

Фізико-математичні науки

УДК 539.3

**Богатирчук Анатолій Степанович**

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої  
математики ім. проф. Можара В.І.

Національний університет харчових технологій

**Гузенко Світлана Володимирівна**

асистент кафедри вищої математики ім. проф. Можара В.І.

Національний університет харчових технологій

**Богатырчук Анатолий Степанович**

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей  
математики им. проф. Можара В.И.

Национальный университет пищевых технологий

**Гузенко Светлана Владимировна**

ассистент кафедры высшей математики им. проф. Можара В.И.

Национальный университет пищевых технологий

**Bogatyrchuk A.**

candidate of physical and mathematical sciences, associate professor  
National University of food technologies

**Guzenko S.**

assistant

National University of food technologies

**ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НАВКОЛО ОТВОРІВ**

**У ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ВОКРУГ**

**ОТВЕРСТИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ**

**DETERMINATION OF STRESS STATE NEAR THE HOLES IN**

**CYLINDRICAL SHELL**

**Анотація:** Подана методика визначення напружень в циліндричній оболонці, послабленої двома круговими отворами на одній напрямній. Використано модель оболонок типу Тимошенка. Застосовано метод скінчених елементів. Досліджено розподіл напружень навколо отворів від зміни зсувної жорсткості матеріалу оболонки.

**Ключові слова:** напруження, оболонка з круговим отвором, метод скінчених елементів.

**Аннотация:** Приведена методика определения напряжений в цилиндрической оболочке, ослабленной двумя круговыми отверстиями поодной направляющей. Использована модель оболочек типа Тимошенка. Применен метод конечных элементов. Исследовано распределение напряжений вокруг отверстий от изменения сдвиговой жесткости.

**Ключевые слова:** напряжение, оболочка с круговым отверстием, метод конечных элементов.

**Summary:** The method of determination of stresses in cylindrical shell with two holes on one guide was given. The shells model of Timoshenko was used. The method of finite elements was used. The strain distribution around the holes on changed of shear stiffness of shell material was investigated.

**Key words:** stress, shell with circular opening, finite elements method.

В апаратах харчової промисловості часто використовуються як елементи конструкцій тонкостінні оболонки з отворами. Розглянемо напружений стан циліндричної оболонки, послабленої двома круговими отворами, розміщеними на одній напрямній. Оболонка навантажена внутрішнім тиском інтенсивності  $q_0$ .

Виділимо в оболонці окіл  $\Omega$ , що містить отвори. Як відомо [1, с.4], зони концентрації напружень навколо отворів мають локальний характер і практично затухають на відстані одного – двох діаметрів цих отворів. Тому припускаємо, що границя  $\Gamma$  околу  $\Omega$  настільки віддалена від контурів

отворів  $\Gamma_0$ , що зовні неї збурення напружень, спричинених наявністю отворів, практично згасають.

Віднесемо серединну поверхню оболонки до системи криволінійних ортогональних координат  $(\alpha, \beta)$ . В подальшому виходимо з варіаційного рівняння Лагранжа, записаного для околу  $\Omega$ :

$$\iint_{\Omega} \left\{ \delta V_0 - (p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + p_n \delta w + m_1 \delta \gamma_1 + m_2 \delta \gamma_2) \right\} A_1 A_2 d\alpha d\beta - \int_{\Gamma_1} (T_{tt}^0 \delta u_t + T_{ts}^0 \delta u_s + T_{th}^0 \delta w + G_{tt}^0 \delta \gamma_t + G_{ts}^0 \delta \gamma_s) d\Gamma = 0, \quad (1)$$

$$\delta V = T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + S_{12} \delta \delta_{12} + G_1 \delta k_1 + G_2 \delta k_2 + 2H_{12} \delta k_{12} + Q_1 \delta \varepsilon_{13} + Q_2 \delta \varepsilon_{23},$$

де  $V_0$  - питома енергія деформації;  $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$  - узагальнені переміщення серединної поверхні оболонки, через які виражається поле переміщень

$$U_1 = u_1(\alpha, \beta) + z\gamma_1(\alpha, \beta),$$

$$U_2 = u_2(\alpha, \beta) + z\gamma_2(\alpha, \beta), \quad (-h/2 \leq z \leq h/2), \quad W = w(\alpha, \beta). \quad (2)$$

Геометричні співвідношення між компонентами деформацій і узагальненими переміщеннями мають вигляд

