# 19. Аналітичний розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності для однієї одновимірної області з неоднорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою

**Тарас Погорілий**
*Національний університет харчових технологій*

**Вступ:** При математичному моделюванні процесу рекристалізації за коливальним механізмом, базуючись на комірчастій моделі колективного росту і розчинення кристалів сахарози, одним з визначальних етапів є необхідність знаходження аналітичного розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності для однієї одновимірної області з неоднорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою. Дана задача математично формулюється наступним чином: необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

де $u(x,t)$, °C — функція розподілу температури в одновимірній області $D=\{(x)|x_1 \le x \le x_2\}$, в залежності від координати $x$, м та часу $t$, с; $a = \lambda/(c\cdot\rho)$, м/с$^2$ — коефіцієнт температуропровідності; $\lambda$, Вт/(м·К) — коефіцієнт теплопровідності; $c$, кДж/(кг·К) — теплоємність; $\rho$, кг/м$^3$ — густина речовини, з неоднорідними граничними умовами другого роду

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} = \tilde{\mu}_1(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} = \tilde{\mu}_2(t), \quad (t \ge 0), \qquad (2)$$

де $\tilde{\mu}_i(t) = -\mu_i(t)/\lambda, (i = 1,2)$ — функції, що виражаються через задані функції теплових потоків $\mu_i(t), (i = 1,2)$, Вт/м$^2$, на відповідних границях одновимірної області *D,* та при наступній неоднорідній початковій умові:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad (x_1 \le x \le x_2;\, t \ge 0), \qquad (3)$$

де *φ(x)* — неперервна обмежена функція.

**Матеріали і методи:** Для знаходження розв'язку даної задачі використаємо метод розділення змінних Фур'є. Застосувати метод Фур'є розділення змінних безпосередньо для розв'язання поставленої нестаціонарної задачі теплопровідності (1)–(3) в даному випадку неможливо в силу неоднорідних (тобто таких, що не дорівнюють тотожно нулю) граничних умов (2). Тому зведемо задачу до такого вигляду, коли вже буде можливо застосувати безпосередньо метод Фур'є. Таким чином, розв'язок (1)–(3) будемо знаходити у вигляді суми двох функцій *v(x,t)* та *U(x,t)*: *u(x,t) = v(x,t) + U(x,t),* де функцію *U(x,t),* в свою чергу, вибрали такою, щоб задовольнити граничні умови вихідного рівняння (2), тобто:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_1} = \tilde{\mu}_1(t), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_2} = \tilde{\mu}_2(t), \quad (t \ge 0),$$

Таким чином, в силу граничних умов (2), та початкової умови (3), а також вибору функції *U(x,t)*, що задовольняє граничним умовам (2$^*$), шукана функція *v(x,t)* повинна задовольняти наступним граничним умовам:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x_1} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} - \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x_2} = 0, \quad (t \ge 0),$$

тобто, однорідним граничним умовам, та наступній початковій умові:

$$v(x,t)\big|_{t=0} = u(x,t)\big|_{t=0} - U(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x).$$

Таким чином, приходимо до наступної задачі теплопровідності для функції *v(x,t)*: знайти розв'язок задачі

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t),$$

при граничних умовах (4) та початковій умові (5), що представляється як розв'язок двох окремих задач: аналітичного розв'язку однорідного рівняння теплопровідності для одновимірної області з однорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою, а також аналітичного розв'язку неоднорідного рівняння теплопровідності для однієї одновимірної області з однорідними граничними умовами другого роду та однорідною початковою умовою.

**Результати.** Представлено аналітичний розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності для однієї одновимірної області з неоднорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою.

**Висновки.** На основі знайденого розв'язку можна знайти аналітичні розв'язки по одночасному контакту двох одновимірних областей для створення математичної моделі процесу рекристалізації за коливальним механізмом, базуючись на комірчастій моделі колективного росту і розчинення кристалів сахарози.

**Література**

1. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. — М.: Высшая школа. 1970. — 712 с.