УДК 681.513.5

DETERMINATION OF THE *D*-DOMAIN OF STABILITY OF LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS WITH FRACTIONAL ORDER

O. Lobok, B. Goncharenko, N. Savitskaya
National University of Food Technologies
L. Vihrova
Central Ukrainian National Technical University

Key words:
Stabilization region
Fractional derivatives
Fractional integrals
$PI^{\lambda}D^{\mu}$-regulator of fractional order
PI-regulator
D-split method
Laplace transform for dipereintegrator

Article history:
Received 01.03.2018
Received in revised form 21.03.2018
Accepted 11.04.2018

Corresponding author:
B. Goncharenko
E-mail:
GoncharenkoBN@i.ua

ABSTRACT

In the article the solution of the problem of the selection of the region of stability of linear dynamical systems with $PI^{\lambda}D^{\mu}$-regulator of fractional order is given. Using the D-split method, we obtain analytical formulas that determine the limits of the region of stable stabilization of the "object + fractional-regulator" system. The obtained results relate to the control system for biological purification of contaminated water by active sludge.

The boundary between areas where the system is stable or unstable, in the configuration settings space k_p, k_i, k_d of the fractional controller $PI^{\lambda}D^{\mu}$-consists of three parts: $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_{\omega} + \Gamma_{\infty}$. The constituent Γ_0 is determined from the condition of intersection of the real root of the characteristic equation of the imaginary axis s-plane with $s = 0$. The constituent Γ_{ω} is determined by the condition of intersection of a pair of complexly connected roots of the imaginary axis at $s = j\omega$, where $j = \sqrt{-1}$ is the imaginary unit. The constituent Γ_{∞} is determined by intersection of the real roots of the quasi-polynomial of the imaginary axis with $s = \infty$ and can be determined from the condition $p_n = 0$.

On the basis of the D-split method, we obtain analytical expressions that describe the boundaries of the global region of the stability of linear dynamic systems of the fractional order of the "input-output" type with the fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$-regulators. An appropriate algorithmic software was developed, which is not given in this article.

Further research may be related to the search for both optimal adjustment parameters and fractional orders of the diperegenerators included in the regulator, according to some chosen optimality criterion.

DOI: 10.24263/2225-2924-2018-24-2-3

ВИЗНАЧЕННЯ *D*-ОБЛАСТІ СТІЙКОСТІ ДРОБОВИХ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

О.П. Лобок, Б.М. Гончаренко, Н.М. Савицька
Національний університет харчових технологій
Л.Г. Віхрова
Центральноукраїнський національний технічний університет

У статті наведено розв'язок задачі виділення області стійкої стабілізації лінійних динамічних систем з $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регулятором дробового порядку. Завдяки використанню методу D-розбиття отримано аналітичні формули, що визначають межі області стійкості системи «об'єкт» + «дробовий $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регулятор» стосовно автоматичного керування процесом біологічного очищення забруднених вод активним мулом.

Границя між областями, де система стійка або нестійка, в просторі параметрів налаштувань k_p, k_i, k_d дробового $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регулятора складається з трьох частин: $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_{\omega} + \Gamma_{\infty}$. Складова Γ_0 визначається з умови перетину дійсним коренем характеристичного рівняння уявної осі s-площини при $s = 0$. Складова Γ_{ω} визначається з умови перетину парою комплексно спо-лучених коренів уявної осі при $s = j\omega$, де $j = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця. Складова Γ_{∞} визначається перетином дійсними коренями квазіполінома (10) уявної осі при $s = \infty$ і може бути визначена з умови $p_n = 0$.

На основі методу D-split отримано аналітичні вирази, що описують межі глобальної області стійкості лінійних динамічних систем дробового порядку типу «вхід-вихід» з дробовими $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регуляторами. Розроблено відповідне алгоритмічне програмне забезпечення, яке не наведено в цій статті. Оцінено ефективність результатів виділення стійкості в умовах застосування дробового $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регулятора.

Подальші дослідження можуть бути пов'язані з пошуком як оптимальних параметрів коригування, так і дробових налаштувань диферінтеграторів, включених у регулятор, відповідно до вибраного критерію оптимальності.

