Существование функции Ляпунова для системы дифференциальных уравнений с устойчивым инвариантным многообразием

А. Н. Ткачук

Национальный университет пищевых технологий, Киев, Украина
tkachukam@ukr.net

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) \tag{1}$$

в области $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, где функция $X(t,x)$ непрерывна по своих переменных и удовлетворяет условию Липшица по x.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, а M_{t_0} — пересечение M гиперплоскостью $t = t_0$, $t_0 \geq 0$.

Определение. Множество M, назовем положительно инвариантным множеством системы (1), если решение $x(t)$ системы (1) такое, что $x(t_0) \in M_{t_0}$, имеет свойство: $x(t) \in M_t$ для любых $t \geq 0$.

Получен следующий результат, который является обратным к одной известной теореме А. М. Самойленко [1, с. 68] в теории инвариантных множеств.

Теорема. *Пусть система (1) имеет при $t \geq 0$ гладкое, положительно инвариантное устойчивое многообразие M такое, что $Pr_{\mathbb{R}^n} M$ — компактна в D ($Pr_{\mathbb{R}^n} M$ — проекция множества M на $\mathbb{R}^n$).*

Тогда в области $t \geq 0$, $x \in D$ существует дифференцируемая по любому направлению функция Ляпунова $V(t,x)$ со свойствами:

1) $V(t,x)$ — *положительно определена равномерно по* $t \geq 0$, *а именно*

$$\inf_{t\geq 0;\; x:\rho(x,M_t)>\varepsilon} V(t,x) = V_\varepsilon > 0, \qquad \text{при любом} \qquad \varepsilon > 0; \tag{2}$$

2) *производная функции* $V(t,x)$ *в силу системы (1) неположительно определена:*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, X(t,x)\right) \leq 0, \qquad t \geq 0, \qquad x \in D;$$

3) *множество нулей функции* $V(t,x)$ *совпадает с* M:

$$M = \{(t,x) : V(t,x) = 0, t \geq 0, x \in D\}.$$