной поврежденности и дополнительной, развивающейся во времени.

Уравнения (3.16) – (3.18), (3.35), (3.26), (3.27), (3.34) (или (3.39)) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и долговременной повреждаемости материала. Физическая нелинейность влияет на образование пористости материала при деформировании, изменение пористости в процессе деформирования влияет на кривую деформирования. Поэтому результирующая диаграмма деформирования обусловлена физической нелинейностью материала и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости при физически нелинейном деформировании.

В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости материала, объемные деформации которого являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в микрообъеме имеют место соотношения

$$\langle \sigma_{rr} \rangle = K \langle \varepsilon_{rr} \rangle; \quad \langle \sigma_{ij} \rangle' = 2\mu(J) \langle \varepsilon_{ij} \rangle'. \quad (3.40)$$

Здесь модуль объемного сжатия K не зависит от деформаций, а модуль сдвига $\mu(J)$ описывается функцией

$$\mu(J) = \begin{cases} \mu_0, & T \leq T_0; \\ \mu' + \left(1 - \frac{\mu'}{\mu_0} \right) \frac{T_0}{2J}, & T \geq T_0, \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\left(J = (\langle \varepsilon_{ij} \rangle' \langle \varepsilon_{ij} \rangle')^{1/2}; \quad T = (\langle \sigma_{ij} \rangle' \langle \sigma_{ij} \rangle')^{1/2}; \quad T_0 = \sigma_0 \sqrt{2/3}, \right) \quad (3.42)$$

где $\langle \varepsilon_{ij} \rangle'$, $\langle \sigma_{ij} \rangle'$ – девиаторы соответственно тензоров деформаций и напряжений; σ_0 – предел пропорциональности на растяжение, который принимаем независимым от координат; μ_0 , μ' – постоянные материала).

На основе соотношений (3.16) – (3.18), (3.35), (3.26), (3.27), (3.34) (или (3.39)) с помощью метода секущих [4] можно построить итерационный алгоритм для определения объемного содержания микроповреждений в материале и его напряженно-деформированного состояния. На основе проведенных вычислений для распределения Вейбулла (3.27) и функций $\psi(\bar{t})$, определяемых формулами (3.34) и (3.39), исследо-

ваны совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости однородного материала, имеющего диаграмму линейного упрочнения (3.40) – (3.42) с постоянными [11, 22]

$$K = 3,33 \text{ ГПа}; \mu_0 = 1,11 \text{ ГПа}; \mu' = 0,331 \text{ ГПа} \quad (3.43)$$

и пределами пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение $\sigma_p = k_0 \sqrt{3/2}$

$$\sigma_0 = 0,003 \text{ ГПа}; \sigma_p = 0,011 \text{ ГПа}. \quad (3.44)$$

В случае заданных макропараметров

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0 \quad (3.45)$$

согласно (3.1) макронапряжение $\langle \sigma_{11} \rangle$ в композите связано с макродеформацией $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{3K^* \mu^*}{K^* + \frac{1}{3} \mu^*} \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (3.46)$$

При этом в уравнении баланса пористости (3.30), (3.36) принимается

$$I_{\langle \varepsilon \rangle} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3K^* \langle \varepsilon_{11} \rangle}{2(K^* + \frac{1}{3} \mu^*)}, \quad (3.47)$$

что эквивалентно выполнению условий (3.45).

На рис. 3.1 при различных значениях макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ сплошными линиями изображены кривые зависимостей пористости материала p от времени \bar{t} для линейно упрочняющегося материала при дробно-степенной функции долговечности $\psi(\bar{t})$, определяемой формулой (3.34). На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости p от \bar{t} для линейного материала. Такие же обозначения приняты и на рис. 3.2 – 3.4. Как видим, физическая нелинейность деформирования материала оказывает существенное влияние на его микроразрушение. Графики показывают, что для линейно упрочняющегося материала микроразрушения начинаются при больших значениях времени \bar{t} , а в дальнейшем проходят более интенсивно, т.е. при достаточно больших значениях времени \bar{t} пористость линейно упрочняющегося материала выше, чем линейного.

На рис. 3.2 при различных значениях макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ сплошными линиями изображены кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu$ от времени \bar{t} для линейно упрочняющегося материала, а штриховыми линиями приведены зависимости $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu$ от \bar{t} для линейного материала при дробно-степенной функции дол-

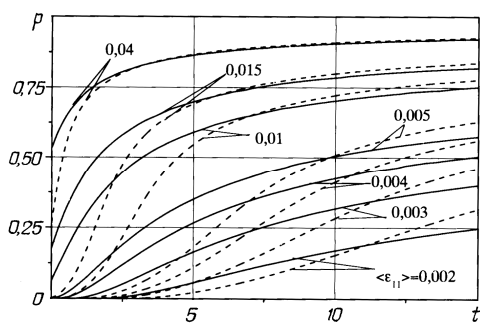


Рис. 3.1

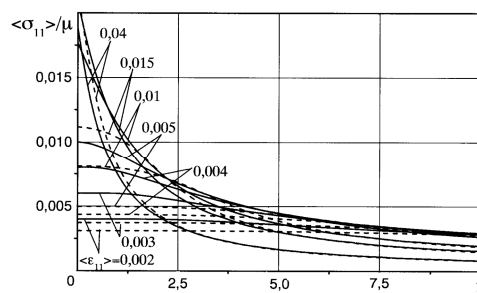


Рис. 3.2

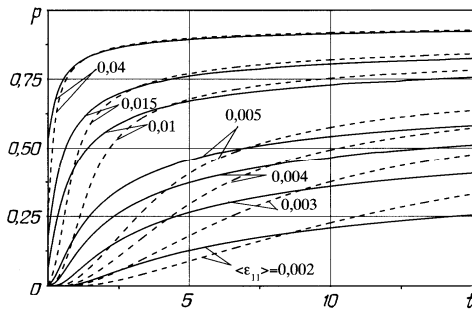


Рис. 3.3

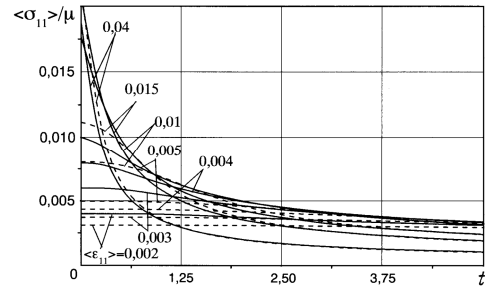


Рис. 3.4

говечности $\psi(\bar{t})$, определяемой формулой (3.34). Графики показывают, что для малых значений времени \bar{t} физическая нелинейность деформирования материала оказывает существенное влияние также и на его напряженное состояние. При достаточно больших значениях времени \bar{t} влияние нелинейности на напряженное состояние материала несущественно.

На рис. 3.3, 3.4 при различных значениях макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ изображены, соответственно, кривые зависимостей пористости материала p от времени \bar{t} и кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu$ от времени \bar{t} для линейного и линейно упрочняющегося материалов при экспоненциально-степенной функции долговечности $\psi(\bar{t})$, определяемой формулой (3.39). Как видим, характер кривых на этих рисунках качественно совпадает с характером соответствующих кривых при дробно-степенной функции долговечности $\psi(\bar{t})$, определяемой формулой (3.34).

3.2. Зернистый композитный материал. Физически нелинейное деформирование зернистого композита описывается зависимостью модулей объемного сжатия K_v и сдвига μ_v ($v=1, 2$) компонентов от деформаций. Предположим, что в процессе нагружения происходит микроповреждаемость компонентов, которую моделируем образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности. Для элементарного макрообъема имеют место зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (K^* - \frac{2}{3} \mu^*) \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{jk} + 2\mu^* \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad (3.48)$$

где K^* , μ^* – эффективные модули, являющиеся функциями макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ вследствие физической нелинейности и микроповреждаемости.

