

УДК 681.513.5

## APPLICATION PROCEDURE FOR REGULATORS FRACTIONAL FOR SYNTHESIS OF OPTIMAL AUTOMATIC CONTROL

M. Liashenko, O. Lobok, B. Goncharenko, M. Sych  
National University of Food Technologies

---

**Key words:**

fractional calculus,  
derivintegrator,  
optimal control,  
quality criterion,  
control object simulation,  
regulator simulation,  
control system simulation.

**Article history:**

Received 17.05.2017  
Received in revised form  
09.06.2017  
Accepted 05.09.2017

**Corresponding author:**

tmipt\_xp@ukr.net

---

**ABSTRACT**

The problem of application of fractional  $PI^\lambda D^\mu$ -regulators in the control of technological processes described by differential equations is considered, for example, the process of biological treatment of polluted waters or others. Linearization and discretization of the expressions of the models of the control object and regulator are carried out. The criterion of the quality of water purification control is given, the task of optimal control of the purification process is formulated. The criterion of the quality of automatic control of a fractional regulator for the functioning of a biological water purification system has been introduced. Optimum tunings of fractional regulators are obtained, the dynamics of transient processes of control action and the state of the purification system is investigated. Numerical simulation of fractional  $PI^\lambda D^\mu$ -and classical  $PID$ -regulator is carried out, a higher efficiency of fractional regulators is shown.

---

## ЗАСТОСУВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ ПРИ СИНТЕЗІ ОПТИМАЛЬНОГО АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

М.О. Ляшенко  
О.П. Лобок, канд. фіз.-мат. наук  
Б.М. Гончаренко, д-р техн. наук  
М.А. Сич

Національний університет харчових технологій

У статті розглянуто задачу застосування дробових  $PI^\lambda D^\mu$ -регуляторів при керуванні технологічними процесами, описаними диференціальними рівняннями, наприклад, процесом біологічної очистки забруднених вод або іншими. Проведена лінеаризація і дискретизація виразів моделей об'єкта керування і регулятора. Наведено критерій якості керування очищенням і сформульована задача оптимального керування. Отримано оптимальні налаштування дробових регуляторів, методом послідовного перебору досліджено динаміку оптимального керування.

**Ключові слова:** дробове числення, диферінтегратор, оптимальне керування, критерій якості, моделювання об'єкта керування, моделювання регулятора, моделювання системи керування.

**Постановка проблеми.** Дробове числення орієнтоване на похідні та інтеграли довільного порядку (раціонального, дійсного і навіть комплексного). Дробовим численням ще в XVII ст. починали займатися Ріман, Ливувіль, Грюнвальд, Літнік [4; 5; 8]. Але особливо активно теорія дробового числення розвивається в останні роки, а результати її широко використовуються при дослідженні хаотичної динаміки, динамічних нейронних мереж з дробовими порядками та конструювання (синтезу) регуляторів дробових порядків у теорії автоматичного керування.

Традиційно теорія і практика автоматичного керування орієнтовані на застосування класичного диференціального або інтегрального числення, тому є цілком логічним, що з розвитком дробового числення виникає потреба дослідження можливостей застосування дробових законів керування та побудови дробових регуляторів і виявлення особливостей систем керування з ними.

**Метою статті** є дослідження можливості та ефективності застосування дробових регуляторів у системах автоматичного керування технологічними процесами і порівняння їх з класичними регуляторами.

**Виклад основних результатів дослідження.** У статті розглянута задача моделювання керування технологічним процесом з використанням  $PI^\lambda D^\mu$ -регуляторів дробового порядку.

