В.А. Бородин

О НУЛЯХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ФУНКЦИЙ $|x|$

В работах $[1,2]$ проведено глубокое изучение приближения многочленами функции $|x|$. В частности, показано, что существует предел $E=\lim\limits_{x\to\infty} nE_n(|x|:[-1;1])$ и что $E\approx 0,282$.

В работе $|3|$ с помощью разработанного ранее аппроксимационного метода построены для $\forall n=2,4,...$многочлены $P_n^0(x)$, приближающие функцию $|x|$ таким образом, что выполняются равенства

$$|x|-P_n^0(x)=\frac{1}{\pi n}\left[-\cos n\eta+2n\eta\int\limits_{n\eta}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right]+0\left(\frac{1}{n^2}\right), x\in[-1;1], \text{ где}$$

$$P_n^0(x)=-\left(1+\frac{\pi}{n}\right)\frac{1}{\pi n}\sum_{j=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2}{2j-1}\right)t_{2j}x^{2j},$$

$$T_n\left(x\right)=\cos n\arccos x=\sum_{j=0}^{n}t_{2j}x^{2j}, \eta=\arcsin x.$$

В связи с этим представляет интерес изучение множества нулей функции $\varphi(nx)=-\cos nx+2nx\int\limits_{nx}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\cos ns-2nxsi(nx)$, которые с достаточно большой точностью являются нулями разности $|x|-P_n^0(x)$

Пусть $\{x_n\}, n=0,1,2...,-$ последовательность положительных нулей функции $\varphi(x)$, перенумерованных в порядке возрастания (бесконечность множества нулей будет следовать из дальнейших рассмотрений). В настоящей работе будут указаны простые формулы для вычисления значений x_k с точностью до величин порядка $1/k^5$ (примененный метод позволяет вычислять корни x_k с точностью до величин порядка $1/k^s$, где S – произвольное натуральное число). Показано что последовательность $\{\pi_k\}$ является выпуклой. Доказательство основано на своеобразном методе последовательной приближений, предложенном В.К. Дзядыком $[4]$.

Теорема 1. Функция

$$\varphi\left(x\right)=-\cos x+2x\int\limits_{x}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt \qquad (1)$$

на интервале $(0,\pi)$ имеет два простых нуля x_0, x_1,а на каждом интервале $((k-1)\pi, k\pi)$, $k-2,3,4,...$, имеет единственный простой нуль x_k. При этом для всех $k=5,6,7,...$ имеет место равенство

$$x_k = \left(k - \tfrac{1}{2}\right)\pi + \frac{2}{\pi}\frac{1}{k - \tfrac{1}{2}} - \frac{32}{3\pi^3\left(k - \tfrac{1}{2}\right)^3} + r(k) \qquad (2)$$

где $$\left|r(k)\right| < \frac{5}{\left(k - \tfrac{1}{2}\right)^5} \qquad (3)$$

Доказательство. Интегрируя по частям соотношения (1), получаем

$$\varphi(x) = \cos x + 2\frac{\sin x}{x} - 4\frac{\cos x}{x^2} + 12\frac{\sin x}{x^3} + 48\frac{\cos x}{x^4} - 240x\int_x^\infty \frac{\cos t}{t^6}dt = \cos t + \frac{r_1(x)}{x}, \quad (4)$$

где $|r_1(x)| \le 3$ при $x \ge 10$.

На интервале $\left(\left(k - \tfrac{1}{3}\right)\pi; \left(k + \tfrac{1}{3}\right)\pi\right)$ при $k \ge 4$ функция $\varphi(x)$ сохраняет знак; действительно,

$$\left|\varphi(x)\right| \ge \left|\cos x\right| - \frac{\left|r_1(x)\right|}{x} > \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{10} > 0, \qquad (6)$$

$$sign\varphi(x) = sign\cos x = (-1)^k.$$

Следовательно, на концах интервала $\left[\left(k - \frac{2}{3}\right)\pi, \left(k - \frac{1}{3}\right)\pi\right], k \ge 4$, функции $\varphi(x)$ принимает значение с противоположными знаками

$$sign\varphi\left(\left(k - \frac{2}{3}\right)\pi\right) \cdot \varphi\left(\left(k - \frac{1}{3}\right)\pi\right) < 0.$$

Поэтому $\varphi(x)$ имеет, по крайней мере, один нуль на интервале $\left(\left(k - \frac{2}{3}\right)\pi; \left(k - \frac{1}{3}\right)\pi\right)$.

Проводя аналогические рассуждения для производной $\varphi'(x)$, имеет

$$\varphi'(x) = -\sin x + 2\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}dt = -\sin x + \frac{r_2(x)}{x^2} \qquad (7)$$

где $\left|r_2(x) \le 3\right|$ при $x \ge 10$.