Пусть включения и матрица материала имеют пористость, соответственно, p_1 и p_2 . Обозначим модули объемного сжатия и сдвига материалов каркасов включений и матрицы, соответственно, K_1, μ_1 и K_2, μ_2 , а объемные содержания пористых включений и пористой матрицы, соответственно, c_1, c_2 . Тогда определение эффективных модулей упругости физически нелинейного зернистого композита с пористыми компонентами сводится к следующему алгоритму. Эффективные модули объемного сжатия K^* и сдвига μ^* определяются [11, 36, 37, 39] через соответствующие модули включений K_{1p}, μ_{1p} и матрицы K_{2p}, μ_{2p} формулами

$$K^* = c_1 K_{1p} + c_2 K_{2p} - c_1 c_2 \frac{(K_{1p} - K_{2p})^2}{c_1 K_{2p} + c_2 K_{1p} + n_c};$$

$$\mu^* = c_1\mu_{1p} + c_2\mu_{2p} - c_1c_2 \frac{(\mu_{1p} - \mu_{2p})^2}{c_1\mu_{2p} + c_2\mu_{1p} + m_c} \quad (3.49)$$

$$\left(n_c = \frac{4}{3}\mu_c; m_c = \frac{\mu_c(9K_c + 8\mu_c)}{6(K_c + 2\mu_c)} \right), \quad (3.50)$$

причем

$$K_c = c_1K_{1p} + c_2K_{2p}; \quad \mu_c = c_1\mu_{1p} + c_2\mu_{2p}, \quad (3.51)$$

если жесткость пористой матрицы больше жесткости пористых включений, и

$$K_c = \frac{K_{1p}K_{2p}}{c_1K_{2p} + c_2K_{1p}}; \quad \mu_c = \frac{\mu_{1p}\mu_{2p}}{c_1\mu_{2p} + c_2\mu_{1p}} \quad (3.52)$$

– в противном случае). Эффективные модули пористых включений K_{1p} , μ_{1p} и матрицы K_{2p} , μ_{2p} согласно [11, 35] определяются формулами

$$K_{vp} = K_{vp}(\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle) = \frac{4K_v(\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle)\mu_v(\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle)(1-p_v)^2}{3K_v(\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle)p_v + 4\mu_v(\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle)(1-p_v)};$$

$$\mu_{vp} = \mu_{vp}(\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle) = \frac{[9K_v(\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle) + 8\mu_v(\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle)]\mu_v(\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle)(1-p_v)^2}{3K_v(\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle)(3-p_v) + 4\mu_v(\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle)(2+p_v)} \quad (v=1, 2), \quad (3.53)$$

где $\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle$ – средние деформации по неповрежденной части материала включения или матрицы. Поскольку они выражаются через упругие модули компонентов K_v , μ_v ($v=1, 2$), которые в свою очередь являются функциями средних по неповрежденной части v -компонента деформаций, для их определения используется следующий итерационный алгоритм. В $(n+1)$ -ом приближении они связаны со средними по компонентам деформациями в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)}$ зависимостями

$$\langle \varepsilon_{ij}^{lv} \rangle^{(n+1)} = \frac{1}{(1-p_v)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\mu_{vp}^{(n)}}{\mu_v(\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle^{(n)})} \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} + \frac{1}{3} \left[\frac{K_{vp}^{(n)}}{K_v(\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle^{(n)})} - \frac{\mu_{vp}^{(n)}}{\mu_v(\langle \varepsilon_{lm}^{lv} \rangle^{(n)})} \right] \langle \varepsilon_{rr}^v \rangle^{(n)} \delta_{ij} \right\} \quad (3.54)$$

$$(v=1, 2).$$

Средние по компонентам деформации в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)}$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} = (-1)^{v+1} \times$$

$$\times \left\{ \frac{2\mu^{*(n)}(\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)})(K_{\chi p}^{*(n)} - K_{\chi p}^{(n)}) - 3K^{*(n)}(K_{1p}^{(n)} - K_{2p}^{(n)})(\mu^{*(n)} - \mu_{\chi p}^{(n)})}{6c_v\mu^{*(n)}(\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)})(K_{1p}^{(n)} - K_{2p}^{(n)})} \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + \right. \quad (3.55)$$

$$\left. + \frac{\mu^{*(n)} - \mu_{\chi p}^{(n)}}{c_k(\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)})} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \right\} \quad (\chi = 3-k).$$

Нулевое приближение соответствует случаю физически линейных компонентов.

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала компонентов примем критерий прочности Губера – Мизеса [15]

$$I_{<\sigma>}^{lv} = k_v \quad (v = 1, 2), \quad (3.56)$$

где $I_{<\sigma>}^{lv} = (\langle \sigma_{ij}^{lv} \rangle' \langle \sigma_{ij}^{lv} \rangle')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений $\langle \sigma_{ij}^{lv} \rangle'$ по неповрежденной части материала v -компонента; k_v – предел микропрочности компонента, являющийся случайной функцией координат. Так как средние по неповрежденной части материала v -компонента напряжения $\langle \sigma_{ij}^{lv} \rangle$ связаны со средними в компоненте напряжениями $\langle \sigma_{ij}^v \rangle$ зависимостями [35, 39]

$$\langle \sigma_{ij}^{lv} \rangle = \frac{1}{1-p_v} \langle \sigma_{ij}^v \rangle, \quad (3.57)$$

то инвариант девиатора тензора средних напряжений по неповрежденной части материала $I_{<\sigma>}^{lv}$ определяется через инвариант девиатора тензора средних в компоненте напряжений $I_{<\sigma>}^v = (\langle \sigma_{ij}^v \rangle' \langle \sigma_{ij}^v \rangle')^{1/2}$ выражением

$$I_{<\sigma>}^{lv} = \frac{1}{1-p_v} I_{<\sigma>}^v, \quad (3.58)$$

а через инвариант девиатора тензора средних деформаций в компонентах $I_{<\varepsilon>}^v = (\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle')^{1/2}$ выражением

$$I_{<\sigma>}^{lv} = \frac{2\mu_{vp}}{1-p_v} I_{<\varepsilon>}^v, \quad (3.59)$$

причем инварианты девиаторов средних деформаций в компонентах $I_{<\varepsilon>}^v$ определяются через инвариант $I_{<\varepsilon>} = (\langle \varepsilon_{ij} \rangle' \langle \varepsilon_{ij} \rangle')^{1/2}$ для всего композита соотношениями

$$I_{<\varepsilon>}^v = (-1)^{v+1} \frac{\mu^* - \mu_{(3-v)p}}{c_v(\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_{<\varepsilon>}. \quad (3.60)$$

Тогда с учетом соотношений (3.59), (3.60) критерий прочности (3.56) в пространстве макродеформаций принимает вид

$$(-1)^{v+1} \frac{2\mu_{vp}(\mu^* - \mu_{(3-v)p})}{c_v(1-p_v)(\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_{<\varepsilon>} = k_v \quad (v = 1, 2). \quad (3.61)$$

Если инвариант $I_{<\sigma>}^{lv}$ для некоторого микрообъема v -компонента не достигает соответствующего предельного значения k_v , то, согласно критерию длительной прочности, разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени τ_k^v , длительность которого зависит от степени близости $I_{<\sigma>}^{lv}$ к предельному значению k_v . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k^v = \varphi_v(I_{<\sigma>}^{lv}, k_v), \quad (3.62)$$

причем $\varphi_v(k_v, k_v) = 0$, $\varphi_v(0, k_v) = \infty$ согласно (3.56).

Простейшим заданием одноточечной функции распределения $F_v(k_v)$ предела микропрочности k_v неповрежденной части материала компонента является степенной закон на некотором отрезке

$$F_v(k_v) = \begin{cases} 0, & k_v < k_{v0}; \\ \left(\frac{k_v - k_{v0}}{k_{v1} - k_{v0}} \right)^{n_v}, & k_{v0} \leq k_v \leq k_{v1}; \\ 1, & k_v > k_{v1}, \end{cases} \quad (3.63)$$

а также распределение Вейбулла

$$F_v(k_v) = \begin{cases} 0, & k_v < k_{v0}; \\ 1 - \exp[-m_v (k_v - k_{v0})^{n_v}], & k_v \geq k_{v0}, \end{cases} \quad (3.64)$$

где k_{v0} – минимальное значение предела микропрочности компонента; k_{v1} , m_v , n_v – детерминированные постоянные, описывающие конкретный характер функции распределения, которые определяются путем аппроксимации экспериментальных кривых по разбросу микропрочности или диаграмм деформирования.

Случайное поле предела микропрочности компонента k_v является статистически однородным для реальных материалов. При этом его масштаб корреляции, а также размеры единичных микроповреждений и расстояния между ними принимаем пренебрежимо малыми по сравнению с макрообъемом материала. Тогда случайное поле k_v и распределение микронапряжений в материале компонента при однородном нагружении удовлетворяют свойству эргодичности, а функция распределения $F_v(k_v)$ определяет относительное содержание материала неразрушенной части компонента, в котором предел прочности меньше соответствующего значения k_v . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{ij}^{lv} \rangle$ функция $F_v(I_{<\sigma>}^{lv})$ согласно (3.56), (3.63), (3.64) определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета компонента. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, обозначая начальную пористость компонента p_{v0} , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов компонента или его пористости [55]

$$p_v = p_{v0} + (1 - p_{v0})F_v(I_{<\sigma>}^{lv}). \quad (3.65)$$

С учетом соотношений (3.59), (3.60) уравнение баланса пористости компонента (3.65) в пространстве макродеформаций принимает вид

$$p_v = p_{v0} + (1 - p_{v0})F_v \left[(-1)^{v+1} \frac{2\mu_{vp}(\mu^* - \mu_{(3-v)p})}{c_v(1-p_v)(\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_{<\varepsilon>} \right], \quad (3.66)$$

где эффективный модуль сдвига μ^* и модули сдвига компонентов μ_{1p} , μ_{2p} определяются формулами (3.49) – (3.53).