Математичні моделі, що описують динаміку керування технологічними процесами відносно вибраних вихідних величин, отримують на основі матеріального або енергетичного балансу процесів у вигляді, наприклад, для системи біоочистки забруднених вод у складі аератора-реактора і відстійника, такої системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx_a(t)}{dt} = \mu(t)x_a(t) - D(t)(1+r)x_a(t) + rD(t)x_r(t), \\ \frac{ds(t)}{dt} = -\frac{\mu(t)}{Y}x_a(t) - D(t)(1+r)s(t) + D(t)s_{in}(t), \\ \frac{dx_r(t)}{dt} = -D(t)(\beta+r)x_r(t) + D(t)(1+r)x_a(t), \end{cases} \quad (1)$$

де  $x_a(t)$ ,  $s(t)$  — відповідно, концентрація біомаси і субстрату в біореакторі;  $x_r(t)$  — концентрація рециркуляційної біомаси;  $D(t)$  — ступінь розведення, який визначається як  $D(t) = F(t)/V$ , де  $F(t)$  — об'ємна швидкість потоку,  $V$  — обсяг біореактора;  $s_{in}(t)$  — концентрація субстрату у вхідному потоці;  $Y$  — фактор виходу (прибутковості) біомаси;  $\mu(t)$  — питома швидкість росту біомаси, яка визначається за формулою Моно [3],  $r, \beta$  — коефіцієнти, що визначають, відповідно, відношення рециркуляційного потоку і потоку відходів біомаси до вхідного потоку;  $x_{a0}$ ,  $s_0$ ,  $x_{r0}$  — відповідно, концентрація біомаси, субстрату і рециркуляційної біомаси в початковий момент часу  $t_0$ ;  $t_0 < t \leq T$ ,  $T$  — кінцевий момент часу керування процесом.

Як регульований параметр (вихід моделі) вибрано величину  $s(t)$  — концентрацію субстрату в біореакторі, яка визначає якість очищення води. А як керувальний вплив на систему вибрано функцію ступеня розведення  $D(t)$ .

Для зручності систему (2) записано у векторному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), & t_0 < t \leq T, \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (2)$$

де

$$f(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} f_1(x(t), u(t)) \\ f_2(x(t), u(t)) \\ f_3(x(t), u(t)) \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a(t) \\ s(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = D(t), \quad (3)$$

$$f_1(x(t), u(t)) = \mu(x(t))x_1(t) - (1+r)x_1(t)u(t) + rx_3(t)u(t),$$

$$f_2(x(t), u(t)) = -\frac{\mu(x(t))}{Y}x_1(t) - (1+r)x_2(t)u(t) + s_{in}(t)u(t),$$

$$f_3(x(t), u(t)) = -(\beta + r)x_3(t)u(t) + (1+r)x_1(t)u(t),$$

$$\mu(x(t)) = \mu_{\max} \frac{x_2(t)}{k_s + x_2(t)}.$$

Регульований параметр при цьому можна записати так:

$$s(t) = x_2(t) = c^T x(t), \quad (4)$$

де  $c = (0 \ 1 \ 0)^T$ .

Лінеаризуємо перетворену систему рівнянь (4) в околі заданого номінального керування  $u^*$  і відповідного йому вектора рівноважного стану  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T$ , при якому  $f(x^*, u^*) = 0$  і який визначається як розв'язок системи нелінійних рівнянь  $f(x, u^*) = 0$  щодо вектора  $x$ .

Введемо такі позначення:

$$\Delta x(t) = \begin{pmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \\ \Delta x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_2(t) - x_2^* \\ x_3(t) - x_3^* \end{pmatrix} = x(t) - x^*, \quad \Delta u(t) = u(t) - u^*. \quad (5)$$

Тоді лінеаризовану систему рівнянь моделі керування (2) можна представити такому у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x(t)}{dt} = A\Delta x(t) + b\Delta u(t), \\ \Delta x(t_0) = x^0 - x^*, \end{cases} \quad (6)$$

З огляду на співвідношення (4) і позначення (5) рівняння для регульованої змінної (вихід моделі) запишемо у такому вигляді:

$$\Delta s(t) = c^T \Delta x(t), \tag{7}$$

де  $\Delta s(t) = s(t) - c^T x^*$ .

Модель керування (8) має один вхід і один вихід. Відомим способом стабілізації потрібних параметрів є застосування регуляторів у зворотному зв'язку в складі контура автоматизованої системи керування. Використаємо дробовий  $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор [1,2] і порівняємо його ефективність з класичним  $PID$ -регулятором.

