

На правах рукописи

БОРОДИН Виталий Алексеевич

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ КЛАССОВ ГЕЛЬДЕРА В ОБЛАСТЯХ С КУСОЧНО-
ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

(01.01.01 - Теория функций и функциональный анализ)

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1975

ОРДЕНА ЛЕНИНА АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН УССР

На правах рукописи

БОРОДИН Виталий Алексеевич

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ КЛАССОВ ГЕЛЬДЕРА В ОБЛАСТЯХ С КУСОЧНО-
ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

(01.01.01 - Теория функций и функциональный анализ)

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1975

Работа выполнена в Институте математики АН УССР

Научный руководитель — член-корреспондент АН УССР В.К.Дзядык

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Е.П.Долженко,
кандидат физико-математических наук,
доцент Г.А.Алибеков.

Ведущее научно-исследовательское учреждение — Институт прикладной
математики и механики АН УССР, г.Донецк

Автореферат разослан "___" _____ 1975 г.

Защита состоится "___" _____ 1975 г. в _____ час.
на заседании Ученого Совета Института математики АН УССР,
г.Киев, ул.Репина, 8, Институт математики АН УССР.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института
математики АН УССР.

Ученый секретарь Совета
кандидат физ.-мат.наук

А.Д.Дучка

В работе получено обобщение на области с кусочно-гладкой границей некоторых граничных свойств гармонических и аналитических функций классов Гельдера H^s , $0 < s < 1$, указаны приложения полученных результатов и исследованы некоторые локальные модули непрерывности.

Диссертация состоит из введения и двух глав.

Пусть G — односвязная конечная область комплексной плоскости z , дополнение G^1 которой содержит более одной точки. Обозначим через $z = \psi(\tau) = \gamma_0' + \gamma_1'\tau + \gamma_2'\tau^2 + \dots$, $\gamma_1' > 0$, — функцию Римана, которая конформно и однолистно отображает единичный круг $|\tau| < 1$ на область G так, что при этом начало координат переходит в фиксированную точку $z_0 \in G$. Теоремы Келлога показывают, что гладкости границы области G и функции $\psi(e^{i\theta})$ тесно связаны.

В работе гельдеровские классы функций изучаются в областях классов $(\mathcal{L}_i) = \mathcal{L}_i(z_1, \beta_1, \dots, z_k, \beta_k)$. Поскольку строгое определение таких классов областей, получаемое с помощью ограничений на функцию $\psi(\tau)$, довольно громоздко, то мы отметим здесь только, что благодаря исследованиям Варшавского и др. было установлено, что области, границы которых состоят из конечного числа дуг с непрерывной кривизной, образующих в точках стыка z_j внутренние

углы $\beta_j \pi$, $0 < \beta_j < 2$, принадлежат классу $\mathcal{L}_i^s(z_1, \beta_1, \dots, z_n, \beta_n)$.
Обозначим $\bar{\beta} = \max(1, \beta_1, \dots, \beta_n)$.

Будем говорить, что непрерывная функция $u(z)$ принадлежит классу Гельдера порядка s , $0 < s < 1$, на множестве M комплексной плоскости z и писать, что $u(z) \in H^s(M)$, если

$$\sup_{|z-z'| \leq h} |u(z) - u(z')| \leq Ah^s, \quad z, z' \in M, \quad (1)$$

где постоянная A не зависит ни от z , ни от z' .

Основной в первой главе является теорема I, которая обобщает классическую теорему И.И. Привалова о том, что, если непрерывная 2π -периодическая функция $f(\theta) \in H^s[0, 2\pi]$, $0 < s < 1$, то сопряженная функция $\bar{f}(\theta) \in H^s[0, 2\pi]$.

Теорема I. Пусть область $G \in \mathcal{L}_i(z_1, \beta_1, \dots, z_n, \beta_n)$. Тогда, если гармоническая в G и непрерывная на $\bar{G}$ функция $u(z) \in H^s(\partial G)$, $0 < s < \frac{1}{\bar{\beta}}$, то и сопряженная к $u(z)$ функция $v(z) \in H^s(\partial G)$.