Если напряжения в v -компоненте $\langle \sigma_{ij}^v \rangle$ действуют в течение некоторого времени t , то, согласно критерию длительной прочности (3.62), за это время в v -компоненте разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k_v , для которых имеет место неравенство

$$t \geq \tau_k^v = \varphi_v(I_{<\sigma>}^{lv}, k_v), \quad (3.67)$$

где инвариант $I_{<\sigma>}^{lv}$ определяется выражениями (3.58) или (3.59).

Время τ_k^v хрупкого разрушения v -компонента для реальных материалов при невысоких температурах имеет конечное значение начиная только с некоторого значения $I_{<\sigma>}^{lv} > 0$. В этом случае функцию долговечности v -компонента $\phi_v(I_{<\sigma>}^{lv}, k_v)$ можно представить, например, дробно-степенной зависимостью [57]

$$\phi_v(I_{<\sigma>}^{lv}, k_v) = \tau_{0v} \left(\frac{k_v - I_{<\sigma>}^{lv}}{I_{<\sigma>}^{lv} - \gamma_v k_v} \right)^{n_{1v}} \quad (\gamma_v k_v \leq I_{<\sigma>}^{lv} \leq k_v, \gamma_v < 1), \quad (3.68)$$

где некоторое характерное время τ_{0v} , показатель n_{1v} и коэффициент γ_v определяются из аппроксимации экспериментальных кривых долговечности v -компонента.

Подставляя (3.68) в (3.67), приходим к неравенству

$$k_v \leq I_{<\sigma>}^{lv} \frac{1 + \bar{t}_v^{1/n_{1v}}}{1 + \gamma_v \bar{t}_v^{1/n_{1v}}} \quad \left(\bar{t}_v = \frac{t}{\tau_{0v}} \right). \quad (3.69)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_v(k_v)$, приходим к выводу, что функция $F_v[I_{<\sigma>}^{lv} \psi_v(\bar{t}_v)]$, где

$$\psi_v(\bar{t}_v) = \frac{1 + \bar{t}_v^{1/n_{1v}}}{1 + \gamma_v \bar{t}_v^{1/n_{1v}}}, \quad (3.70)$$

определяет в момент времени \bar{t}_v относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала v -компонента. Тогда с учетом (3.57) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для v -компонента при длительной повреждаемости можно представить в виде

$$p_v = p_{0v} + (1 - p_{0v}) F_v \left[\frac{I_{<\sigma>}^v \psi_v(\bar{t}_v)}{1 - p_v} \right], \quad (3.71)$$

где пористость v -компонента p_v является функцией безразмерного времени \bar{t}_v , а инвариант $I_{<\sigma>}^v$ определяется выражениями (3.58) – (3.60).

Если время τ_k^v хрупкого разрушения v -компонента имеет конечное значение для произвольных $I_{<\sigma>}^v$, что может наблюдаться при высоких температурах, то функцию долговечности можно представить экспоненциально-степенной зависимостью [57]

$$\phi_v(I_{<\sigma>}^v, k_v) = \tau_{0v} \left\{ \exp m_{1v} \left[\left(\frac{k_v}{I_{<\sigma>}^v} \right)^{n_{1v}} - 1 \right] - 1 \right\}^{n_{2v}}, \quad (3.72)$$

имеющей достаточное число постоянных τ_{0v} , m_{1v} , n_{1v} , n_{2v} для аппроксимации экспериментальных кривых. Подставляя (3.72) в (3.67), приходим к неравенству

$$k_v \leq I_{<\sigma>}^v \left[1 + \frac{1}{m_{1v}} \ln \left(1 + \bar{t}_v^{1/n_{2v}} \right) \right]^{1/n_{1v}} \quad \left(\bar{t}_v = \frac{t}{\tau_{0v}} \right). \quad (3.73)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_v(k_v)$, приходим к выводу, что функция $F_v[I_{<\sigma>}^v \psi_v(\bar{t}_v)]$, где

$$\psi_v(\bar{t}_v) = \left[1 + \frac{1}{m_{1v}} \ln \left(1 + \bar{t}_v^{1/n_{2v}} \right) \right]^{1/n_{1v}}, \quad (3.74)$$

определяет в момент времени \bar{t}_v относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала v -компонента. Тогда с учетом (3.57) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для v -компонента при длительной повреждаемости можно представить в виде (3.71), где пористость v -компонента p_v является функцией безразмерного времени \bar{t}_v , а инвариант $I_{<\sigma>}^v$ определяется выражениями (3.58) – (3.60).

Уравнения баланса пористости (3.71) с учетом (3.58) – (3.60), (3.70) (или (3.74)) в начальный момент $\bar{t}_v = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала v -компонента. С ростом времени уравнения (3.71), (3.58) – (3.60), (3.70) (или (3.74)) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной поврежденности и дополнительной, развивающейся во времени.

Уравнения (3.48), (3.49) – (3.55), (3.71), (3.58) – (3.60), (3.70) (или (3.74)) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и длительной повреждаемости зернистого композита. Физическая нелинейность его компонентов влияет на образование пористости в них при деформировании, изменение пористости компонентов в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита. Поэтому результирующая диаграмма деформирования зернистого композита обусловлена физической нелинейностью материала его компонентов и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости в них при физически нелинейном деформировании.

В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и длительной микроповреждаемости зернистого композита с линейно-упругими включениями и нелинейно деформирующейся матрицей при микроповреждениях в матрице, причем объемные деформации матрицы являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в ее микрообъеме имеют место соотношения

$$\langle \sigma_{rr}^2 \rangle = K_2 \langle \varepsilon_{rr}^2 \rangle; \quad \langle \sigma_{ij}^2 \rangle' = 2\mu_2(J_2) \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'. \quad (3.75)$$

Здесь модуль объемного сжатия K_2 не зависит от деформаций, а модуль сдвига $\mu_2(J_2)$ описывается функцией

$$\mu_2(J_2) = \begin{cases} \mu_{20}, & T_2 \leq T_{20}; \\ \mu_2' + \left(1 - \frac{\mu_2'}{\mu_{20}}\right) \frac{T_{20}}{2J_2}, & T_2 \geq T_{20}; \end{cases} \quad (3.76)$$

$$(J_2 = (\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle')^{1/2}; \quad T_2 = (\langle \sigma_{ij}^2 \rangle' \langle \sigma_{ij}^2 \rangle')^{1/2}; \quad T_{20} = \sigma_{20} \sqrt{2/3}, \quad (3.77)$$

где $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle', \langle \sigma_{ij}^2 \rangle'$ – девиаторы соответственно тензоров деформаций и напряжений в матрице; σ_{20} – предел пропорциональности на растяжение для нее, который принимаем независимым от координат; μ_{20}, μ_2' – постоянные материала матрицы).

Решение задачи о совместном физически нелинейном деформировании и длительной повреждаемости зернистого композита при заданных макродеформациях сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости зернистого материала с пористыми компонентами, зависящих от макродеформаций согласно итерационному алгоритму (3.49) – (3.55), и определению пористости из уравнений (3.71), (3.58) – (3.60), (3.70), (или (3.74)), что осуществляется при помощи алгоритма, построенного на основе метода секущих [4]. На основе изложенной теории исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и длительной микроповре-

ждаемости зернистого композита для распределения Вейбулла (3.64) при дробно-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (3.70), и экспоненциально-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (3.74). В качестве включений и матрицы были приняты, соответственно, линейно-упругие зерна с характеристиками [22] и объемным содержанием

$$K_1 = 38,89 \text{ ГПа}; \mu_1 = 29,17 \text{ ГПа}; c_1 = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0 \quad (3.78)$$

и матрица, которая имеет диаграмму линейного упрочнения (3.75) – (3.77) с постоянными [11, 22]

$$K_2 = 3,33 \text{ ГПа}; \mu_{20} = 1,11 \text{ ГПа}; \mu_2' = 0,331 \text{ ГПа} \quad (3.79)$$

и пределами пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение $\sigma_{2p} = \sqrt{\frac{3}{2}}k_{20}$, равными

$$\sigma_{20} = 0,003 \text{ ГПа}; \sigma_{2p} = 0,011 \text{ ГПа} \quad (3.80)$$

$$(p_{02} = 0; k_{02} / \mu_2 = 0,01; m_2 = 1000; \alpha_2 = 2; \gamma_2 = 0,05; n_{12} = 1). \quad (3.81)$$

В случае заданных макропараметров

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0 \quad (3.82)$$

согласно (3.48) макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ в композите связаны с макродеформацией $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{3K^* \mu^*}{K^* + \frac{1}{3} \mu^*} \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (3.83)$$

При этом в уравнении баланса пористости (3.66) принимается

$$I_{\langle \varepsilon \rangle} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3K^* \langle \varepsilon_{11} \rangle}{2(K^* + \frac{1}{3} \mu^*)}, \quad (3.84)$$

что эквивалентно выполнению условий (3.82).