Аналогічно [7; 9] дробовий  $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор представимо у такому вигляді:

$$\Delta u(t) = k_p (\Delta s(t)) + k_I \left( {}_{t_0} D_t^{-\lambda} \Delta s(t) \right) + k_D \left( {}_{t_0} D_t^\mu \Delta s(t) \right), \tag{8}$$

де  $k_p, k_I, k_D$  — налагоджувальні коефіцієнти регулятора;  ${}_{t_0} D_t^{-\lambda} \Delta s(t)$  — дробова похідна порядку  $\lambda$ ;  ${}_{t_0} D_t^\mu \Delta s(t)$  — дробовий інтеграл порядку  $\mu$ , причому  $\lambda, \mu$  — довільні дійсні числа з інтервалу  $(0, 2)$ , тобто  $\lambda, \mu \in (0, 2)$ . Якщо  $\lambda \geq 2$  або  $\mu \geq 2$ , то  $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор набуває високого порядку, і структура його відрізняється від класичного  $PID$ -регулятора. Регулятор (10) є узагальненим дробовим  $PID$ -регулятором. Тому при  $\lambda=1$  і  $\mu=1$  маємо класичний  $PID$ -регулятор, при  $\lambda=1, \mu=0$ , отримуємо  $PI$ -регулятор, при  $\lambda=0, \mu=1$  маємо  $PD$ -регулятор, а при  $\lambda=0, \mu=0$  —  $P$ -регулятор. Всі ці різновиди класичних  $PID$ -регуляторів є окремими випадками дробового  $PI^\lambda D^\mu$ -регулятора (10). Однак  $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор є більш гнучким, ніж класичні, і має можливість краще регулювати (налаштовувати) динамічні властивості систем керування. На  $P-I-D$ -площині це означає, що замість «стрибків» між чотирма фіксованими точками ( $P, PI, PD$  і  $PID$ ) (рис. 1) на площині є можливість неперервного пересування ( $PI^\lambda D^\mu$ ) між ними при виборі параметрів  $\lambda, \mu$ .

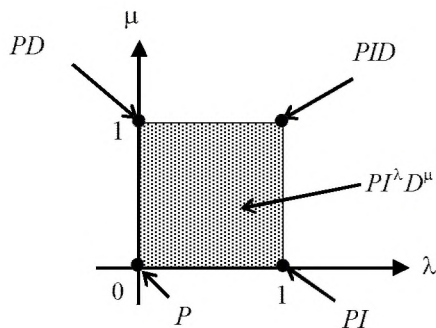


Рис. 1.  $P-I-D$ -площина дробових порядків похідних і інтегралів

Дробові похідні і інтеграли визначаються як межа [9]:

$${}_{t_0} D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[ \frac{t-t_0}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh), \quad (9)$$

де  $\binom{\alpha}{j}$  — біноміальні коефіцієнти вигляду  $\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1) \cdot \Gamma(\alpha-j+1)}$ , в яких

$\Gamma(x)$  — гама-функція Ейлера виду  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{x-1} dy$  (нагадаємо, що при цілому  $x=k$  вона дорівнює  $\Gamma(k+1)=k!$ );  $[\cdot]$  — ціла частина числа;  $h>0$  — приріст часової координати (квантування).

Якщо  $\alpha > 0$ , то формула (11) визначає дробову похідну, якщо ж  $\alpha < 0$ , то дробовий інтеграл. Тому співвідношення (11) часто називають диференціатором. Відзначимо також, що при цілих порядках  $\alpha$  в (11) буде кінцева сума, а при дробових  $\alpha$  — нескінченне число членів ряду.

