

539.3  
M29



НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

МОНОГРАФІЯ

**М.А. Мартиненко**

**МІШАНІ ПРОСТОРОВІ  
ЗАДАЧІ  
МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ  
ПРУЖНОСТІ**

**КИЇВ НУХТ 2012**

УДК 531.534

Рецензенти:

**О.О. Горюшко**, д-р фіз.-мат. наук, професор

**О.Я. Григоренко**, д-р фіз.-мат. наук, професор

**Мартиненко М.А.**

Мішані просторові задачі математичної теорії пружності:  
Моногр. / М.А. Мартиненко. — К.: НУХТ, 2012. — 373 с.

ISBN 978-966-612-123-3

Запропоновано і розвинено аналітичні методи розв'язання нового класу задач теорії пружності про збурення напружено-деформівного стану тіл просторовими тріщинами змінної кривини. Всі задачі названого класу приведені до взаємопов'язаних систем парних рівнянь з ядрами, які представлені власними функціями дискретного або неперервного спектру. Їх розв'язок знаходиться через спеціально побудовані інтегральні оператори від невідомих функцій і приводиться до систем інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма. Кінцеві формули для коефіцієнтів інтенсивності напружень, величини розкриття тріщини і відповідні числові результати є робочим матеріалом для інженерів-механіків, які працюють над проблемами міцності і надійності елементів конструкцій.

Розрахована на науковців, інженерів у галузі механіки твердого деформівного тіла, аспірантів і студентів старших курсів ВНЗ.

*Рекомендовано до видання вченою радою НУХТ.*

*Протокол № 8 від 29.03.12 р.*

*Видання подано в авторській редакції*

ISBN 978-966-612-123-3

УДК 531.534

©М. Мартиненко, 2012

©НУХТ, 2012

*«Хотя приведенные результаты для трехмерных задач представляют большой практический интерес, математические трудности при поисках других подобных решений столь велики, что обсуждение возможных методов их решения малоинтересно»*

Paris P.C., Sih G.C., USA [192]

### ВСТУП

В монографії запропоновані і розвинені аналітичні методи побудови *«других подобных решений»* мішаних просторових задач математичної теорії пружності. Наведемо допоміжну наукову інформацію, яка більш широко розкриває цю проблему і висвітлює її інженерну вартість та теоретичну значимість.

Як свідчать історичні матеріали, останнім часом у світі спостерігалось досить велика кількість непередбачених катастроф різних об'єктів, таких, наприклад, як американські судна «Ліберті» [22], англійські літаки «Комета» [94], великогабаритні ротори [252], реактори [304], мости [260] та ін. Відмітимо, що згідно з наведеними даними [203, 257] 845 кораблів «Ліберті» із 2500 потерпіли в процесі експлуатації серйозні аварії, причому у 145 випадках кораблі розкололися навпіл. Детальний аналіз причин катастроф показав, що у більшості випадків руйнування інженерних конструкцій відбулися раптово при навантаженнях значно менших допустимих, що були

розраховані класичними методами, які базувались на оцінці пружного та пластичного стану матеріалів на надійність. Ці випадки свідчать про недосконалість класичних методів та про необхідність введення в інженерну практику нових підходів до розрахунку конструкцій на міцність і надійність [165, 178].

В результаті комплексних досліджень, проведених у передових країнах ученими різних спеціальностей, виявилось, що у більшості випадках причиною руйнування були дефекти конструкційних матеріалів, такі, наприклад, як гостроконечні порожнини, тріщини, сторонні вclusions та ін. [171, 176, 243].