Следовательно, на интервале $\left(\left(k - \frac{2}{3}\right)\pi; \left(k - \frac{1}{3}\right)\pi\right), k \ge 4,$

$$\left|\varphi'(x)\right| \ge \frac{1}{2} - \frac{3}{100} > 0 \qquad (8)$$

Из (8) заключаем, что $\varphi(x)$ является монотонной $\left(\left(k - \frac{2}{3}\right)\pi; \left(k - \frac{1}{3}\right)\pi\right), k \ge 4$; таким образом, $\varphi(x)$ имеет единственный нуль этом интервале. Покажем что нуль функция $\varphi(x)$ фактически находиться на интервале $\left(\left(k - \tfrac{1}{2}\right)\pi; \left(k - \tfrac{1}{3}\right)\pi\right)$. Для этого достаточно показать, что на интервале $\left(\left(k - \frac{2}{3}\right)\pi; \left(k - \tfrac{1}{2}\right)\pi\right)$ функция $\varphi(x)$ сохраняет знак. Пусть функция $\varphi(x)$ сохраняет знак. Пусть $x \in \left(\left(k-\frac{2}{3}\right)\pi;\left(k-1/2\right)\pi\right)$ тогда $sign\cos x = (-1)^k$.

$$r_1(x) = \sin x\left(2 - 4\frac{c\,\mathrm{tg}\,x}{x} - 12\frac{1}{x^2} - 48\frac{c\,\mathrm{tg}\,x}{x^3} - 240\frac{x}{\sin x}\int_x^\infty \frac{\cos t}{t^6}dt\right)$$

При $x \geq 10$ выражение в скобках положительно поэтому

$$sign\varphi_k(x) = sign\sin x = (-1)^k.$$

Таким образом, $(-1)^k sign\varphi(x) > 0$ при $x \in \left(\left(k-\frac{2}{3}\right)\pi;\left(k-1/2\right)\pi\right), k \geq 4$.

Следовательно, первая часть теоремы доказана для $k \geq 4$ даже с более точной локализацией нулей: $x_k = \left(k-\frac{1}{2}\right)\pi + \alpha_k,\ 0 \leq \alpha_k \leq \frac{\pi}{6}$ (9)

Справедливость теоремы для корней x_0, x_1, x_2, x_3 следует непосредственно из вычислений.

Для нулей x_k можно получить следующую асимптотическую формулу:

$$x_k = \left(k-\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k-1/2} - \frac{32}{3\pi^3}\cdot\frac{1}{\left(k-1/2\right)^3} + \frac{3236}{15\pi^5}\cdot\frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^s} + 0\left(\frac{1}{k^7}\right),$$

$$k \geq 5 \qquad (10)$$

Из этой формулы, дающей порядковую оценку, теорема, вообще говоря, не следует. Для того, что бы получить оценки постоянных, применим видоизмененный метод последовательных приближений. Своеобразие этого методе заключается в том, что на каждом шаге получаем не новое более точное значение корня x_k, а некоторое новое уравнение, позволяющее определять значение x_k все с большой точностью.

Используя (9) имеем:

$$\cos x_k = (-1)^k \sin\alpha_k, \sin x_k = (-1)^{k-1}\cos\alpha_k,$$

равенство $\varphi(x_k) = 0$ примет вид

$$-\sin\alpha_k + 2\frac{\cos\alpha_k}{x_k} + 4\frac{\sin\alpha_k}{x_k^2} - 12\frac{\cos\alpha_k}{x_k^3} + $$
$$+(-1)^{k-1}\left(48\frac{\cos x_k}{x_k^4} - 240x_k\int_{x_k}^\infty \frac{\cos t}{t^6}dt\right) = 0 \qquad (11)$$

или $\mathrm{tg}\,\alpha_k = 2\frac{1}{x_k} + 4\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_k}{x_k^2} - 12\frac{1}{x_x^3} + R_1(x_k),$

где $R_1\left(x_k\right)=\dfrac{(-1)}{\cos\alpha_k}^{k-1}\left(48\dfrac{\cos x_k}{x_x^4}240x_k\int\limits_{x_k}^{\infty}\dfrac{\cos t}{t^6}dt\right)$ (12)

Использую (6), оцениваем $R_1\left(x\right)$. Заметим что

$$\int\limits_{x_k}^{\infty}\frac{\cos t}{t^6}dt=\int\limits_{x_k}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\cos t}{t^6}dt+\sum_{\ell=k}^{\infty}\int\limits_{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(\ell+\frac{3}{2}\right)\pi}\frac{\cos t}{t^6}dt \qquad (13)$$

В силу того, что ряд справа в (13) является знакочередующимся с монотонно убывающими членами, сумма ряда по модулю не превышает

$$(-1)^{k+1}\int\limits_{\left(k+1/2\right)\pi}^{\left(k+3/2\right)\pi}\frac{\cos t}{t^6}dt .$$

Первое слагаемое в (13) не превышает $\left|\int\limits_{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}\dfrac{\cos t}{t^6}dt\right|$,

поэтому ясно, что $\left|\int\limits_{x_k}^{\infty}\dfrac{\cos t}{t^6}dt\right|\le\left|\int\limits_{\left(k-\frac{1}{2}\right)}^{\left(k+1/2\right)\pi}\dfrac{\cos t}{t^6}dt\right|\le\dfrac{1}{\pi^5\left(k-1/2\right)^6}$.