З урахуванням (9)  $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор (10) запишемо у вигляді оператора від стану  $\Delta x(t)$ :

$$\Delta u(t) = c^T \left( k_p (\Delta x(t)) + k_I \left( {}_{t_0} D_t^{-\lambda} \Delta x(t) \right) + k_D \left( {}_{t_0} D_t^\mu \Delta x(t) \right) \right). \quad (10)$$

Критерій якості автоматичного керування функціонуванням системи біологічної очистки (як ступінь очищення) має вигляд:

$$J_p = \int_{t_0}^T |\Delta s(t)|^p dt = \int_{t_0}^T |c^T \Delta x(t)|^p dt, \quad (11)$$

де  $p > 0$  — параметр, який на практиці приймають рівним  $p=1$  (модуль похибки) або  $p=2$  (середньоквадратична похибка).

Для чисельної реалізації сформульованої задачі оптимального регулювання [(12), (13)] дискретизуємо систему (6), дробовий  $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор (10) і критерій (11), розбивши часовий інтервал  $[t_0, T]$  на  $n$  частин з кроком  $h = (T - t_0) / n$  ( $h$  — період квантування). Точки розбиття в  $[t_0, T]$  позначимо через  $t_k$ , а стан системи (6) в ці моменти часу  $t_k$  — через  $z_k = \Delta x(t_k)$ .

Апроксимуємо неперервний вхідний сигнал  $\Delta u(t)$  частково постійною функцією:  $\Delta u(t) = u_k$  при  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  і, використовуючи матрицю лінійної неперервної системи (6), отримаємо такий її дискретний аналог:

$$\begin{cases} z_{k+1} = e^{Ah} z_k + A^{-1} (E - e^{-Ah}) b u_k, & k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ z_0 = x^0 - x^*, \end{cases} \quad (12)$$

де  $E$  — одинична матриця;  $e^{Ah}$  — матрична експонента.

Далі дискретний дробовий  $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор представимо у вигляді:

$$u_k = c^T \left( k_P(z_k) + k_I \left( h^\lambda \sum_{j=0}^k w_j^{(-\lambda)} z_{k-j} \right) + k_D \left( h^{-\mu} \sum_{j=0}^k w_j^{(\mu)} z_{k-j} \right) \right). \quad (13)$$

Відмітимо, що при  $k=0$  керувальний сигнал дорівнює:

$$u_0 = (k_P + k_I h^\lambda + k_D h^{-\mu}) c^T z_0. \quad (14)$$

Критерій якості (11) запишемо в дискретизованому вигляді:

$$J_p = \frac{h}{2} \left( |c^T z_0|^p + 2 \sum_{j=1}^{n-1} |c^T z_j|^p + |c^T z_n|^p \right). \quad (15)$$

Чисельне моделювання керованої системи біоочищення і пошук оптимального регулятора здійснювалися при таких вихідних даних:  $s_{in} = 200$  [мг/л],  $Y = 0,65$ ,  $\mu_{\max} = 0,15$  [год<sup>-1</sup>],  $k_s = 100$  [мг/л],  $r = 0,6$ ,  $\beta = 0,2$ ,  $u^* = 0,05$  [год<sup>-1</sup>],  $t_0 = 0$ ,  $T = 1$  [год], вектор початкового стану системи (8) приймався рівним  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^T = (286, 17, 568)^T$  [мг/л]. Для пошуку оптимальних налаштувань регуляторів використовувався метод повного перебору з рівномірним кроком. Розв'язана задача мінімізації критерію:

$$I_p(\lambda, \mu) = \min_{k_P, k_I, k_D} J_p(k_P, k_I, k_D, \lambda, \mu) \quad (16)$$

відносно параметрів  $\lambda$  і  $\mu$ . Результати оптимізації методом повного перебору критерія (16) представлені в таблиці.