На даний час ця концепція отримала теоретичне та експериментальне підтвердження. Так, ще в 20-х роках фізиками [73], були проведені випробування на розрив зв'язків кам'яної солі у повітрі та у гарячій воді. Виявилось, що міцність на розрив у воді приблизно в 320 разів вища, ніж у повітрі. Низька міцність матеріалу у повітрі зумовлена поверхневими тріщинами, а у воді ці дефекти розчинилися разом із поверхневим шаром кам'яної солі й міцність матеріалу наблизилася до теоретичної. Про вплив дефектів на міцність металів, свідчать також і досліди, проведенні над нитковидними кристалами заліза діаметром 1,6 мкм [20], вирощеними за спеціальною технологією. Результати дослідів показали, що нитковидні кристали у 1000 разів міцніші порівняно із зразками заліза звичайної структури. Зауважимо, що виробництво конструкційних матеріалів на основі бездефектної теорії на даний час є нездійсненою задачею [21, 42, 43, 71, 146, 156] і всі існуючі реальні матеріали працюють з наявними або утвореними на самих ранніх

етапах експлуатації мікротріщинами [239]. Усвідомлення й визнання цього факту в інженерних колах спонукало науковий світ до створення основ нового розділу фізики та механіки твердого деформівного тіла — фізики та механіки руйнування [147, 150, 166]. Вихідною передумовою при вивченні процесу руйнування з позиції цих дисциплін є наявність тріщин певної геометрії в елементах конструкцій. Причому, так звані, субмікроскопічні та мікроскопічні дефекти від  $10^{-10}$  м до  $10^{-4}$  м досліджуються, наприклад, методами квантової механіки, молекулярної теорії будови тіла, теорії дислокації, електронної фрактографії [33, 62, 232, 240], а макроскопічні тріщини розміром більш ніж  $10^{-4}$  м аналізуються з позиції механіки суцільного середовища. Вказаний мінімальний розмір дефекту у матеріалах, що піддається аналізу з позицій механіки суцільного тіла, зараз є загальноприйнятим [33, 47], хоча пошук по визначенню нижньої границі розмірів тріщини на даний час продовжується [325]. Як відмічено [325], допустимий мінімальний розмір дефекту для дослідження якого, ще застосовують методи лінійної механіки руйнування, переважно залежить від пружних властивостей матеріалу. Тому єдине нижнє порогове значення розміру тріщини для всіх матеріалів вказати неможливо.

Дослідження, проведені на субмікроскопічному та мікроскопічному рівнях, дали пояснення механізму зародження та зростання тріщин до критичної геометрії, а також дали можливість отримати оцінки міцності матеріалів із такого типу мікродефектами [42, 63, 108]. Однак, як правило, раптове руйнування великогабаритних конструкцій пов'язане із закритичною стадією

розповсюдження домінуючої тріщини [251]. Тому, знаходження таких математичних моделей для дослідження механічних характеристик, які давали б можливість визначати допустиму (безпечну) геометрію поверхні тріщин у навантажених деталях конструкцій, є однією з основних задач у механіці руйнування. Значні успіхи у дослідженні цієї важливої проблеми досягнуті на даний час механікою квазікрихкого руйнування, яка вивчає макроскопічні процеси руйнування матеріалів із позицій механіки деформівного твердого тіла. Деякі основні положення лінійної механіки руйнування, короткі історичні факти про її розвиток, а також постановка нових задач будуть подальшим предметом нашого обговорення.

Історія розвитку механіки крихкого руйнування з початку свого зародження і до теперішнього часу охоплює майже століття і детально задокументована у численних оглядах та відповідних статтях. Основними джерелами для написання історичної довідки, а також перерахованих нижче основних положень механіки руйнування послужили наступні монографії [9, 10, 20, 27, 36, 60, 61, 71, 74, 75, 80, 82, 90, 93, 104, 140, 141, 147—150, 157, 162, 171, 174, 176, 178, 182, 186, 191, 200, 201, 202, 210, 212, 213, 217, 218, 220, 225, 238, 243, 246, 247] та низки інших оригінальних робіт, опублікованих у періодичній літературі [16, 17, 48, 54, 72, 81, 87, 151, 155, 159, 160, 163, 164, 170, 175, 180, 205, 207, 241, 244, 247] та ін.