***Ключові слова**: область стабілізації, дробові похідні, дробові інтеграли, $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регулятор дробового порядку, PI-регулятор, метод D-розбиття, перетворення Лапласа для диферінтегратора.*

Постановка завдання. З початку розвитку теорії інтегро-диференціального числення дробового порядку [1] її перші застосування в задачах керування з'явилися тільки близько 50 років тому [2]. Дробове числення стало ефективним інструментом для опису численних різноманітних динамічних систем. Класичні результати теорії *PID*-регулювання поширилися на регулятори дробового порядку, які позначають як $PI^{\lambda}D^{\mu}$, де λ і μ —

порядки інтегрування і диференціювання сигналу похибки, які можуть мати дійсні нецілі (дробові) значення [3; 4].

Відома задача виділення глобальної області стійкості (метод D-розбиття) вимагала поширення на дробові динамічні системи в просторі параметрів налаштування $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регулятора залежно від значення порядків степенів λ і μ.

Метою статті є застосування методу D-розбиття до систем автоматичного керування технологічними процесами з дробовими регуляторами.

Викладення основних результатів дослідження. Фундаментальний оператор ${}_aD_t^{\gamma}$ часто називають диферінтегратором, який, за визначенням Грюнвальда-Летникова, для порядку γ має вигляд:

$$ {}_aD_t^{\gamma} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\gamma}} \sum_{j=0}^{[(t-a)/h]} (-1)^j \binom{\gamma}{j} f(t-jh), \qquad (1)$$

де $\binom{\gamma}{j} = \dfrac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\gamma-j+1)}$; $\Gamma(x)$ — гама функція Ейлера; $h>0$ — приріст часової координати; $f(x)$ — функція, до якої застосовується оператор диферінтегрування; $[\cdot]$ — означає цілу частину числа. Це визначення показує, що цілочисельні похідні вимагають використання кінцевих рядів, а дробові — нескінченного числа членів ряду.

Доведено [5], що перетворення Лапласа, яке є основою визначення поняття передавальної функції, для диферінтегратора має вигляд:

$$ L\left\{ {}_0D_t^{\gamma} f(t) \right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} {}_0D_t^{\gamma} f(t) dt = s^{\gamma} F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j (-1)^j {}_0D_t^{\gamma-j-1} f(t) \Big|_{t=0}, \qquad (2)$$

де $F(s) = L\{f(t)\}$ — звичайне перетворення Лапласа функції $f(x)$; n — ціле число, яке задовольняє умову $n-1 < \gamma \le n$.

Відзначимо, що якщо ${}_0D_t^{\gamma-j-1} f(t)\Big|_{t=0} = 0$, $j = 0, 1, 2, ..., n-1$, то з (2) випливає, що $L\left\{ {}_0D_t^{\gamma} f(t) \right\} = s^{\gamma} F(s)$.

Передавальна функція дробового порядку задається таким виразом:

$$ G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_n s^{\beta_n} + b_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \ldots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \ldots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i s^{\beta_i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^{\alpha_i}}, \qquad (3)$$

де a_i, b_i, $\beta_n > \beta_{n-1} > \ldots > \beta_1 > \beta_0 \ge 0$, $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \ldots > \alpha_1 > \alpha_0 \ge 0$ — довільні дійсні числа.

У часовій області передавальній функції (3) відповідає неоднорідне диференціальне рівняння дробового порядку виду:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i D^{\beta_i} u(t) , \tag{4}$$

де $y(t)$ — вихід, а $u(t)$ — вхід об'єкта керування; ${}_aD_t^{\gamma}$ — диферінтегратор.

Передавальна функція дробового $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регулятора має вигляд:

$$C(s) = k_p + k_i s^{-\lambda} + k_d s^{\mu} , \tag{5}$$

де λ и μ — дробові порядки, значення яких належить до області $(0,2)$; k_p, k_i, k_d — налаштовувальні параметри регулятора.

У часовій області передавальній функції (5) відповідає керування виду

$$u(t) = k_p \cdot e(t) + k_i \cdot \left({}_0D_t^{-\lambda} e(t) \right) + k_d \cdot \left({}_0D_t^{\mu} e(t) \right), \tag{6}$$

де — ${}_0D_t^{\gamma}$, як зазначалося вище, диферінтегратор.