Таблиця. Оптимальні налаштування дробового  $PI^\lambda D^\mu$  і класичного  $PID$ -регуляторів

$p$	$\lambda$	$\mu$	$k_P$	$k_I$	$k_D$	$I_p(\lambda, \mu)$
1	1	1	-0,1381	-3,3019	-0,0016	0,0963
1	0,9750	0,750	-0,2231	0,0072	$-1,0847 \cdot 10^{-5}$	0,0854
2	1	1	-0,1294	-3,6445	-0,0015	0,1184
2	0,9875	0,600	-0,2234	0,0068	$-3,1249 \cdot 10^{-6}$	0,0855

У стовпцях  $\lambda$  і  $\mu$  наведені порядки похідних та інтегралів дробових регуляторів, в стовпцях  $k_P, k_I, k_D$  — оптимальні налаштування цих регуляторів, в останньому стовпчику — мінімальне значення критерію (18). Тут же для порівняння наведені результати оптимізації для класичного  $PID$ -регулятора при  $\lambda = 1$  і  $\mu = 1$ .

Результати показують, що значення цільової функції  $I_p(\lambda, \mu)$  ( $p = 1, p = 2$ ) при оптимальному дробовому  $PI^\lambda D^\mu$ -регуляторі ( $\lambda = 1, \mu = 0,9875$ ) менші, ніж при класичному  $PID$ -регуляторі.

**Висновки.** Порівняльний аналіз динаміки перехідних процесів показує більш високу швидкість і якість загасання при оптимальному дробовому  $PI^\lambda D^\mu$ -регуляторі ( $\lambda = 0,965, \mu = 0,5375$ ) порівняно з оптимальним класичним  $PID$ -регулятором ( $\lambda = 1, \mu = 1$ ). Видно, що оптимальні дробові регулятори з точним

налаштуванням параметрів  $\lambda$  (порядок дробового інтеграла) і  $\mu$  (порядок дробової похідної) є більш ефективними порівняно з класичним  $PID$ -регулятором. Але ступінь ефективності дробових регуляторів і причини високої чутливості критерію оптимальності та перехідних процесів щодо порядків дробових похідних та інтегралів вимагають подальших досліджень.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Авсиевич А.В. Моделирование систем автоматического управления с дробным ПИД-регулятором [Текст] / А.В. Авсиевич, В.В. Авсиевич // Вестник Самарского государственного технического университета, сер. техническое науки. — 2010. — № 1(26). — С. 6—59.
2. Бутковский А.Г. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация [Текст] / А.Г. Бутковский, С.С. Постнов, Е.А. Постнова // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 5. — С. 3—34.
3. Васильев В.В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. [Текст] / В.В. Васильев, Л.А. Симак // Научное издание. — Киев, НАН Украины, 2008. — 256 с.
4. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение [Текст] / А.М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.
5. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения [Текст] / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев // Наука и техника. — Минск, 1987. — 688 с.
6. Учайкин В.В. Метод дробных производных [Текст] / В.В. Учайкин. — Ульяновск : Артишок, 2008. — 512 с.
7. Podlubny I. Fractional-order systems and PID controllers. / Podlubny I // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1999. — # 44 — P. 208—214.
8. Podlubny I. Fractional Differential Equations / Podlubny I. // Mathematics in Sciences and Engineering. — 1999. — Vol.6. — P. 198— 340.
9. Vinagre B.M. Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model-reference adaptive control / Vinagre B.M., Petras I., Podlubny I., Chen Y.Q. // Nonlinear Dyn. — 2002. — # 29(1—4). — P. 269—279.

## ПРИМЕНЕНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПРИ СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНОГО АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ

М.А. Ляшенко, А.П. Лобок, Б.Н. Гончаренко, М.А. Сыч  
Национальный университет пищевых технологий

В статье рассматривается задача применения дробных  $PI^\lambda D^\mu$ -регуляторов для управления технологическими процессами, описываемыми дифференциальными уравнениями, например, процесса биологической очистки загрязненных вод или других. Проведена линеаризация и дискретизация выражений моделей объекта управления и регулятора. Приведен критерий качества управления очисткой воды, сформулирована задача оптимального управления процессом очистки. Получены оптимальные настройки дробных регуляторов, методом последовательного перебора исследована динамика оптимального управления.

**Ключевые слова:** дробное исчисление, диферинтегратор, оптимальное управление, критерий качества, моделирование объекта управления, моделирование регулятора, моделирование системы управления.