Отсюда получаем

$$\left|R_1\left(x_k\right)\right|\le\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}+240\frac{k}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^6\pi^4}\right)\le\frac{1}{3\left(k-1/2\right)\pi} \qquad (14)$$

где $k\ge 4$

Уравнение (11) запишем в виде

$$\operatorname{tg}\alpha_k=\frac{2}{x_k}+4\frac{\operatorname{tg}\alpha_k}{x_k^2}-12\frac{1}{x_k^3}+R_1\left(x_k\right), \qquad (15)$$

откуда находим

$$0<\alpha_k<\operatorname{tg}\alpha_k<\frac{2}{\pi\left(k-1/2\right)}+\frac{4\sqrt{3}}{\pi^2\left(k-1/2\right)^2}-$$

$$-12\frac{1}{\pi^3\left(k-1/2\right)^3}+\frac{1}{3\left(k-1/2\right)^4}\le\frac{0{,}8}{k-1/8}, k\ge 5 \qquad (16)$$

Для доказательства теоремы достаточно убедится, что

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{32}{3\pi^3\left(k-\frac{1}{2}\right)} + r(R)_3, \qquad (17)$$

где $\left|r(k)\right| \le \dfrac{5}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^5}$

Использую оценку (16), аналогично предыдущему получаем для $R_1(x_t)$ более точную оценку.

$$\left|R_1(x_k)\right| \le \frac{3}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^5} \quad \text{при } k \ge 5 \qquad (18)$$

Учитывая равенство

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \sum_{n=3}^{\infty} c_{2n+1}x^{2n+1},$$

$$\left|c_{2n+1}\right| \le \frac{2}{15}, \quad n = 2,3,.......$$

имеем

$$\left|\operatorname{tg}\alpha_k - \alpha_k\right| < \frac{0,2}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^3} \qquad (19)$$

$$\left|\operatorname{tg}\alpha_k - \alpha_k - \frac{\alpha_k^3}{3}\right| < \frac{0,002}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^5} \qquad (19`)$$

Используя оценки (18), (19), (19`), уравнение (11) записываем в виде

$$\alpha_k + \frac{\alpha_k^3}{3} = \frac{2}{x_k} + \frac{4\alpha_k}{x_k} - 12\frac{1}{x_x^3} + R_2(x) \qquad (20)$$

где $\left|R_2(x)\right| < \dfrac{4}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^5}$ (21)

Подставляя (17) в (20) имеем

$$r = r(k) = \frac{2}{x_k} + \frac{4\alpha k}{x_k} - 12\frac{1}{x_k^3} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{32}{3\pi^2\left(k-\frac{1}{2}\right)^3} + R_2(x) \qquad (22)$$

После довольно простых, но несколько громоздких подсчетов, имеем

$$\left|r(k)\right| \le \frac{5}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^5}, \quad k \ge 5 \qquad (23)$$

Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы 1 в качестве следствия получается следующая теорема.

Теорема 2. Последовательность $\{x_k\}$, $k = 0,1,2,......$ нулей функции $\varphi(x)$ является выпуклой, т.е. всех $k = 1,2,...$ имеет место неравенство

$$\triangle_2 x_k = x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1} > 0 \tag{24}$$

Доказательство. В силу (9)неравенство (24) эквивалентно соотношению

$$\triangle_2 \alpha_k = \alpha_{k-1} - 2\alpha_k + \alpha_{k+1} > 0 \tag{25}$$

Очевидно, что

$$\triangle_2 \alpha_k = \triangle_2 \gamma(k) + \triangle_2 r(k),$$

где

$$\gamma(x) = \frac{2}{\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)} - \frac{32}{3\pi^3\left(x - \frac{1}{2}\right)^3}$$

Используя равенство $\triangle_2 \gamma(k) = \gamma''(k + \xi_k)$, где $|\xi_k| < 2$, получаем оценку снизу для $\triangle_2 \gamma(k)$:

$$\triangle_2 \gamma(k) > \frac{4}{\pi^4 (k+1)^3} - \frac{1}{\pi^4 (k-1)^5}.$$

Поэтому

$$\triangle_2 \alpha_k > \triangle_2 \gamma(k) - 3\frac{5}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^5} > 0, \quad k \geq 10$$

Так, в случае $k \geq 10$ теорема 2 установлена. Для $k = 1,2,...,9$ теорема проверяется непосредственно.

Литература

1. Бернштейн С.Н. Экстремальные свойства полиномов. – М. – Л.: Главная редакция общетехнической лит – ры, 1937. – 203с.

2. Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении $|x|$ посредством многочленов данной степени. Собр.соч. – 1952. Т.1, с.157-207.

3. Дзядык В.К. Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений. – Изв. АН СССР, сер.мат., 1974, 38, № 4, с. 937-967.
4. Дзядык В.К., Степанец А.И. О последовательности нулей интегрального синуса. – В кн.: Метрические вопросы теории функции и отображения, К., 1971, вып. II. с.64-74