# ЗНАХОДЖЕННЯ АНАЛІТИЧНОГО РОЗВЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

**Л.В. Скримська**

*Національний університет харчових технологій*

У різних сферах діяльності людини виникає багато задач , які зводяться до розв'язування диференціальних рівнянь. А саме, деякий процес—фізичний, хімічний , біологічний, економічний описується за допомогою математичної моделі у вигляді дифенціального рівняння в тому розумінні, що воно описує перебіг цього процесу. В середовищі MATHCAD є набір вбудованих програм, за допомогою яких легко розв'язуються певні типи диференціальних рівнянь. Але іноді виникає потреба мати аналітичний розв'язок диференціального рівняння , яке описує даний процес. Ми розв'язуємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною.

Нехай деякий процес описується диференціальним рівнянням (1) з заданими початковими умовами (2)

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \quad (2)$$

де $a, b, c -$ задані константи, $f(x) -$ задана функція, $(x_0, y_0) -$ задана точка, $y_1 -$ початкове значення $y'$ .

Спочатку за допомогою програмного блоку MATHCAD (3) знаходимо загальний розв'язок $\overline{y(x)}$ однорідного диференціального рівняння, яке відповідає неоднорідному диференціальному рівнянню (1) :

$$y(x,a,b,c,C_1,C_2) := \left| \begin{array}{l} D \leftarrow b^2 - 4\cdot a\cdot c \\ k_1 \leftarrow \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2\cdot a} \\ k_2 \leftarrow \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2\cdot a} \\ \left(C_1\cdot e^{k_1\cdot x} + C_2\cdot e^{k_2\cdot x}\right) \text{ if } D>0 \\ \left(C_1\cdot e^{k_1\cdot x} + C_2\cdot x\cdot e^{k_1\cdot x}\right) \text{ if } D=0 \\ \left[\left[e^{\mathrm{Re}(k_1)\cdot x}\cdot\left(C_1\cdot\cos(\mathrm{Im}(k_1)\cdot x) + C_2\cdot\sin(\mathrm{Im}(k_1))\cdot x\right)\right]\right] \text{ if } D<0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Далі , стандартними методами, але з використанням MATHCAD, в залежності від виду правої частини рівняння (1) знаходимо частинний розв'язок $y^*(x)$ неоднорідного рівняння (1). Отже, загальний розв'язок рівняння (1) в аналітичному вигляді буде сумою знайдених розв'язків. Детальніші викладки проведемо на прикладі.

Розв'яжемо диференціальне рівняння

$$y'' + 4y' - 5y = x^3 + 2x^2 - 3x - 4 \qquad (4)$$

з початковими умовами

$$y(0) = 5,\ y'(0) = 4. \qquad (5)$$

За допомогою програми (3) знаходимо загальний розв'язок $\overline{y(x)}$ однорідного диференціального рівняння, яке відповідає неоднорідному диференціальному рівнянню (4) :

$$y(x, 1, 4, -5, C_1, C_2) \to C_1 \cdot \exp\left[\left(-2 + \frac{1}{2} \cdot 36^{2}\right) \cdot x\right] + ,$$

тобто, $\overline{y(x)} = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}.$ (6)

Далі, оскільки права частина диференціального рівняння є многочленом третього степеня, то частинний розвязок диференціального рівняння (4) шукаємо у вигляді многочлена третього степеня

$$y^*(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D. \qquad (7)$$

Спочатку переносимо всі складові правої частини рівняння (4) в ліву частину цього рівняння, потім в це
рівняння підставимо (7), а далі прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях $x$, отримаємо систему чотирьох рівнянь. Ці громіздкі операції в блоці MATHCAD виконуються досить просто, і мають такий вигляд:

$$y'' + 4y' - 5y - \left(x^3 + 2x^2 - 3x - 4\right) \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, y = A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D \\ \text{substitute}, y' = \dfrac{d}{dx}\left(A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D\right) \\ \text{substitute}, y'' = \dfrac{d^2}{dx^2}\left(A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D\right) \\ \text{collect}, x \\ \text{coeffs}, x \end{array} \right. \to \begin{pmatrix} 4 \cdot C + 2 \cdot B - 5 \cdot D + 4 \\ 8 \cdot B - 5 \cdot C + 3 + 6 \cdot A \\ 12 \cdot A - 5 \cdot B - 2 \\ -5 \cdot A - 1 \end{pmatrix}.$$

Наступним кроком є розв'язування отриманої лінійної системи, для цього скористаємось відповідним оператором *solve*. Розв'язання цієї системи наведено нище:

$$\begin{pmatrix} 4 \cdot C + 2 \cdot B - 5 \cdot D + 4 \\ 8 \cdot B - 5 \cdot C + 3 + 6 \cdot A \\ 12 \cdot A - 5 \cdot B - 2 \\ -5 \cdot A - 1 \end{pmatrix} \text{solve}, \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{-22}{25} & \frac{-131}{125} & \frac{-244}{625} \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок $y = \overline{y} + y^*$ рівняння (4), записаним в MATHCAD буде таким:

$$y(x, C_1, C_2) := C_1 \cdot \exp(x) + C_2 \cdot \exp(-5 \cdot x) + \frac{-1}{5} \cdot x^3 + \frac{-22}{25} \cdot x^2 + \frac{-131}{125} \cdot x - \frac{244}{625} \qquad (8)$$

Похідну від розв'язку (8) позначимо так

$$y'(x, C_1, C_2) := \frac{d}{dx} y(x, C_1, C_2) \quad . \qquad (9)$$

Підставимо вирази (8) і (9) в початкові умови (5) і розв'яжемо отриману систему лінійних рівнянь відносно
констант $C_1$ і $C_2$. Цю послідовність математичних операцій можна виконати в блоці MATHCAD:

$$\text{Given}$$

$$y(0, C_1, C_2) = 5$$

$$y'(0, C_1, C_2) = 4$$

$$\text{Find}(C_1, C_2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{107}{1875} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, підставивши отримані коефіцієнти в вираз загального розв'язку (8) диференціального рівняння (4), ми отримуємо частинний розв'язок в аналітичному вигляді

$$y(x) := \frac{16}{3} \cdot \exp(x) + \frac{107}{1875} \cdot \exp(-5 \cdot x) + \frac{-1}{5} \cdot x^3 + \frac{-22}{25} \cdot x^2 + \frac{-131}{125} \cdot x - \frac{244}{625}. \qquad (10)$$

Щоб переконатись в правильності знайденого розв'язку підставимо його аналітичний вираз у диференціальне рівняння (4), отримаємо :

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + 4 \cdot \frac{d}{dx} y(x) - 5 \cdot y(x) - \left(x^3 + 2 \cdot x^2 - 3x - 4\right) \rightarrow 0$$

,

тобто, бачимо, що при всіх допустимих значеннях $x$ розв'язок перетворює задане рівняння в тотожність.

Перевага аналітичного розв'язку перед числовим розв'язком очевидна, наприклад, ми можемо при необхідності диференціювати цей розв'язок, інтегрувати і т.п.

**Наукові керівники: А.С. Богатирчук, С.В. Гузенко**