На рис. 3.5 при различных значениях объемного содержания включений c_1 и дробно-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (3.70), сплошными линиями изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 для зернистого композитного материала с линейно упрочняющейся матрицей. На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости p_2 от \bar{t}_2 для зернистого композитного материала с линейной матрицей. Такие

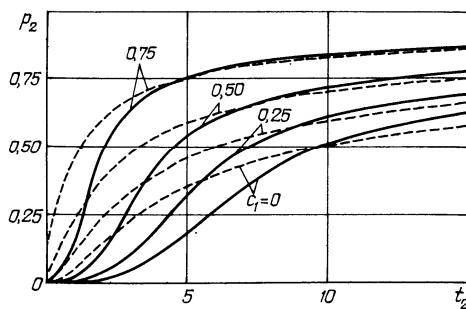


Рис. 3.5

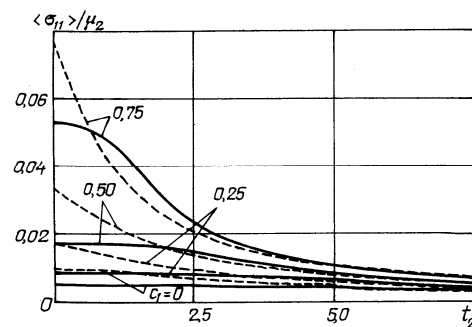


Рис. 3.6

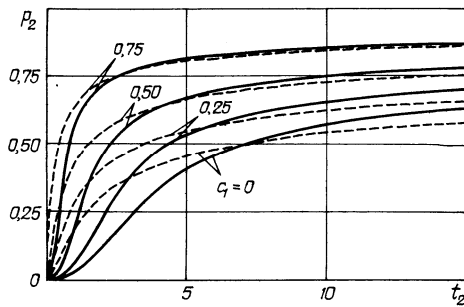


Рис. 3.7

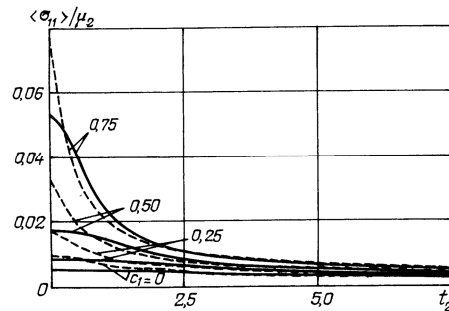


Рис. 3.8

же обозначения приняты и на рис. 3.6 – 3.8. Как видим, физическая нелинейность деформирования матрицы оказывает существенное влияние на микроразрушение зернистого композита. Графики показывают, что для композита с линейно упрочняющейся матрицей микроразрушения начинаются при больших значениях времени \bar{t}_2 , а в дальнейшем проходят более интенсивно, т.е. при достаточно больших значениях времени \bar{t}_2 пористость композитного материала с линейно упрочняющейся матрицей выше, чем с линейной.

На рис. 3.6 при различных значениях объемного содержания включений c_1 и дробно-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (3.70), изображены кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от времени \bar{t}_2 для зернистого композитного материала с линейно упрочняющейся и линейной матрицами. Графики показывают, что для малых значений времени \bar{t}_2 физическая нелинейность деформирования матрицы оказывает существенное влияние также и на напряженное состояние зернистого композитного материала. При достаточно больших значениях времени \bar{t}_2 влияние нелинейности матрицы на напряженное состояние композита несущественно.

На рис. 3.7, 3.8 при различных значениях объемного содержания включений c_1 и экспоненциально-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (3.74), изображены, соответственно, кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 и кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от времени \bar{t}_2 для зернистого композитного материала с линейно упрочняющейся и линейной матрицами. Как видим, характер кривых на этих рисунках качественно совпадает с характером соответствующих кривых при дробно-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (3.70).

3.3. Слоистый композитный материал. Физически нелинейное деформирование слоистого N -компонентного материала с изотропными компонентами описывается зависимостью объемного модуля K_v и модуля сдвига μ_v ($v = 1, 2, \dots, N$) компонентов от деформаций. Предположим, что в процессе нагружения в компонентах материала происходят микрповреждения. Повреждаемость компонента моделируем образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности компонента. Для элементарного макрообъема слоистого материала имеют место зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (\lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle) \delta_{ij};$$

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2), \quad (3.85)$$

где $\lambda_{11}^*, \lambda_{12}^*, \lambda_{13}^*, \lambda_{33}^*, \lambda_{44}^*$ – эффективные модули упругости, являющиеся функциями макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ вследствие физической нелинейности и микроповреждаемости.

Обозначим объемный модуль и модуль сдвига материала каркаса ν -компонента K_ν, μ_ν , его пористость p_ν , а объемное содержание пористого ν -компонента c_ν ($\nu = 1, \dots, N$). Тогда определение эффективных модулей упругости физически нелинейного слоистого материала с пористыми компонентами сводится к следующему алгоритму. Эффективные модули упругости композита $\lambda_{11}^*, \lambda_{12}^*, \lambda_{13}^*, \lambda_{33}^*, \lambda_{44}^*$ определяются [11, 36, 37, 39] через соответствующие модули компонентов $\lambda_{\nu p}, \mu_{\nu p}$ ($\nu = 1, 2, \dots, N$) формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^2 + 4 \left\langle \frac{\mu_p (\lambda_p + \mu_p)}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle; \\ \lambda_{12}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\lambda_p \mu_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle; \quad \lambda_{44}^* = \left\langle \frac{1}{\mu_p} \right\rangle^{-1}; \\ \lambda_{13}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle; \quad \lambda_{33}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

где для произвольной функции f принято обозначение

$$\langle f_p \rangle = \sum_{\nu=1}^N c_\nu f_{\nu p}. \quad (3.87)$$

Эффективные модули пористого ν -компонента $K_{\nu p}, \lambda_{\nu p}, \mu_{\nu p}$ ($\lambda_{\nu p} = K_{\nu p} - 2\mu_{\nu p} / 3$) ($\nu = 1, \dots, N$), согласно [11, 35] определяются формулами (3.53). Для определения средних деформаций по неповрежденной части ν -компонента $\langle \varepsilon_{ij}^{lv} \rangle$, входящих в эти формулы, используется следующий итерационный алгоритм. В $(n+1)$ -ом приближении они связаны с соответствующими величинами в n -ом приближении зависимостями (3.54) при ($\nu = 1, \dots, N$). Средние по компонентам деформации $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle &= \dots = \langle \varepsilon_{ij}^N \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{i3}^v \rangle = \frac{1}{\mu_{\nu p}} \left\langle \frac{1}{\mu_p} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle; \\ \langle \varepsilon_{33}^v \rangle &= \frac{1}{\lambda_{\nu p} + 2\mu_{\nu p}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left[\left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle - \lambda_{\nu p} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \right] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$(i, j = 1, 2; \nu = 1, \dots, N).$$

Нулевое приближение соответствует случаю физически линейных компонентов.

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала компонентов примем критерий проч-

ности Губера – Мизеса (3.56) при $(\nu = 1, \dots, N)$. Если инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}^{lv}$ для некоторого микрообъема ν -компонента не достигает соответствующего предельного значения k_ν , то, согласно критерию длительной прочности, разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени τ_k^ν , длительность которого зависит от степени близости $I_{\langle \sigma \rangle}^{lv}$ к предельному значению k_ν . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции (3.62). Одноточечную функцию распределения $F_\nu(k_\nu)$ предела микропрочности k_ν неповрежденной части материала ν -компонента можно принять в виде степенного закона на некотором отрезке (3.63) или распределения Вейбулла (3.64).

Случайное поле предела микропрочности компонента k_ν является статистически однородным для реальных материалов. При этом его масштаб корреляции, а также размеры единичных микроповреждений и расстояния между ними принимаем пренебрежимо малыми по сравнению с макрообъемом материала. Тогда случайное поле k_ν и распределение микронапряжений в материале компонента при однородном нагружении удовлетворяют свойству эргодичности, а функция распределения $F_\nu(k_\nu)$ определяет относительное содержание материала неразрушенной части компонента, в котором предел прочности меньше соответствующего значения k_ν . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{ij}^{lv} \rangle$ функция $F_\nu(I_{\langle \sigma \rangle}^{lv})$ согласно (3.56), (3.63), (3.64) определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета компонента. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, обозначая начальную пористость компонента $p_{\nu 0}$, можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов компонента или его пористости в виде (3.65) $(\nu = 1, \dots, N)$, где при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ средние в ν -компоненте напряжения $\langle \sigma_{ij}^\nu \rangle$ связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ зависимостями [11, 36, 37, 39]

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^1 \rangle = \dots = \langle \sigma_{ij}^N \rangle &= 2\mu_{\nu p} \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{\lambda_{\nu p}}{\lambda_{\nu p} + 2\mu_{\nu p}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \times \\ &\times \left[\left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle + 2\mu_{\nu p} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right] \delta_{ij}; \\ \langle \sigma_{33}^1 \rangle = \dots = \langle \sigma_{33}^N \rangle &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left(\left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right); \\ \langle \sigma_{i3}^1 \rangle = \dots = \langle \sigma_{i3}^N \rangle &= 2 \left\langle \frac{1}{\mu_p} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Если напряжения в ν -компоненте $\langle \sigma_{ij}^\nu \rangle$ действуют в течение некоторого времени t , то, согласно критерию длительной прочности (3.62), за это время в ν -компоненте разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k_ν , для которых имеет место неравенство (3.67), где инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}^{lv}$ определяется выражением (3.89).