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + k_\alpha w, \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A, u \\ 2, \beta, B, v \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) - 2k_{\alpha\beta} w,$$

$$\varepsilon_{13} = \gamma_1 + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \delta(-k_\alpha u + k_{\alpha\beta} v), \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A, u \\ 2, \beta, B, v \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} + \frac{\gamma_2}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A \\ 2, \beta, B \end{pmatrix}, \quad 2\chi_{12} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\gamma_1}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\gamma_2}{B} \right).$$

Співвідношення пружності для композитної оболонки будуть:

$$T_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{13}\varepsilon_{12}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad S_{12} = B_{13}\varepsilon_1 + B_{23}\varepsilon_2 + B_{33}\varepsilon_{12},$$

$$G_1 = D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + D_{13}2\chi_{12}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (4)$$

$$H_{12} = D_{13}\chi_1 + D_{23}\chi_2 + D_{33}2\chi_{12}, \quad Q_1 = K_1\varepsilon_{13}, \quad (1 \leftrightarrow 2).$$

Тут  $B_{ij}, D_{ij}, K_i$  – узагальнені жорсткості матеріалу оболонки.

Граничні умови на контурах отворів запишуться у вигляді:

$$T_\rho = \frac{q_0 R}{2}(1 - \cos 2\theta), S_{\rho\theta} = \frac{q_0 R}{2} \sin 2\theta, Q = -\frac{qr}{2}, G_\rho = H_{\rho\theta} = 0. \quad (5)$$

Підставивши (3) в (4), а останнє – в (1) з урахуванням (5), отримаємо варіаційне рівняння відносно змінних  $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$ :

$$I(u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2) = 0.$$

Для розв'язку задачі застосуємо метод скінчених елементів. Розбиваємо область на квадратичні ізопараметричні елементи, що мають по вісім вузлів. На кожному з цих елементів вводимо локальну систему координат  $(x_1, x_2)$  таку, що  $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$ . При цьому перетворення від локальних координат до глобальних здійснюється за допомогою функцій форми:

$$\begin{aligned} \phi_i &= \frac{1}{4}(1 + x_{10})(1 + x_{20})(x_{10} + x_{20} - 1) \quad (i = 1, 3, 5, 7); \\ \phi_i &= \frac{1}{2}(1 - x_1^2)(1 + x_{20}) \quad (i = 2, 6); \quad \phi_i = \frac{1}{2}(1 + x_{10})(1 - x_2^2) \quad (i = 4, 8) \end{aligned} \quad (6)$$

та співвідношеннями

$$\alpha = \sum_{i=1}^8 \alpha^i \phi_i, \beta = \sum_{i=1}^8 \beta^i \phi_i, \quad (7)$$

де  $x_{10} = x_1 x_{1i}, x_{20} = x_2 x_{2i}, (x_{1i}, x_{2i}), (\alpha^i, \beta^i)$  – координати  $i$ -го вузла відповідно в локальній і глобальній системах координат.

Переміщення на кожному з елементів інтерполюється поліномами

$$u_1 = \sum_{i=1}^8 u_1^i \phi_i, \dots, \gamma_2 = \sum_{i=1}^8 \gamma_2^i \phi_i. \quad (8)$$

Тут  $u_1^i, \dots, \gamma_2^i$  – шукані переміщення в  $i$ -му вузлі.

В таблиці наведені результати обчислень коефіцієнтів концентрації кільцевих зусиль  $k_{1\theta}$  і моментів  $k_{2\theta}$  в точках контуру отвору  $\theta = 0; \pi/2; \pi$  для таких значень параметрів  $E/G = 0,2; r/R = 0,08; h/R = 2,6; 200$ .

Таблиця 1.

**Коефіцієнти концентрації кільцевих зусиль  
та кільцевих моментів**

$E/G$	$\theta$					
	0		$\pi/2$		$\pi$	
	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$
2,6	0,54	1,49	3,80	-0,22	2,73	5,20
200	0,19	1,06	5,16	-0,04	4,07	5,11

(Подана таблиця є розробкою авторів)

Розроблено алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану в циліндричних оболонках з отворами та складено програму на сучасній мові програмування C++ [2, с.90].

**Література:**

1. Гузь О.М., Чернишенко І.С., Шнеренко К.І. Концентрація напружень біля отворів в оболонках із композитних матеріалів// Прикл.механіка. – 2001. – 37,№2. - С.3-44.
2. Подбельский В.В. Язык Си++: Учеб. Пособие.—5-е изд.—М.: Финансы и статистика, 2004.—560с.