

8. Ріст популяції бактерій

Ірина Ничипоренко, Оксана Мулява

Національний університет харчових технологій

Вступ. Біотехнологи встановили, що деякі бактерії розмножуються із швидкістю, пропорційною їх наявній кількості (з коефіцієнтом a), але водночас утворюють отруту, що знищує їх з швидкістю, пропорційною кількості отрути та кількості бактерій (з коефіцієнтом b). Припустимо, що швидкість утворення отрути пропорційна наявній кількості бактерій (з коефіцієнтом c). Коефіцієнти пропорційності a , b , c залежать від виду бактерій та умов, в яких вони перебувають. Їх можна визначити експериментально. Встановимо закон розмноження бактерій.

Матеріали та методи. Побудовано математичну модель біологічного процесу розмноження бактерій у вигляді системи диференціальних рівнянь, розв'язавши яку, отримали інформацію про еволюцію цього процесу, характер його змін, можливі варіанти цих змін залежно від початкового стану.

Результати. Позначимо через N наявну кількість бактерій у момент часу t , а через T - кількість отрути. $\frac{dN}{dt}$ і $\frac{dT}{dt}$ - відповідно швидкість розмноження бактерій та швидкість утворення отрути. Маємо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNT, \quad \frac{dT}{dt} = cN. \quad (1)$$

Поділимо почленно рівняння системи (1) одне на одне. Отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dN}{dT} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}T.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи його, отримаємо залежність між кількістю бактерій та кількістю отрути:

$$N = \frac{a}{c}T - \frac{b}{2c}T^2. \quad (2)$$

Найбільше значення N :

$$N_{\max} = M = \frac{a^2}{2bc}. \quad (3)$$

Визначимо закон розмноження бактерій, встановивши залежність величини N від часу t , припускаючи, що час вимірюється з того початкового моменту $t = 0$, коли $N = M$. Із співвідношення (2) маємо

$$T = \frac{a}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{a^2 - 2bcN} .$$

Підставляючи цей вираз у перше з рівнянь (1), дістанемо, з урахуванням (3), таке диференціальне рівняння:

$$\frac{dN}{dt} = \mp aN \sqrt{1 - \frac{N}{M}} \quad (4).$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо такий закон розмноження бактерій:

$$N = \frac{4M}{\left(e^{\frac{at}{2}} + e^{-\frac{at}{2}} \right)^2} .$$

З останньої формули видно, що при $t \rightarrow +\infty$, наявна кількість бактерій N спадає до нуля.

Висновок: Колонія бактерій, розвиток якої відбувається згідно умов розглядуваної задачі, є нежиттєздатною і з часом припинить своє існування.

Література:

1. Лавренюк С.П. Курс диференціальних рівнянь./ Вид-во наук.-техн. л-ри. - 2000. - 216 с.
2. Zwietering M.N., Jongenburger I., Rombouts F.M. and K.van't Riet. Modeling of the Bacterial Growth Curve/ Appl Environ Microbiol. – 2007. – Vol 56(6). P. 1875-1881.