Вперше, нескінченно велика концентрація напружень у пружних тілах була відмічена в роботах Г.В. Колосова [84, 85] та Інґліса [271] при розгляді ними задачі про розтяг пружної площини з еліптичними

отвором. Результати цих робіт показали, якщо мала вісь прямує до нуля, то в околі кінців великої осі еліпса напруження мають кореневу особливість, тобто фізично нереальну сингулярність. Це протиріччя фізичному змісту задачі пояснюється тим, що рівняння лінійної механіки твердого деформівного тіла були перенесені на область високої концентрації напружень, де вони неадекватно відображають реальність. Але ряд експериментів показує [161], що не лише в основній частині тіла, але й у достатній близькості від вершини щілини отримані розв'язки дають правильну картину розподілу напружень. Наприклад, для сталі радіус околу, де мають місце суттєві розходження між теоретичними та експериментальними даними, має порядок півміліметра [161]. Тому цей парадокс, як відмітив академік Л.І. Седов [212], *«не слід розглядати як докорінне протиріччя результатів лінійної теорії пружності у цій задачі дослідям. Навпаки, в рамках лінійної теорії пружності і сильно спрощеної схематизованої постановки задачі ця обставина є хорошим відображенням дійсності»*. Проведені досліді, хоча й вказали вірно на той факт, що саме окіл вершин великої осі є тією областю, де починається руйнування всього матеріалу в цілому, однак, критерії, які визначають допустиме навантаження із цих робіт не впливали.

Одним з перших такий критерій запропонував А.А. Гріффітс [268, 269] і саме його вважають родоначальником механіки руйнування [157, 171, 178, 243]. Проблема руйнування пластини з еліптичною щілиною розглядалася ним з енергетичних позицій. Він постулював, що поверхня тріщини буде збільшуватись, якщо тільки швидкість пружної деформації перевищить приріст поверхневої

енергії. Оскільки величини, що входять до рівняння балансу енергії, залежать від геометрії тріщини і прикладеного навантаження, то граничні умови при розтязі пружної площини із прямолінійною тріщиною довжини  $2l$  Гріффітса отримав у вигляді  $P = \lambda \sqrt{E\gamma/a}, \lambda \sim 1$ , де  $\gamma$  — поверхнева енергія вільної поверхні. Деякі зауваження відносно параметра  $\lambda$  наведені у монографії [243]. Що стосується величини  $\gamma$ , то у загальному випадку вона залежить від масштабного фактору [184, 213, 240, 247, 273], від термодинамічних характеристик матеріалу, від фізичних властивостей зовнішнього середовища та від ряду інших фізичних параметрів. У першому наближенні можна вважати, що для крихких та квазікрихких матеріалів  $\gamma$  є величиною постійною для кожного із матеріалів і визначається експериментальним шляхом [174, 243]. Однак, концепція Гріффітса довгий час не використовувалась в інженерній практиці внаслідок таких обставин:

а) вона була застосована лише для дуже обмеженого класу крихких матеріалів типу скла;

б) її застосування до задач із завчасно невідомою траєкторією розповсюдження тріщин було пов'язане з рядом труднощів математичного характеру, які виникали на шляху складання рівняння енергетичного балансу для усього тіла в аналітичному вигляді.

Перший недолік критерію Гріффітса був усунений в концепції квазікрихкого руйнування Орована [299, 300] та Ірвіна [272, 273, 274], котра розповсюджувалась на широкий клас конструкційних матеріалів, типу різноманітних марок сталі, алюмінієвих та титанових сплавів. Її сутність базується на таких міркуваннях. Як свідчать

експериментальні дані [191, 192, 269], пластична деформація у металах спостерігається у малому околі вершини тріщини. Спираючись на ці дані, Орован та Ірвін запропонували ввести розрахунок потоку звільненої пружної деформації на основі розв'язку відповідної крайової задачі механіки деформівного тіла для крихких матеріалів, а поверхневу енергію замінити ефективною поверхневою енергією, до складу якої входить енергія, що витрачається на малі пластичні деформації поблизу тріщини. Створення названого підходу стало поштовхом до інтенсивного застосування механіки руйнування в інженерних розрахунках конструкцій на міцність.