Відповідно до означеної мети статті підмета дослідження полягає в тому, щоб віднайти методом D-розбиття область стійкості динамічної системи «об'єкт + регулятор» при допустимих значеннях параметрів налаштувань k_p, k_i, k_d дробового $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регулятора, які стабілізують об'єкт керування. Це важливо і при конструюванні $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регуляторів, і для пошуку оптимальних налаштувань регуляторів на знайденій параметричній області стабілізації за обраним критерієм.

Передавальна функція замкненої системи «об'єкт + регулятор» має загальний вигляд:

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)} , \tag{7}$$

де

$$Q(s) = \sum_{j=0}^{n} \left[k_p b_j s^{\lambda+\beta_j} + k_i b_j s^{\beta_j} + k_d b_j s^{\lambda+\mu+\beta_j} \right]; \tag{8}$$

$$P(s) = \sum_{j=0}^{n} \left[a_j s^{\lambda+\alpha_j} + k_p b_j s^{\lambda+\beta_j} + k_i b_j s^{\beta_j} + k_d b_j s^{\lambda+\mu+\beta_j} \right]. \tag{9}$$

Область стійкості, яку позначимо через S, в просторі параметрів знаходиться за умови приналежності до лівої напівплощини комплексної s-площини всіх дійсних частин коренів характеристичного квазіполінома $P(s)$, який для зручності подамо у вигляді:

$$P(s) = \sum_{j=0}^{n} p_j s^{q_j} = p_n s^{q_n} + p_{n-1} s^{q_{n-1}} + \ldots + p_1 s^{q_1} + p_0 s^{q_0} , \tag{10}$$

де q_j — впорядковані дробові порядки степенів, причому $q_n > q_{n-1} > \ldots > q_0$; p_j — коефіцієнти, які визначаються коефіцієнтами передавальної функції об’єкта керування і параметрами налаштувань k_p, k_i, k_d дробового $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регулятора.

Для виділення області стійкості системи (об’єкта керування з регулятором) використовуємо метод D-розбиття простору параметрів [6]. Нагадаємо, що згідно з цим методом границя між областями, де система (стійка або нестійка), в просторі параметрів налаштувань утворюється трьома частинами: $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_\omega + \Gamma_\infty$.

Складова Γ_0 визначається з умови перетину дійсним коренем характеристичного рівняння уявної осі s-площини при $s = 0$. Тобто складову Γ_0 знаходять шляхом підстановки $s = 0$ в рівняння $P(s) = 0$, де $P(s)$ визначається рівнянням (10). Звідси випливає, що Γ_0 може бути визначена з умови $p_0 = 0$, якщо значення найменшого порядку q_0 дорівнює 0, тобто при $s^{q_0} = 1$. Якщо $q_0 \neq 0$, тобто $s^{q_0} \neq 1$, то границі Γ_0 не існує. Складова Γ_ω визначається з умови перетину парою комплексно сполучених коренів уявної осі при $s = j\omega$, де $j = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця. В цьому випадку квазіполіном (10) стає нестійким і дійсна й уявна частини рівняння $P(j\omega) = 0$ починають дорівнювати нулю одночасно.

Складова Γ_∞ визначається перетином дійсними коренями квазіполінома (10) уявної осі при $s = \infty$ і може бути визначена з умови $p_n = 0$.

Застосовуючи ці передумови до досліджуваної системи «об’єкт + регулятор» і аналізуючи характеристичний квазіполіном (9), приходимо до висновку, що складові Γ_0 та Γ_∞ границі області стійкості являють собою прямі лінії:

$$\Gamma_0 \text{ — лінія: } \begin{cases} k_i = 0, & \text{при } s^{\beta_0} = 1, \\ \text{не існує,} & \text{при } s^{\beta_0} \neq 1, \end{cases}$$

$$\Gamma_\infty \text{ — лінія: } \begin{cases} k_d = 0, & \text{при } (\alpha_n = \beta_n) \text{ або } (\alpha_n > \beta_n \text{ і } \mu > \alpha_n - \beta_n), \\ k_d = -a_n / b_n, & \text{при } (\alpha_n > \beta_n \text{ і } \mu = \alpha_n - \beta_n), \\ \text{не існує,} & \text{при } (\alpha_n > \beta_n \text{ і } \mu < \alpha_n - \beta_n). \end{cases}$$