Для доказательства теоремы I был применен метод конформных отображений. При конформном отображении естественно появляются классы функций, определяемые локальными модулями непрерывности, если исследование производится в равномерной метрике, и весовые классы - в интегральной метрике.

Локальным модулем непрерывности в точке $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ непрерывной 2π -периодической функции $f(\theta)$ будем называть величину

$$\omega_{\theta_1}(f, h) = \omega_{\theta_1}(h) = \sup_{|\theta - \theta_1| \leq h} |f(\theta) - f(\theta_1)|. \quad (2)$$

Харди и Литтлвудом, а позднее независимо К.И.Бабенко, ана-
логи теоремы И.И.Привалов были получены в метриках L_p ,
 $1 \leq p < \infty$; кроме того ими же были получены весовые обобщения
этой теоремы в метрике L_p , $1 \leq p < \infty$.

Теорему 2 автора, которая является вспомогательной при дока-
зательстве теоремы I, можно рассматривать как аналог в равномер-
ной метрике весовой теоремы Харди и Литтлвуда. Весовая теорема
Харди и Литтлвуда для метрики L_p , $1 < p < \infty$, допускает
переформулировку на области с углами:

Если гармоническая в области $G \in \mathcal{L}_i(z_1, \beta_1, \dots, z_n, \beta_n)$
функция $u(z) \in H^{p, \alpha}(\partial G)$, $1 < p < \infty$, $0 < \alpha \leq 1$, т.е.

$$\left\{ \int_{\partial G} |f(z) - f(z + \Delta z)|^p |dz| \right\}^{\frac{1}{p}} \leq |\Delta z|^\alpha, \quad z + \Delta z \in \partial G,$$

то сопряженная гармоническая функция $v(z) \in H^{p, \alpha}(\partial G)$.

В § 3 исследуется гладкость решения задачи Дирихле в зависи-
мости от гладкости граничной функции. Подобные исследования для
случая области с гладкой границей впервые были проведены в рабо-
тах Лихтенштейна, Н.М.Гюнтера, Х.Л.Смолицкого. Эквивалентную про-
блему — о связи между гладкостью границы области и функцией Рима-
на, отображающей область на единичный круг, — еще раньше во мно-
гих случаях решил Келлог. Позже выяснилось, что эти вопросы тес-
но связаны с теоремами вложения. С этой точки зрения гармоничес-
кие функции изучались в работах С.М.Никольского, Я.С.Бугрова,
Н.П.Мозжеровой и др. Отметим, что в работах С.М.Никольского, а
также одновременно в работах Уолша и Янга, впервые проводилось
исследование гладкости решения задачи Дирихле в прямоугольнике,
т.е. в области с кусочно-гладкой границей. В.В.Фуфаевым для об-
ластей с кусочно-аналитической границей был получен ряд оконча-

тельных результатов. В приведенной ниже теореме 3 показано, что условия на границу области можно ослабить.

Теорема 3. Пусть область $G \in \mathcal{L}(z_1, \beta_1, \dots, z_k, \beta_k)$. Тогда, если $f(z) \in H^s(\partial G)$, $0 < s < \frac{1}{\beta}$ и $u(z)$ является решением задачи Дирихле для функции $f(z)$, то $u(z) \in H^s(G)$.

В § 4 приведены прямые теоремы приближения гармонических функций гармоническими полиномами. Гармоническим полиномом называется действительная часть алгебраического многочлена, вообще говоря, с комплексными коэффициентами. Для круга задачи приближения гармонических функций гармоническими полиномами эквивалентна задаче приближения непрерывных 2π -периодических функций тригонометрическими полиномами и благодаря этому хорошо изучена. Для областей отличных от круга, задача о приближении гармонических функций гармоническими полиномами сводят к задаче о приближении аналитических функций алгебраическими многочленами. Приближение гармонических функций классов Гельдера H^s , $0 < s < 1$, в областях, ограниченных аналитической кривой, изучалось Уолшем, Сьюэллом, Эллиоттом. В 70-е годы В.К. Дзядык установил прямые и обратные теоремы приближения аналитических функций алгебраическими многочленами в областях с углами. Опираясь на развитые методы он получил в областях с кусочно-гладкой границей оценку приближения гармоническими полиномами гармонических функций, представимых в виде потенциала двойного или простого слоя с плотностями классов H^s , $0 < s < 1$. Результаты автора приведены в теореме 4.