Другий недолік концепції Гріффітса був усунений у силовому критерії Ірвіна, опублікованому ним у 1957 р. [273]. Цей критерій, по суті, еквівалентний підходу Гріффітса, але представлений в іншому вигляді. Він базується на визначенні полів напружень при граничному навантаженні, за межею якого починається нестабільне руйнування матеріалу за рахунок запасу пружної енергії. Причому, на відміну від критеріїв Гріффітса у критерії Ірвіна розглядається поле напружень не в усьому тілі, а лише в околі тріщини. Використовуючи принцип суперпозиції, Ірвін показав, що опис любых видів деформування тріщини можна представити у вигляді трьох типів деформації [див. рис. 1]; нормального відриву, поперечного та повздовжнього зсуву. Кожному типу деформації відповідає певне поле напружень. Якщо в площині  $XOY$  ввести локальну полярну систему координат  $\rho, \theta$  так, як показано на рис. 1, то у випадку нормального відриву компоненти тензора напружень поблизу розрізу представляються у вигляді :

$$\sigma_{ij} = k_1 \cdot f_{ij}(\theta) / \sqrt{2\pi r}.$$

Для поперечного зсуву

$$\sigma_{ij} = k_2 \varphi_{ij}(\theta) / \sqrt{2\pi r}$$

і для поздовжнього зсуву

$$\sigma_{ij} = k_3 \psi_{ij}(\theta) / \sqrt{2\pi r}.$$

До складу наведених виразів для локальних полів напружень входять три величини  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , які називаються коефіцієнтами інтенсивності напружень (КІН) і мають розмірність сили, розділеної на розмірність довжини в степені три других. КІН знаходяться із розв'язку пружної задачі й у загальному випадку залежать від геометрії тіла та розрізу, пружних властивостей матеріалу, від діючих навантажень та інших фізичних полів.

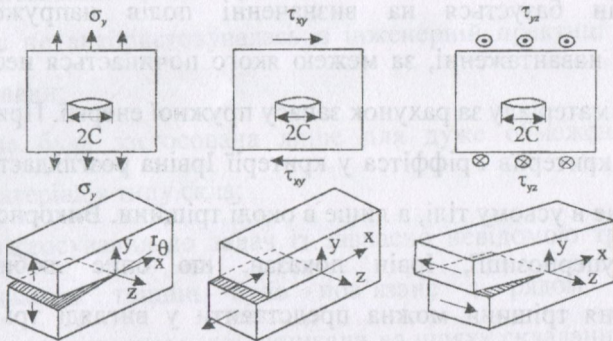


Рис. 1. Три типи деформації

Критерій Ірвіна полягає в тому, що крихке чи квазікрихке руйнування тіла, наприклад, при нормальному відриві наступить тоді, коли  $k_1$  досягне деякої сталої величини для даного матеріалу —  $k_{1c}$ , котра характеризує опір матеріалу руйнуванню і називається в'язкістю руйнування або тріщиностійкістю матеріалу [174, 178].

Величина  $k_{1c}$  знаходиться експериментальним шляхом за розробленою методикою і внесена в довідники для інженерів-конструкторів [174, 192].

Відмітимо, що вперше асимптотичні формули для полів напружень та переміщень в околі тріщини отримав Снеддон [219, 318] при розгляді задачі про монетоподібну тріщину у пружному просторі. Більш детальна історична довідка про дослідження сингулярних полів напружень поблизу тріщин наведена у монографіях [150, 171, 178, 243].

У випадку загального деформування трьохвимірного тіла з внутрішньою поверхневою тріщиною силовий критерій Ірвіна постулюється у такому вигляді. Вважається [178, 243], що початок локального руйнування матеріалу співпадає з тим моментом, коли кінець вектора  $\vec{k} = \{k_1, k_2, k_3\}$  досягне межі деякої замкнутої поверхні, що визначається рівнянням  $f_1(k_1, k_2, k_3) = 0$ . Якщо геометрія розрізу і прикладені до тіла навантаження такі, що кінець вектора  $\vec{k}$  знаходиться всередині поверхні, то така тріщина є безпечною. Явний вигляд функціональної залежності будується на основі того чи іншого критерію руйнування, котрих на даний час запропоновано декілька десятків [17, 49, 91, 154, 181, 182, 243, 327] і формулювання нових критеріїв продовжується [153, 262, 277, 285, 286, 290]. Зараз в інженерній практиці і науковій літературі знайшли найбільш широке застосування критерії Ірвіна [273, 274], В.В. Панасюка, М.Я. Леонова [104, 171], В.В. Новожилова [164], Г.П. Черепанова [243], В.І. Моссаковського [153-154] та ін.