Время τ_k^v хрупкого разрушения v -компонента для реальных материалов при высоких температурах имеет конечное значение начиная только с некоторого значения $I_{<\sigma>}^{lv} > 0$. В этом случае функцию долговечности v -компонента $\phi_v(I_{<\sigma>}^{lv}, k_v)$ можно представить, например, дробно-степенной зависимостью (3.68). Если же время τ_k^v хрупкого разрушения v -компонента имеет конечное значение для произвольных $I_{<\sigma>}^{lv}$, что может наблюдаться при высоких температурах, то функцию долговечности можно представить экспоненциально-степенной зависимостью (3.72). Подставляя (3.68) или (3.72) в (3.67) и принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_v(k_v)$, приходим к выводу, что функция $F_v[I_{<\sigma>}^{lv} \psi_v(\bar{t}_v)]$, где функция $\psi_v(\bar{t}_v)$ определяется, соответственно, выражениями (3.70) или (3.74), определяет в момент времени \bar{t}_v относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала v -компонента. Тогда с учетом (3.57) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для v -компонента при длительной повреждаемости можно представить в виде (3.71) ($v = 1, \dots, N$), где пористость v -компонента p_v является функцией безразмерного времени \bar{t}_v , а средние в i -компоненте напряжения $\langle \sigma_{jk}^v \rangle$ определяются выражениями (3.89).

Уравнения баланса пористости (3.71) с учетом (3.89), (3.70) (или (3.74)) в начальный момент $\bar{t}_v = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала v -компонента. С ростом времени уравнения (3.71), (3.89), (3.70) (или (3.74)) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной поврежденности и дополнительной, развивающейся во времени.

Уравнения (3.48) – (3.54), (3.71), (3.89), (3.70) (или (3.74)) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и длительной повреждаемости слоистого материала. Физическая нелинейность его компонентов влияет на образование пористости в них при деформировании, изменение пористости компонентов в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита. Поэтому результирующая диаграмма деформирования слоистого материала обусловлена физической нелинейностью материала его компонентов и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости в них при физически нелинейном деформировании.

В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и длительной микроповреждаемости двухкомпонентного слоистого материала с линейно-упругим жестким слоем и нелинейно деформирующимся связующим при микроповреждениях в связующем, причем объемные деформации связующего являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в его микрообъеме имеют место соотношения (3.75) – (3.77). На основе соотношений (3.48) – (3.54), (3.71), (3.89), (3.70) (или (3.74)) при помощи метода секущих [4] можно построить итерационный алгоритм для определения объемного содержания микроповреждений в компонентах (слоях) и напряженно-деформированного состояния физически нелинейного слоистого материала. На основе проведенных вычислений получены диаграммы макродеформирования двухкомпонентного слоистого композитного материала при микроповреждениях в наполнителе для распределения Вейбулла (3.64) и для дробно-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (3.70). В качестве жесткого слоя и связующего приняты, соответственно, линейно-упругие слои с характеристиками и объемным содержанием (3.78) и связующее, которое имеет диаграмму линейного упрочнения (3.75) – (3.77) с постоянными (3.79) и пределами пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение (3.80), (3.81).

В случае заданных макропараметров

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0; \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = 0 \quad (3.90)$$

согласно (3.85) макронапряжение $\langle \sigma_{33} \rangle$ в композите связано с макродеформацией $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \frac{1}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} [(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2] \langle \varepsilon_{33} \rangle. \quad (3.91)$$

При этом в уравнении баланса пористости, которое записывается в виде (3.71), (3.89), (3.70), имеют место равенства

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle = -\frac{\lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad (3.92)$$

что эквивалентно условию (3.90).

Расчеты показывают, что физическая нелинейность деформирования связующего оказывает существенное влияние на микроразрушение слоистого материала. Для материала с линейно упрочняющимся связующим микроразрушения начинаются при больших значениях времени \bar{t}_2 , а в дальнейшем проходят более интенсивно, т.е. при достаточно больших значениях времени \bar{t}_2 пористость композитного материала с линейно упрочняющимся связующим выше, чем с линейным.

Для малых значений времени \bar{t}_2 физическая нелинейность деформирования связующего оказывает существенное влияние также и на напряженное состояние слоистого материала. При достаточно больших значениях времени \bar{t}_2 влияние нелинейности связующего на напряженное состояние материала несущественно.

3.4. Волокнистый композитный материал. Рассмотрим нелинейное деформирование однонаправленного волокнистого материала с трансверсально-изотропными волокнами и изотропной матрицей, обусловленное физически нелинейным деформированием матрицы и накоплением в ней микроповреждений. Физически нелинейное деформирование волокнистого композита описывается зависимостью объемного модуля K_2 и модуля сдвига μ_2 его матрицы от деформаций. Поскольку в процессе нагружения в матрице происходят микроповреждения, ее повреждаемость моделируем образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности матрицы. Для элементарного макрообъема волокнистого материала имеют место зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ (3.85), где λ_{11}^* , λ_{12}^* , λ_{13}^* , λ_{33}^* , λ_{44}^* – эффективные модули упругости композита, являющиеся функциями макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ вследствие физической нелинейности и микроповреждаемости матрицы.

Трансверсально-изотропные волокна принимаем направленными по нормали к плоскости изотропии x_1x_2 . Обозначим модули упругости волокон λ_{11}^1 , λ_{12}^1 , λ_{13}^1 , λ_{33}^1 , λ_{44}^1 , объемный модуль и модуль сдвига материала каркаса матрицы K_2 , μ_2 , ее пористость p_2 , а объемные содержания волокон и пористой матрицы, соответственно, c_1 и c_2 . Тогда определение эффективных модулей упругости физически нелинейного волокнистого композита с пористой матрицей сводится к следующему алгоритму. Эффективные модули упругости композита λ_{11}^* , λ_{12}^* , λ_{13}^* , λ_{33}^* , λ_{44}^* определяются [11, 36, 37, 39] через соответствующие модули волокон λ_{11}^1 , λ_{12}^1 , λ_{13}^1 , λ_{33}^1 , λ_{44}^1 и пористой матрицы λ_{2p} , μ_{2p} ($\lambda_{2p} = K_{2p} - 2\mu_{2p}/3$) формулами

$$\begin{aligned}
\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* &= c_1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2(\lambda_{2p} + \mu_{2p}) - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p} - 2\mu_{2p})^2}{2c_1(\lambda_{2p} + \mu_{2p}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m}; \\
\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^* &= c_1(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2\mu_{2p} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p})^2}{2c_1\mu_{2p} + c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + \frac{2mn}{n+2m}}; \\
\lambda_{13}^{*(n)} &= c_1\lambda_{13}^1 + c_2\lambda_{2p}^{(n)} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)}) (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})}{2c_1(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m^{(n)}}; \\
\lambda_{33}^* &= c_1\lambda_{33}^1 + c_2(\lambda_{2p} + 2\mu_{2p}) - \frac{2c_1 c_2 (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})^2}{2c_1(\lambda_{2p} + \mu_{2p}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m}; \\
\lambda_{44}^* &= c_1\lambda_{44}^1 + c_2\mu_{2p} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{44}^1 - \mu_{2p})^2}{c_1\mu_{2p} + c_2\lambda_{44}^1 + s}
\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$(2m = c_1(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2\mu_{2p}; \quad 2n = c_1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2(\lambda_{2p} + \mu_{2p}); \quad s = c_1\lambda_{44}^1 + c_2\mu_{2p}), \tag{3.94}$$

если жесткость матрицы больше жесткости волокон, и

$$2m = \left(\frac{c_1}{\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2\mu_{2p}} \right)^{-1}; \quad 2n = \left(\frac{c_1}{\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2(\lambda_{2p} + \mu_{2p})} \right)^{-1}; \quad s = \left(\frac{c_1}{\lambda_{44}^1} + \frac{c_2}{\mu_{2p}} \right)^{-1}, \tag{3.95}$$

если жесткость волокон больше жесткости матрицы).