Для побудови складової Γ_ω підставим $s = j\omega$ в рівняння $P(s) = 0$, де $P(s)$ — квазіполіном (9). Тоді отримаємо:

$$P(j\omega) = \sum_{j=0}^{n} \left[a_j (j\omega)^{\lambda+\alpha_j} + k_p b_j (j\omega)^{\lambda+\beta_j} + k_i b_j (j\omega)^{\beta_j} + k_d b_j (j\omega)^{\lambda+\mu+\beta_j} \right] = \\ = \mathrm{Re}\{P(j\omega)\} + j \cdot \mathrm{Im}\{P(j\omega)\} = 0, \quad (11)$$

де $\mathrm{Re}\{P(j\omega)\}$ та $\mathrm{Im}\{P(j\omega)\}$ означають, відповідно, дійсну та уявну частини квазіполінома $P(j\omega)$.

Для подальшого перетворення виразу (11) пригадаємо, що нецілий степінь комплексного числа $(\sigma + j\omega)^{\gamma}$ може бути вирахований за формулою Муавра-Лапласа:

$$(\sigma + j\omega)^{\gamma} = \left(\sigma^2 + \omega^2\right)^{\gamma/2}\left[\cos\left(\gamma\varphi\right) + j\sin\left(\gamma\varphi\right)\right], \quad (12)$$

де $\varphi = \arctan\left(\omega / \sigma\right)$; σ — дійсна частина, ω — уявна частина; γ — дробовий порядок комплексного числа.

Вираз j^{γ} у рівнянні (11) може бути представлений згідно з формулою (12) так:

$$j^{\gamma} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right). \quad (13)$$

Далі, прирівнявши до нуля дійсну і уявну частину рівняння (11), з урахуванням формули (13) отримаємо:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left\{P(j\omega)\right\} = k_p R_{1p}(\omega) + k_i R_{1i}(\omega) + k_d R_{1d}(\omega) + H_1(\omega) = 0, \\ \mathrm{Im}\left\{P(j\omega)\right\} = k_p R_{2p}(\omega) + k_i R_{2i}(\omega) + k_d R_{2d}(\omega) + H_2(\omega) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

де

$$R_{1p}(\omega) = \sum_{j=0}^{n} b_j \omega^{\lambda+\beta_j} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + \beta_j)\right),\ R_{1i}(\omega) = \sum_{j=0}^{n} b_j \omega^{\beta_j} \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_j\right),$$

$$R_{1d}(\omega) = \sum_{j=0}^{n} b_j \omega^{\lambda+\mu+\beta_j} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + \mu + \beta_j)\right),\ H_1(\omega) = \sum_{j=0}^{n} a_j \omega^{\lambda+\alpha_j} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + \alpha_j)\right),$$

$$R_{2p}(\omega) = \sum_{j=0}^{n} b_j \omega^{\lambda+\beta_j} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + \beta_j)\right),\ R_{2i}(\omega) = \sum_{j=0}^{n} b_j \omega^{\beta_j} \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta_j\right),$$

$$R_{2d}(\omega) = \sum_{j=0}^{n} b_j \omega^{\lambda+\mu+\beta_j} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + \mu + \beta_j)\right),\ H_2(\omega) = \sum_{j=0}^{n} a_j \omega^{\lambda+\alpha_j} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + \alpha_j)\right).$$