Зауважимо, що в інженерних розрахунках надійності матеріалів методами механіки руйнування спостерігається така ж тенденція, як і при розрахунку міцності і надійності елементів конструкцій класичними методами опору матеріалів. Як відомо, для проведення таких розрахунків в запасі інженера-конструктора є десятки відповідних критеріїв в рамках опору матеріалів і їх вибір залежить від рівня професіоналізму спеціаліста.

Питання про адекватність експериментальних даних з теоретичними результатами, отриманими на основі ряду критеріїв, а також умови застосування різних критеріальних моделей в інженерній практиці розглядалися у роботах [174, 178, 289, 290, 330].

Відмітимо, що усі критеріальні рівняння включають інформацію про розподіл полів напружень чи переміщень в усьому тілі або лише в околі розрізу. Ці характеристики можуть входити в граничне рівняння безпосередньо чи в інтегральній формі.

В силу сказаного, можна заключити, що комплексний розрахунок на міцність будь-якої деталі конструкції з позицій статичної лінійної механіки руйнування включає три основні етапи:

- а) розрахунок напружено-деформівного стану тіла з тріщиною відомої геометрії, яке знаходиться у заданому полі сил;
- б) визначення тріщиностійкості чи в'язкості руйнування матеріалу;
- в) вибір критерію руйнування і оцінка міцності конструкції.

Наші подальші дослідження будуть присвячені першому етапу, який є одним з найбільш трудомістких і найбільш важливою ланкою в розглянутому ланцюжку. На цю обставину, наприклад, вказував

Ю.М. Работнов, котрий відмічав, що розвиток лінійної механіки руйнувань «в більшій мірі зводиться до накопичення фонду розв'язаних задач теорії пружності для тріщин різної форми в різних тілах» [178, с.11].

Необхідно зробити важливе зауваження. Серед перелічених вище основних кроків, розрахунку на міцність елементів конструкцій етапи б) і в) відносяться безпосередньо до інженерної практики. Інженери-механіки володіють достатніми знаннями, щоб успішно і творчо працювати на цих етапах. Але на науковому полі пункту а) можуть результативно творити тільки спеціалісти з високою механіко-математичною освітою і глибоким знанням математичної теорії пружності, лінійної механіки руйнування та ін.

Тріщини в пружних матеріалах можна розділити на наскрізні, поверхневі та внутрішні. Наскрізні тріщини, як правило, виникають у достатньо тонких пластинах та оболонках і геометрично моделюються деякою, у загальному випадку, кривою лінією. Розрахунок напружень в таких тілах з криволінійними розрізами будується на основі розв'язків рівнянь плоскої теорії пружності з наступним виконанням мішаних граничних умов. Широкий огляд робіт за цією тематикою наведений, наприклад, у монографіях [20, 157, 176, 210].

Поверхневі тріщини появляються у тривимірних тілах і їх дослідження будується на розв'язку крайової задачі просторової теорії пружності. Із аналізу присвячених цій проблемі робіт [245, 255, 258, 259, 261, 266, 270, 283, 284, 293, 303, 307, 314, 315, 317] впливає, що усі розглянуті поверхневі тріщини, як правило, мали

плоску напівкруглу або напівеліптичну форму. Більш детальний огляд цих робіт наведений у монографії [10].

Внутрішні тріщини у матеріалах являють собою найбільш важливий з інженерної точки зору предмет досліджень, так як більшість катастрофічних руйнувань конструкцій відбувається внаслідок прихованих внутрішніх дефектів. Довгий час у науковій літературі аналізувались внутрішні тріщини, які моделювались у вигляді розриву суцільності матеріалу по деякій плоскій поверхні.