Эффективные модули пористой матрицы $K_{2p}, \lambda_{2p}, \mu_{2p}$ ($\lambda_{2p} = K_{2p} - 2\mu_{2p}/3$) согласно [35] определяются формулами (3.53) при $\nu = 2$. Для определения средних деформаций по неповрежденной части матрицы $\langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle$, входящих в эти формулы, используется следующий итерационный алгоритм. В $(n+1)$ -ом приближении они связаны с соответствующими величинами в n -ом приближении зависимостями (3.54) при $\nu = 2$. Средние в матрице деформации $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle &= \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^* - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1}{c_2(2\mu_{2p} - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1)} \langle \varepsilon_{ij} \rangle - \\
&- \frac{1}{\Delta_2} \{ [(\lambda_{11}^* - \lambda_{11}^1)a_1 - (\lambda_{12}^* - \lambda_{12}^1)a_2 - (\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)a_3] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \\
&+ [(\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)(a_1 - a_2) - (\lambda_{33}^* - \lambda_{33}^1)a_3] \langle \varepsilon_{33} \rangle \} \delta_{ij}; \\
\langle \varepsilon_{33}^2 \rangle &= -\frac{1}{\Delta_2^{(n)}} \{ [(\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)a_4 - (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* - \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1)a_3] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \\
&+ [(\lambda_{33}^* - \lambda_{33}^1)a_4 - 2(\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)a_3] \langle \varepsilon_{rr} \rangle \}; \\
\langle \varepsilon_{i3}^2 \rangle &= \frac{\lambda_{44}^{*(n)} - \lambda_{44}^1}{c_2(\mu_{2p} - \lambda_{44}^1)} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2);
\end{aligned} \tag{3.96}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_2 = c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}) [(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p}) - 2(\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})^2]); \\
a_1 = (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})^2 - (\lambda_{12}^1 - \lambda_{2p})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p}); \\
a_2 = (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})^2 - (\lambda_{11}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p}); \\
a_3 = (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}); \\
a_4 = (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}), \quad (3.97)
\end{aligned}$$

а эффективные коэффициенты пористой матрицы K_{2p} , λ_{2p} , μ_{2p} определяются формулами (3.53)).

Нулевое приближение соответствует случаю физически линейной матрицы.

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части матрицы примем критерий прочности Губера – Мизеса (3.56) при $\nu = 2$. Если инвариант $I_{<\sigma>}^{12}$ для некоторого микрообъема матрицы не достигает соответствующего предельного значения k_2 , то, согласно критерию длительной прочности, разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени τ_k^2 , длительность которого зависит от степени близости $I_{<\sigma>}^{12}$ к предельному значению k_2 . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции (3.62). Одноточечную функцию распределения $F_2(k_2)$ предела микропрочности k_2 неповрежденной части матрицы можно принять в виде степенного закона на некотором отрезке (3.63) или распределения Вейбулла (3.64).

Случайное поле предела микропрочности матрицы k_2 является статистически однородным для реальных материалов. При этом его масштаб корреляции, а также размеры единичных микроповреждений и расстояния между ними принимаем пренебрежимо малыми по сравнению с макрообъемом материала. Тогда случайное поле k_2 и распределение микронапряжений в матрице при однородном нагружении удовлетворяют свойству эргодичности, а функция распределения $F_2(k_2)$ определяет относительное содержание материала неразрушенной части матрицы, в котором предел прочности меньше соответствующего значения k_2 . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle$ функция $F_2(I_{<\sigma>}^{12})$ согласно (3.56), (3.63), (3.64) определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета матрицы. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, обозначая начальную пористость матрицы p_{20} , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов матрицы или ее пористости в виде (3.65) при $\nu = 2$, где при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ средние в неразрушенной части матрицы напряжения $\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle$ связаны со средними в матрице напряжениями $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle$ зависимостями (3.57) при $\nu = 2$, средние в матрице напряжения $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle$ связаны со средними в ней деформациями $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle$ зависимостями

$$\langle \sigma_{ij}^2 \rangle = \lambda_{2p} \langle \varepsilon_{rr}^2 \rangle + \delta_{ij} + 2\mu_{2p} \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle, \quad (3.98)$$

а средние в матрице деформации $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle$ связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ зависимостями (3.96), (3.97), причем эффективные модули пористой матрицы λ_{2p} , μ_{2p} определяются формулами (3.53) при $\nu = 2$.

Если напряжения в матрице $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle$ действуют в течение некоторого времени t , то, согласно критерию длительной прочности (3.62), за это время в матрице разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k_2 , для которых имеет место неравенство (3.67), где инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}^{12}$ определяется выражениями (3.96), (3.97).

Время τ_k^2 хрупкого разрушения матрицы для реальных материалов при невысоких температурах имеет конечное значение, начиная только с некоторого значения $I_{\langle \sigma \rangle}^{12} > 0$. В этом случае функцию долговечности матрицы $\varphi_2(I_{\langle \sigma \rangle}^{12}, k_2)$ можно представить, например, дробно-степенной зависимостью (3.68). Если же время τ_k^2 хрупкого разрушения матрицы имеет конечное значение для произвольных $I_{\langle \sigma \rangle}^{12}$, что может наблюдаться при высоких температурах, то функцию долговечности можно представить экспоненциально-степенной зависимостью (3.72). Подставляя (3.68) или (3.72) в (3.67) и принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_2(k_2)$, приходим к выводу, что функция $F_2[I_{\langle \sigma \rangle}^{12}, \psi_2(\bar{t}_2)]$, где функция $\psi_2(\bar{t}_2)$ имеет, соответственно, вид (3.70) или (3.74), определяет в момент времени \bar{t}_2 относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части матрицы. Тогда с учетом (3.57) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для матрицы при длительной повреждаемости можно представить в виде (3.71) при $\nu = 2$, где пористость матрицы p_2 является функцией безразмерного времени \bar{t}_2 , а средние в ней напряжения $\langle \sigma_{jk}^2 \rangle$ определяются выражениями (3.96), (3.97).

Уравнения баланса пористости (3.71) с учетом (3.96), (3.97), (3.70) (или (3.74)) в начальный момент $\bar{t}_2 = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала матрицы. С ростом времени уравнения (3.71), (3.96), (3.97), (3.70) (или (3.74)) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной поврежденности и дополнительной, развивающейся во времени.

Уравнения (3.48), (3.93) – (3.95), (3.71), (3.96), (3.97) (3.70) (или (3.74)) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и длительной повреждаемости волокнистого материала. Физическая нелинейность его матрицы влияет на образование пористости в ней при деформировании, изменение пористости матрицы в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита. Поэтому результирующая диаграмма деформирования волокнистого материала обусловлена физической нелинейностью материала его матрицы и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости в них при физически нелинейном ее деформировании.

В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и длительной микроповреждаемости волокнистого материала с линейно-упругими волокнами и нелинейно деформирующейся матрицей при микроповреждениях в ней, причем объемные деформации матрицы являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в ее микрообъеме имеют место соотношения (3.75) – (3.77). На основе соотношений (3.48), (3.93) – (3.95), (3.71), (3.96), (3.97), (3.70) (или (3.74)) при помощи метода секущих [4] можно построить итерационный алгоритм для определения объемного содержания микроповреждений в матрице и напряженно-деформированного состояния физически нелинейного волокнистого материала. На основе проведенных вычислений получены диаграммы макродеформирования волокнистого композитного материала при микроповреждениях в матрице для распределения Вейбулла (3.64) и для дробно-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (3.70). В качестве компонентов приняты, соответственно, эпоксидная матрица, которая имеет диаграмму линейного упрочнения (3.75) – (3.77) с постоянными (3.79) и пределами пропорцио-

нальности и минимальной микропрочности на растяжение (3.80), (3.81) и высококомодульные углеродные волокна с характеристиками [22]

$$E_1^1 = 8 \text{ ГПа}; \quad \text{ГПа}; \quad \nu_{12}^1 = 0,2; \quad \nu_{13}^1 = 0,3; \quad G_{12}^1 = 60 \text{ ГПа}, \quad (3.99)$$

где E_1^1 и E_3^1 , ν_{12}^1 и ν_{13}^1 , G_{12}^1 и G_{13}^1 – соответственно, поперечный и продольный модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модули сдвига волокон, которые связаны с модулями упругости $\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1$ формулами

$$\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 = E_1^1 E_3^1 \left[E_3^1 \left(2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right) - 2E_1^1 (\nu_{13}^1)^2 \right]^{-1}; \quad \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 = 2G_{12}^1;$$

$$\lambda_{13}^1 = \nu_{13}^1 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1); \quad \lambda_{33}^1 = (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) \frac{E_3^1}{E_1^1} \left(2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right); \quad \lambda_{44}^1 = G_{13}^1. \quad (3.100)$$

В случае заданных макропараметров

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0 \quad (3.101)$$

согласно (3.85) макронапряжение $\langle \sigma_{11} \rangle$ в композите связаны с макродеформацией $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} [(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2] \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (3.102)$$

При этом в уравнении баланса пористости, которое записывается в виде (3.71), (3.96), (3.97), (3.70), принимается

$$\langle \varepsilon_{22} \rangle = \frac{(\lambda_{13}^*)^2 - \lambda_{12}^* \lambda_{33}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \langle \varepsilon_{11} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{33} \rangle = \frac{(\lambda_{12}^* - \lambda_{11}^*) \lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \langle \varepsilon_{11} \rangle, \quad (3.103)$$

что эквивалентно выполнению условий (3.101).

Расчеты показывают, что физическая нелинейность деформирования матрицы оказывает существенное влияние на микроразрушение волокнистого композита. Для материала с линейно упрочняющейся матрицей микроразрушения начинаются при больших значениях времени \bar{t}_2 , а в дальнейшем проходят более интенсивно, т.е. при достаточно больших значениях времени \bar{t}_2 пористость композитного материала с линейно упрочняющейся матрицей выше, чем с линейной.