Система лінійних рівнянь (14) містить більше невідомих (k_p, k_i, k_d), ніж число рівнянь, тому для однозначного її розв’язання один із параметрів системи мусить бути обраний довільно. Якщо за такий параметр обрати коефіцієнт k_p, то система (14) стає системою лінійних алгебраїчних рівнянь другого порядку щодо невідомих k_i та k_d, розв’язок якої має вигляд:

$$k_i = \frac{\Delta_i(\omega)}{\Delta(\omega)},\ k_d = \frac{\Delta_d(\omega)}{\Delta(\omega)}; \quad (15)$$

$$\Delta_i(\omega) = R_{1d}(\omega)H_2(\omega) - R_{2d}(\omega)H_1(\omega) + k_p\left(R_{1d}(\omega)R_{2p}(\omega) - R_{1p}(\omega)R_{2d}(\omega)\right),$$

$$\Delta_d(\omega) = R_{2i}(\omega)H_1(\omega) - R_{1i}(\omega)H_2(\omega) + k_p\left(R_{1p}(\omega)R_{2i}(\omega) - R_{1i}(\omega)R_{2p}(\omega)\right), \quad (16)$$

$$\Delta(\omega) = R_{1i}(\omega)R_{2d}(\omega) - R_{1d}(\omega)R_{2i}(\omega) = \omega^{\lambda+\mu}\sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)\left(R_{1i}^2(\omega) + R_{2i}^2(\omega)\right).$$

Застосуємо тепер ці результати для виділення області стійкості системи керування біологічним очищенням забруднених вод активним мулом з дробовим $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регулятором. За припущення, що кінетика процесу зростання біомаси описується рівнянням Моно [7], у [8] була отримана лінеаризована модель біоочисної системи «аеротенк + відстійник» у вигляді математичної моделі з одним входом і одним виходом:

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t), \; y(t) = x_2(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t), \tag{17}$$

де $\boldsymbol{x}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right)^T$ — вектор стану, в якому $x_1(t)$, $x_2(t)$ — відповідно, концентрація біомаси і субстрату в аеротенку; $x_3(t)$ — концентрація рециркулюючої біомаси з відстійника в біореактор-аеротенк; $u(t)$ — одномірна функція керування — швидкість розведення (аналог об'ємної швидкості потоку); $y(t)$ — спостережуваний вихід системи — концентрація субстрату.

Системна матриця A і вектори b и c в моделі (17) визначаються таким чином:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

де

$$a_{1,1} = \mu_{\max}\frac{x_2^*}{k_s + x_2^*} - (1+r)u^*, \; a_{1,2} = \mu_{\max}k_s\frac{x_1^*}{(k_s + x_2^*)^2}, \; a_{1,3} = ru^*,$$

$$a_{2,1} = -\frac{\mu_{\max}}{Y}\frac{x_2^*}{k_s + x_2^*}, \; a_{2,2} = -\frac{\mu_{\max}k_s}{Y}\frac{x_1^*}{(k_s + x_2^*)^2} - (1+r)u^*, \; a_{2,3} = 0,$$

$$a_{3,1} = (1+r)u^*, \; a_{3,2} = 0, \; a_{3,3} = -(\beta + r)u^*,$$

$$b_1 = -(1+r)x_1^* + rx_3^*, \; b_2 = -(1+r)x_2^* + s_{in}, \; b_3 = -(\beta + r)x_3^* + (1+r)x_1^*.$$

Тут позначено: u^* — задане номінальне керування, $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T$ — відповідний йому обчислений вектор рівноважного стану; $\mu_{\max}$ — максимальна питома швидкість росту біомаси; k_s — константа насичення, що визначається експериментальним шляхом; s_{in} — концентрація субстрату у вхідному потоці; Y — чинник виходу (прибутковості) біомаси; r, β — коефіцієнти, що визначають, відповідно, відношення рециркуляційного потоку і потоку відходів біомаси до вхідного потоку.

У частотній області модель (17) може бути представлена у вигляді:

$$Y(s) = G(s)U(s),$$

де $U(s)$, $Y(s)$ — перетворення Лапласа, відповідно, входу і виходу; $G(s)$ — передавальна функція об'єкта керування.

$$G(s) = c^T \left(sE - A\right)^{-1} b = \frac{c^T adj\left(sE - A\right) b}{\det\left(sE - A\right)} = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s^3 + q_2 s^2 + q_1 s + q_0}. \tag{18}$$