Найбільш дослідженими являються задачі про напружено-деформівний стан пружних скінчених та нескінчених тіл з тріщинами дископодібної та еліптичної форми, яким присвячено більше сотні публікацій [10, 175]. Не маючи можливості хоча б перерахувати усі ці роботи, вкажемо лише на ті з них, які були опубліковані першими і в яких представлені оригінальні чи узагальнюючі результати [28, 29, 152, 154, 172, 173, 211, 254, 256, 267, 275, 276, 280, 281, 282, 306, 308, 309, 310, 316, 320, 322, 331, 332].

Після аналізу такого класу задач Paris P.C. та Sih G.C. на Міжнародній конференції з механіки руйнування (США) відмітили наступне: *«Хоча наведені результати для тривимірних задач представляють суттєвий практичний інтерес, математичні труднощі під час пошуку інших подібних розв'язків настільки великі, що обговорення можливих методів їх розв'язку малоцікаве»* [192].

Однак, як показав експериментальний аналіз поверхонь частин зруйнованих деталей [33, 192] початкові поверхні розриву суцільності матеріалу мали сферичний або параболоїдний вигляд, тобто не плоску, а об'ємну форму. Тому, як відмічає А. Уеллс, між

ідеалізованою плоскою моделлю і реальною тріщиною «існує глибока, але ні в якому разі не непрохідна прірва» [237]. Ясно, що підійти до оцінки міцності матеріалу з внутрішніми реальними тріщинами, можна через розв'язування класу задач теорії пружності для тривимірних тіл, послаблених тріщинами просторово-вигнутої форми. Такі тріщини доцільно моделювати частиною деякої поверхні обертання з відмінною від нуля кривиною. В цьому випадку є можливість варіювати геометричні параметри поверхонь обертання і тим самим наближати їх до геометрії реальних тріщин.

На практичну значимість названого класу задач вказують й експериментальні дослідження над композиційними матеріалами. Як відмічається у монографіях [39, 92], ряд гетерогенних середовищ наповнюється частинками сферичної чи еліпсоїдальної форми (наприклад, вольфрам-карбїдова матриця зміцнена алмазними зернами). Їх механічні характеристики в значній мірі залежать від появи розривів суцільності матеріалу (псевдопори), які, як правило, виникають на міжфазовій границі і розміщені по частинам сферичної чи еліпсоїдальної поверхонь [32, 92].

Тут необхідно вказати на ті труднощі, із якими пов'язані розв'язки основних граничних задач просторової теорії пружності. Як стверджується [2, 179, 183, 228], вони виникають не стільки на етапі побудови розв'язку рівнянь рівноваги Ламе, скільки у виконанні необхідних граничних умов на поверхні тіла. Причому ці труднощі суттєво залежать від виду поверхонь, які можуть мати нульову, сталу, змінну кривину чи включати особливі лінії (точки) [105, 183, 228, 233].

Така ж ситуація спостерігається й при дослідженні просторових задач лінійної механіки руйнування, де виникнення математичних труднощів насамперед пов'язане з геометрією тріщин. Наприклад, у випадку симетрії фізичних полів відносно площини розташування тріщини приходимо зразу до задачі із мішаними граничними умовами, коли на одній частині площини задані переміщення, а на іншій частині — напруження. Ці задачі споріднені класу контактних задач теорії пружності і до їх розв'язання можна застосовувати методи, розвинені, наприклад, у роботах [5, 6, 45, 46, 55, 186-188, 204]. Тому ці задачі вже давно віднесені [202] до класу мішаних задач механіки деформівного твердого тіла.