Теорема 4. Пусть область $G \in \mathcal{L}(z_1, \beta_1, \dots, z_k, \beta_k)$. Тогда для гармонической в G функции $u(z) \in H^s(\partial G)$, $0 < s < \frac{1}{\beta}$, для любого n существует гармонический полином $p_n(z)$ порядка n такой, что

$$|u(z) - p(z)| \leq \rho_{1+\frac{1}{h}}^s(z), \quad z \in \partial G, \quad (3)$$

где $\rho_{1+\frac{1}{h}}(z)$ — расстояние от точки z до $(1 + \frac{1}{h})$ — и внешней линии уровня области G .

Для доказательства теоремы были использованы прямые теоремы В.К.Дядька для аналитических функций.

Глава II посвящена граничным свойствам аналитических функций.

В § I теорема Племель-Привалова о граничных значениях интеграла типа Коши от непрерывной функции на кусочно-гладкой кривой

Γ перенесена на локальные модули непрерывности, которые удовлетворяют условиям (ж)

$$i_1) \quad h \int_h^1 \frac{\omega_{z_1}(t)}{t^2} dt \leq A \omega_{z_1}(h),$$

$$i_2) \quad \int_0^h \frac{\omega_{z_1}(t)}{t} dt \leq A \omega_{z_1}(h), \quad (ж)$$

$$i_3) \quad \omega_{z_1}(ah) \leq C(a) \omega_{z_1}(h),$$

где $z_1 \in \Gamma' = \Gamma[\tilde{\varepsilon}, l - \tilde{\varepsilon}]$, $h > 0$, постоянные $A, C(a)$ не зависят ни от z_1 , ни от h , постоянная $C(a)$ зависит от a .

Отметим, что условие $i_3) (*)$ эквивалентно условию

$$i_3') \quad \omega_{z_1'}(h) < B \omega_{z_1}(h), \quad |z_1 - z_1'| < Ch, \quad z_1, z_1' \in \Gamma',$$

где $C > 0$ — произвольная постоянная, а постоянная $B = B(C)$ зависит от постоянной C , но не зависит от z_1, z_1', h .

В § 2 обобщена теорема Харди и Литтльвуда, которая дает критерий принадлежности аналитической в круге функции классу Гельдера порядка s , $0 < s \leq 1$, выраженный через рост модуля производной.

Теорема 7. Пусть область $G \in \mathcal{L}_i(z_1, \beta_1, \dots, z_k, \beta_k)$.

Для того, чтобы аналитическая в G функция $f(z)$ была непрерывной на $\bar{G}$ и $f(z) \in H^s(\partial G)$, $0 < s < \frac{1}{\beta}$,

необходимо и достаточно чтобы

$$|f'(z)| \leq d^{s-1}$$

где d есть расстояние от точки z до границы ∂G области G .

Основные результаты данной работы докладывались на спецсеминаре по граничным свойствам аналитических функций в МГУ, на семинаре по теории приближения при Институте математики АН УССР, на общегородском семинаре по теории функций г.Киева и опубликованы в работах:

1. Локальные модули непрерывности и свойства гармонических функций в областях с углами, сб. "Теория приближения функций и ее приложения", Издание Института математики АН УССР, Киев, 1974.

2. К теореме Харди и Литтльвуда, УМЖ, 1975, № 2.

БФ 17028. 10.Ш.1975. 0,5 усл,п.л. Зак. 30. Тир.150

Отпечатано в Институте математики АН УССР
Киев, Репина, 3