Тут через $adj\left(sE - A\right)$ позначена приєднана матриця матриці $sE - A$, а коефіцієнти поліномів чисельника і знаменника p_i, q_i обчислюються за формулами:

$$\begin{gathered} p_0 = b_2 a_{11} a_{33} - b_1 a_{21} a_{33} - b_2 a_{13} a_{31},\ q_0 = a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{31} a_{22} - a_{11} a_{22} a_{33}, \\ p_1 = b_1 a_{21} - b_2 a_{11} - b_2 a_{33},\ q_1 = a_{11} a_{22} + a_{11} a_{33} + a_{22} a_{33} - a_{13} a_{31} - a_{12} a_{21}, \\ p_2 = b_2,\ q_2 = -a_{11} - a_{22} - a_{33}. \end{gathered} \tag{19}$$

Якщо керування $u(t)$ в часовій області конструювати в класі дробових $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регуляторів виду (5)

$$u(t) = -\left(k_p \cdot y(t) + k_i \cdot \left({}_0 D_t^{-\lambda} y(t)\right) + k_d \cdot \left({}_0 D_t^{\mu} y(t)\right)\right), \tag{20}$$

то передавальна функція системи «процес біоочищення + регулятор» буде визначатися виразом $W(s) = Q(s)/P(s)$, де $Q(s) = C(s)G(s)$, $P(s) = 1 + C(s)G(s)$, $C(s)$ — передавальна функція дробового регулятора, що визначається за формулою (5); $G(s)$ — передавальна функція об'єкта керування, що обчислюється за формулами (18), (19).

Для визначення області допустимих значень параметрів налаштування k_p, k_i, k_d дробового $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регулятора, який стабілізує роботу біоочисної системи, використовувалися розрахункові формули (15), (16), що описують границі областей стійкості системи з дробовим регулятором. Обчислювальні експерименти для виявлення графічної залежності області стійкості від параметрів налаштування дробового регулятора проводилися в середовищі математичної системи MATLAB і будуть розглянуті в окремій статті.

Висновки

На основі методу D-розбиття отримані аналітичні вирази, які описують границі глобальної області стійкості лінійних динамічних систем дробового порядку типу «вхід-вихід» з дробовими $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регуляторами. Області стійкості побудовані на основі обчислювальних експериментів у просторі параметрів налаштування дробових $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регуляторів при фіксованих порядках диферінтеграторів у складі регулятора. Розроблене відповідне алгоритмічно-програмне забезпечення, яке в цій статті не приведене. Очевидна можливість застосування методу до будь-яких лінійних об'єктів, динаміка яких описується рівнянням структури (17), а обмеження методу може бути пов'язане з нелінійністю або з невизначеністю. Подальші дослідження можуть бути пов'язані з пошуком як оптимальних параметрів налаштування, так і дробових порядків диферінтеграторів, що входять у регулятор, згідно з деяким обраним критерієм оптимальності, а також і з виявленням графічної залежності D-області стійкості від параметрів k_p, k_i, k_d налаштування дробового регулятора.

Література

1. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations / Mathematics in Sciences and Engineering, Vol. 198. — Academic Press, 1999. — 340 p.

2. *Tustin A., Allason J.T., Layton J.M., Jakeways R.J.:* The design of systems for automatic control of the position of massive object. / Proc. Inst. Electr. Eng. 105 (C-1), 1958, pp. 1—57.

3. *Podlubny I.* Fractional-order systems and PID controllers. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, vol. 44, pp. 208—214.

4. *Бутковский А.Г.* Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация / А.Г. Бутковский, С.С. Постнов, Е.А. Постнова // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 5. — С. 3—34.

5. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. — Ульяновск, Артишок, 2008. — 512 с.

6. *Hamamci S.E., Tan N.* Design of PI controllers for achieving time and frequency domain specifications simultaneously / ISA Trans. Vol. 45 (4), 2006, pp. 529—543.

7. *Nejjari F., Roux G, Dahhou B, Benhammou A.* Estimation and optimal control design of a biological wastewater treatment process / Mathematics and computers in simulation, vol. 48, 1999, pp. 269—280.

8. *Лобок О.П.* Моделювання оптимального автоматичного керування процесом біологічної очистки забруднених вод регуляторами дробового порядку / О.П. Лобок, Б.М. Гончаренко, М.А. Сич, Л.Г. Віхрова // Збірник наук. праць Кіровоградського національного технічного університету. Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація. — Кропивницький : КНТУ. — 2017. — № 30. — С. 152—160.