Для малых значений времени \bar{t}_2 физическая нелинейность деформирования матрицы оказывает существенное влияние также и на напряженное состояние волокнистого композита. При достаточно больших значениях времени \bar{t}_2 влияние нелинейности матрицы на напряженное состояние материала несущественно.

Заключение.

На основе стохастических уравнений упругости пористой среды, материал каркаса которой следует физически нелинейному закону, построена математическая теория связанных процессов деформирования и повреждаемости физически нелинейного материала. Процесс повреждаемости материала моделируется разрушением рассеянных микрообъемов и образованием на их месте стохастически расположенных микропор. Микроразрушение единичного микрообъема характеризуется его кратковременной прочностью согласно критерию Губера – Мизеса или длительной прочностью, описываемой дробно-степенной или экспоненциально-степенной функцией долговечности, определяемой зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости

сти эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Губера – Мизеса. Предел кратковременной микропрочности принимается случайной функцией координат, одноточечное распределение которой описывается степенной функцией на некотором отрезке или распределением Вейбулла. Эффективные деформативные свойства и напряженно-деформированное состояние физически нелинейного материала с системой стохастически расположенных микроповреждений определяются на основе стохастических уравнений упругости физически нелинейных пористых сред. Исходя из свойств функций распределения и условия эргодичности случайного поля кратковременной микропрочности, а также зависимости времени хрупкого разрушения микрообъема от его напряженного состояния и кратковременной микропрочности, сформулированы для произвольного момента времени уравнения баланса поврежденности (пористости) материала. Зависимости макронапряжения – макродеформации для пористого физически нелинейного материала и уравнения баланса его пористости образуют замкнутую систему, описывающую совместный процесс физически нелинейного деформирования и микроповреждаемости. На основе метода итераций построены алгоритмы вычисления зависимостей макронапряжений и микроповреждаемости материала от заданных макродеформаций, макронапряжений и микроповреждаемости материала от времени, а также получены соответствующие кривые. Исследовано влияние нелинейности на деформирование и микроповреждаемость материалов.

Р Е З Ю М Е . Систематизовано дослідження по теорії деформування та короткочасної і довготривалої пошкоджуваності фізично нелінійних однорідних і композитних матеріалів. При короткочасній пошкоджуваності одиначне мікропошкодження моделюється утворенням порожньої квазісферичної пори на місці мікрооб'єму, що руйнується за критерієм Губера – Мизеса. Границя мікроміцності приймається випадковою функцією координат. При довготривалій пошкоджуваності критерій руйнування одиначного мікрооб'єму характеризується його довготривалою міцністю, обумовленою залежністю часу крихкого руйнування від ступеня близькості еквівалентного напруження до його граничного значення, що характеризує короткочасну міцність. Для довільного моменту часу сформульовано рівняння балансу пористості нелінійного матеріалу, що сумісно з рівняннями зв'язку макронапружень і макродеформацій утворює замкнуту систему. Побудовано алгоритми обчислення залежностей макронапружень і мікропошкоджуваності матеріалу від макродеформацій та часу, а також досліджено вплив нелінійності на відповідні криві.

1. *Алексеев Л.А., Светашков А.А.* К теории деформирования наполненных эластомеров, учитывающей микроструктурные повреждения // *Механика деформируемого твердого тела / НИИ прикл. математики и механики.* – Томск, 1990. – С. 10 – 20.
2. *Антухов В.Н., Белоусов В.Л.* Модель анизотропной поврежденности тел. Сообщение 1. Общие соотношения // *Пробл. прочности.* – 1994. – № 2. – С. 28 – 34.
3. *Афанасьев Н.Н.* Статистическая теория усталостной прочности металлов. – К.: Изд-во АН УССР, 1953. – 128 с.
4. *Березикович Я.С.* Приближенные вычисления. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 462 с.
5. *Вакуленко А.А., Качанов Л.М.* Континуальная теория среды с трещинами // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1971. – № 4. – С.159 – 166.
6. *Ванин Г.А.* Микромеханика композиционных материалов. – К.: Наук. думка, 1985. – 302с.
7. *Волков С.Д.* Статистическая теория прочности. – М.; Свердловск: Гос. науч.-техн. изд-во машиностроит. лит., 1960. – 176 с.
8. *Голуб В.П.* Нелинейная механика поврежденности и ее приложения // *Трещиностойкость материалов и элементов конструкций.* – К.: Наук. думка, 1980. – С. 19 – 20.
9. *Голуб В.П.* Нелинейные модели накопления повреждений в условиях ползучести // *Пробл. машиностроения и автоматизации.* – 1992. – № 1. – С. 51 – 58.
10. *Голуб В.П.* Определяющие уравнения в нелинейной механике поврежденности // *Прикл. механика.* – 1993. – № 10. – С. 37 – 49.
11. *Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др.* Механика материалов. – К.: Наук. думка, 1982. – 368 с. – (Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т.1).
12. *Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Михайлова М.И., Бабич Д.В., Шикун Е.Н.* Прикладные исследования. – К.: «А.С.К.», 2003. – 398 с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т. 12).
13. *Давиденков Н.Н.* Усталость металлов. – К.: Изд-во АН УССР, 1947. – 241 с.
14. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с.

15. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
16. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение / Перевод с англ. – М.: Мир, 1984. – 624 с.
17. Когаев В.П. Сопrotивление усталости в связи с концентрацией напряжений и абсолютными размерами // Некоторые вопросы усталостной прочности. – М.: Машгиз, 1955. – 328 с.
18. Кондауров В.И. О моделировании процессов накопления поврежденности и динамическом разрушении твердых тел // Исследование свойств вещества в экстремальных условиях. – М., 1990. – С. 145 – 152.
19. Конторова Т.А., Тимошенко О.А. Обобщение статистической теории прочности на случай неоднородного напряженного состояния // Журнал техн. физики. – 1949. – 19, № 3. – С. 119 – 121.
20. Конторова Т.А., Френкель Я.И. Статистическая теория хрупкой прочности реальных кристаллов // Журнал техн. физики. – 1941. – 11, № 3. – С. 173 – 183.
21. Копьев И.М., Овчинский А.С. Разрушение металлов, армированных волокнами. – М.: Наука, 1977. – 240 с.
22. Крегерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. – С. 433 – 441.
23. Лурье С.А. Об одной энтропийной модели накопления повреждений в композите // Механика неоднородных структур: Тез. докл. 3 Всесоюз. конф., Ч. 2. Львов, 17 – 19 сентября, 1991. – Львов, 1991. – С. 198.
24. Лурье С.А., Криволицкая И.И., Введенский А.Р. Об одной микромеханической энтропийной модели накопления рассеянных повреждений в композиционных материалах // Технол.: Сер. Конструкции из композиц. материалов. – 1995. – № 1. – С. 5 – 12.
25. Переверзев Е.С. Модели накопления повреждений в задачах долговечности. – К.: Наук. думка, 1995. – 358 с.
26. Работнов Ю.М. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
27. Ржаницин А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М.: Стройиздат, 1978. – 239 с.
28. Салганик Р.Д. Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 149 – 158.
29. Седракян Л.Г. К статистической теории прочности. – Ереван: Изд-во АРМ. Ин-та стройматериалов и сооружений, 1958. – 142 с.
30. Серенсен С.В. Усталость металлов. – М.: Изд-во ВНИИТМАШ, 1949. – 216 с.
31. Снитко Н.К. О теории прочности металлов с учетом структуры // Журнал техн. физики. – 1948. – 18, № 6. – С. 857 – 864.
32. Тамуж В.П. Расчет констант материала с повреждениями // Механика полимеров. – 1977. – № 5. – С. 838 – 845.
33. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
34. Фридман Я.Б. Единая теория прочности металлов. – М.: Оборонгиз, 1952. – 235 с.
35. Хорошун Л.П. К теории насыщенных пористых сред // Прикл. механика. – 1976. – 12, № 12. – С. 35 – 41.
36. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микроненородных сред // Прикл. механика. – 1978. – 14, № 2. – С. 3 – 17.
37. Хорошун Л.П. Метод условных моментов в задачах механики композитных материалов // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 10. – С. 100 – 108.
38. Хорошун Л.П. К теории термомеханики пористых насыщенных сред // Прикл. механика. – 1988. – 24, № 4. – С. 3 – 13.
39. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикла Е.Н., Назаренко Л.В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – К.: Наук.думка, 1993. – 389 с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т.3).
40. Хорошун Л.П., Шикла Е.Н. Деформирование зернистых композитов при микроразрушениях // Mechanical systems. – Thesis of conference reports. Int. Conf. «Dynamics systems modeling and stability investigation». – May, 25 – 29, 1999. – Kyiv, 1999. – P. 79.
41. Хорошун Л.П., Шикла Е.Н. Влияние температуры на микроповреждаемость зернистого материала // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2001. – № 5. – С. 382 – 387.
42. Хорошун Л.П., Шикла Е.Н. Кратковременная микроповреждаемость зернистых композитов при температурных воздействиях // Modeling and investigation in mechanics: Thesis of conference reports. Int. Conf. «Dynamics systems modeling and stability investigation». – May, 22 – 25, 2001. – Kyiv, 2001. – P. 335.
43. Хорошун Л.П., Шикла Е.Н. Нелинейные деформативные свойства дисперсно-упрочненных материалов // Механика композитных материалов. – 2002. – 38, № 4. – С. 473 – 486.
44. Хорошун Л.П., Шикла Е.Н. Влияние температуры на кратковременную микроповреждаемость слоистых материалов // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – № 37. – С. 50 – 58.

45. *Хорошун Л.П., Шикула Е.Н.* Связанные процессы деформирования и микроповреждаемости физически нелинейных материалов // Modeling and investigation in mechanics: Thesis of conference reports. Int. Conf. «Dynamics systems modeling and stability investigation». – May, 27 – 30, 2003. – Kyiv, 2003. – P. 370.
46. *Хорошун Л.П., Шикула Е.Н.* Структурная теория кратковременной микроповреждаемости физически нелинейных композитных материалов // Modeling and investigation of mechanical systems: Thesis of conference reports. Int. Conf. «Dynamics systems modeling and stability investigation». – May, 23 – 25, 2005. – Kyiv, 2005. – P. 346.
47. *Чечулин Б.Б.* К статистической теории хрупкой прочности структуры // Журнал техн. физики. – 1954. – **24**, № 2. – С. 45 – 48.
48. *Шевандин Е.М., Разов И.А., Решетникова Р.Е., Серпеников Б.Н.* О природе масштабного эффекта при разрушении металлов // Докл. АН СССР. – 1957. – **113**, № 5. – С. 1057 – 1060.
49. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
50. *Шикула Е.Н.* Влияние закона распределения прочности компонентов на деформирование зернистого композита при микроразрушениях // Доп. НАН України. – 1998. – № 4. – С. 88 – 93.
51. *Шикула Е.Н.* Зависимость деформативных свойств слоистого композита от закона распределения прочности компонентов // Доп. НАН України. – 1998. – № 5. – С. 70 – 74.
52. *Baste S., Audoin B.* On Internal Variables in Anisotropic Damage // European. J. Mech. A/Solids. – 1991. – **10**, N 6. – P. 587 – 606.
53. *Chandranth S., Pandey P.C.* An Isotropic Damage Model for Ductile Material // Eng. Fract. Mater. – 1995. – **50**, N 4. – P. 457 – 465.
54. *Guz A.N.* On One Two-Level Model in the Mesomechanics of Cracked Composites // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, N 3. – P. 274 – 285.
55. *Khoroshun L.P.* Principles of the Micromechanics of Material Damage. 1. Short-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 10. – P. 1035 – 1041.
56. *Khoroshun L.P.* Micromechanics of Short-Term Thermal Microdamageability // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 9. – P. 1158 – 1165.
57. *Khoroshun L.P.* Principles of the Micromechanics of Material Damage. 2. Long-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 2. – P. 127 – 135.
58. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Effect of the Strength Scatter of the Components on the Deformation of a Particulate Composites with Microcracks // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 8. – P. 626 – 631.
59. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Effect of the Spread of the Strength of the Components on the Deformation of a Laminar Composite with Microfailures // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 9. – P. 679 – 684.
60. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Effect of the Random Character of the Microscopic Strength of the Binder on the Deformation of a Fiber Composite // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 10. – P. 788 – 793.
61. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Effect of the Spread of Strength Characteristics of the Binder on the Deformation of Laminar-Fibrous Materials // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 1. – С. 39 – 45.
62. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* The Theory of Short-Term Microdamageability of Granular Composite Materials // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 8. – P. 1060 – 1066.
63. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Simulation of the Short-Term Microdamageability of Laminated Composites // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 9. – P. 1181 – 1186.
64. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Short-Term Microdamage of Fibrous Composite Materials with Transversally Isotropic Fibers under Microfailures in a Binder // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 12. – P. 1605 – 1611.
65. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* The Micromechanics of Short-Term Damageability of Fibrolaminar Composites // Int. Appl. Mech. – 2001. – **36**, N 5. – P. 638 – 646.
66. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* A Note on the Theory of Short-Term Microdamageability of Granular Composites under Thermal Actions // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 1. – P. 60 – 67.
67. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Short-Term Microdamageability of Laminated Materials under Thermal Actions // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 4. – P. 432 – 439.
68. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Short-Term Microdamageability of Fibrous Materials with Transversely Isotropic Fibers under Thermal Actions // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 6. – P. 701 – 709.
69. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Short-Term Damage Micromechanics of Laminated Fibrous Composites under Thermal Actions // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 9. – P. 1083 – 1093.
70. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* A Theory of Short-Term Microdamage for a Homogeneous Material under Physically Nonlinear Deformation // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 4. – P. 338 – 395.
71. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Short-Term Microdamageability of Granular Material under Physically Nonlinear Deformation // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 6. – P. 656 – 663.
72. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Influence of Physically Nonlinear Deformation on Short-Term Microdamage of Laminar Material // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 8. – P. 878 – 885.
73. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Influence of Physically Nonlinear Deformation on Short-Term Microdamage of a Fibrous Material // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 10. – P. 1137 – 1144.
74. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Deformation of Particulate Composite with Physically Nonlinear Inclusions and Microdamageable Matrix // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 2. – P. 111 – 117.

75. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Influence of the Physical Nonlinearity of Matrix on the Deformation of a Particulate Composite with Microdamageable Inclusions // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 4. – P. 345 – 351.
76. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation of a Laminated Composite with a Physically Nonlinear Reinforcement and Microdamageable Matrix // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 11. – P. 1246 – 1253.
77. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamage of a Laminated Material with Nonlinear Matrix and Microdamaged Reinforcement // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 12. – P. 1331 – 1338.
78. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation of Fibrous Composite with Physically Nonlinear fibers and Microdamageable Matrix // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 1. – P. 32 – 39.
79. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamageability of a Fibrous Composite with Physically Nonlinear Matrix and Microdamaged Reinforcement // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 2. – P. 127 – 135.
80. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Microdamage of a nonlinear elastic material in combined stress state Reinforcement // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 11. – P. 1223 – 1230.
81. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-term microdamage of a physically nonlinear particulate material under a combination of normal and tangential loads // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 12. – P. 1356 – 1363.
82. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-term microdamage of a physically nonlinear fibrous material under simultaneous normal and tangential loads // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 3. – P. 282 – 290.
83. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-term microdamage of a physically nonlinear laminate under simultaneous normal and tangential loads // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 4. – P. 409 – 417.
84. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Mesomechanics of Deformation and Short-Term Damage of Linear Elastic Homogeneous and Composite Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 6. – P. 591 – 620.
85. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and Long-Term Damage of Particulate Composites with Stress-Rupture Microstrength Described by a Fractional-Power Function // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 10. – P. 1075 – 1083.
86. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Micromechanics of Long-Term Damage of Particulate Composites with Unlimited Microdurability // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 11. – P. 1202 – 1212.
87. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and Long-Term Damage of physically nonlinear stochastic composites // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 12. – P. 1325 – 1351.
88. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and short-term damage of physically nonlinear stochastic composites // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 6. – P. 613 – 634.
89. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and long-term damage of layered materials with stress-rupture microstrength described by an exponential power function // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 8. – P. 873 – 881.
90. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Coupled deformation and long-term damage of layered materials with stress-rupture microstrength described by a fractional-power function // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 9. – P. 991 – 999.
91. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and long-term damage of fibrous materials with the stress-rupture microstrength of the matrix described by a fractional-power function // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 11. – P. 1196 – 1205.
92. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Coupled processes of deformation and long-term damage of fibrous materials with the microdurability of the matrix described by an exponential power function // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 1. – P. 37 – 45.
93. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Influence of heating on the deformation and long-term damage of unreinforced materials // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 8. – P. 857 – 863.
94. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and long-term damage of particulate composites under thermal loads // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 10. – P. 1110 – 1118.
95. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Coupled processes of deformation and long-term damage of fibrous materials under thermal loading // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 1. – P. 45 – 54.
96. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Coupled processes of deformation and long-term damage of layered materials under thermal loading // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 2. – P. 169 – 176.
97. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Theory of long-term microdamage of physically nonlinear homogeneous materials // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 5. – P. 535 – 544.
98. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and long-term damage of physically nonlinear particulate composites // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 6. – P. 670 – 678.
99. Shikula E.N. Dependence of the Strain Properties of Fibrous Composite Laminates on the Fiber-Strength Distribution Law // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 2. – P. 129 – 135.
100. Shikula E.N. Dependence of the Strain Properties of a Fiber Composite on the Binder Strength Distribution // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 3. – P. 250 – 256.
101. Weibull W.A. A Statistical Theory of the Strength of Materials // *Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Res.* – 1939. – N 151. – P. 5 – 45.

Поступила 03.08.2011

Утверждена в печать 15.12.2011