При розгляді просторово-вигнутих тріщин у тривимірних тілах ця проста ситуація значно ускладнюється. Наприклад, вже при дослідженні пружного простору з розрізом, що лежить на частині сферичної поверхні, вказана симетрія відсутня і граничні умови за методом Бюкнера [157] задаються для зусиль тільки на поверхні розрізу. На другій частині граничної сфери задаються не переміщення, а умови для різниці переміщень зовнішньої та внутрішньої областей. Для розв'язування задачі виникає необхідність застосовувати загальні рівняння рівноваги для кулі і простору з кулевидною порожниною й визначати не дві послідовності невідомих коефіцієнтів, а чотири. Резюмуючи усе сказане, приходимо до висновку, що у теорії просторових тріщин маємо цілком закономірну тенденцію, коли ускладнення геометрії розрізів приводить до необхідності розробляти більш ускладнені математичні методи для їх розв'язання й до значного збільшення математичних операцій,

необхідних для їх аналізу. Швидше за все цими обставинами пояснюється той факт, що аналізу полів напружень та переміщень пружних тіл з розрізами об'ємної форми присвячені одиничні публікації. Але, необхідно відмітити, що на важливість такого аналізу для інженерної практики не раз вказувалось у науковій літературі [142, 143]. Наприклад, на IV Міжнародній конференції з механіки руйнувань (1983 р.) у Канаді проблема «побудови методів розрахунку напружено-деформівного стану пружних та пружно-пластичних тіл з просторовими тріщинами складної форми» [141, ст. 7] була предметом спеціального обговорення світовою науковою спільнотою інженерів-механіків, математиків і визнана глобально-приоритетною на майбутнє. Відомо, що в математиці є ряд важливих практичних і теоретичних задач над розв'язанням яких працюють провідні наукові центри світу десятки років. Аналогічна ситуація склалася і з розв'язанням класу задач теорії пружності для тіл з просторовими тріщинами складної форми. Ця проблема далека до стратегічного вирішення, але ряд суттєвих тактичних результатів в цьому напрямку вже отримані і їх огляд приведено далі.

Вперше осесиметрична крайова задача теорії пружності для нескінченного тіла з неплоским розрізом, а саме з розрізом по частині сферичної поверхні, розглядалася у роботі Л.Т. Бойко, В.А. Зюзіна, В.І. Моссаковського [26]. Пізніше ця ж задача досліджувалась у роботах [23—25, 67, 78]. Як вказувалось у статтях [69, 195] у всіх наведених вище дослідженнях були допущені неточності, внаслідок чого отримані у цих роботах розв'язки не можна визнати коректними.

Вказані похибки породжені складністю задачі і відсутністю на той

НАУКОВО-ТЕХНІЧНА БІБЛІОТЕКА

Інв. №

17 447634

час ефективного аналітичного методу розв'язання такого класу задач. З результатів робіт [69, 187] випливає, що в перелічених вище працях не проводилось дослідження напружено-деформівного стану поблизу розрізу та у довільній точці пружного простору, а також не аналізувалися коефіцієнти інтенсивності напружень.

Задача про кручення пружного простору із сферичним розрізом досліджувалась у роботах [68, 236]. Чисельні результати, а також формули для обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень у них відсутні. Більш детальний огляд усіх цих робіт надано на початку другого розділу.

Цікава задача про розтяг пружного простору із сферичним розрізом з дослідженням зони контакту поверхонь розрізу розглядалась у роботі [70].

Більш складна задача про розтяг пружного півпростору із сферичним розрізом розглядалась у статті В.С. Проценка та О.В. Головченка [196].

Розв'язанню основних осесиметричних задач теорії пружності для півпростору з розрізом по частині гіперболоїдної поверхні з використанням метода  $p$  — аналітичних функцій присвячено роботи [79, 223, 224].

Осесиметрична задача для пружного півпростору з параболоїдальним розрізом була предметом досліджень у праці [98].

Кручення пружного півпростору з розрізами по частинам циліндричної, параболоїдальної та конічної поверхонь розглядалась у статтях [66, 167, 216, 235].

Аналітичний та чисельний аналіз задачі про циліндричний розріз у анізотропному пружному просторі наданий у роботі [279], при цьому у розв'язку задачі теорії пружності методом інтегральних рівнянь враховувалися лише члени, що мають у напруженнях кореневу особливість.

Розробці наближених методів дослідження напружень поблизу просторово-вигнутих тріщин з використанням граничних інтегральних рівнянь, методів скінчених елементів і теорії потенціалів присвячені роботи [149, 215, 250, 253, 264, 305, 312, 326] та ін.

Відмітимо, в цьому огляді не відображені результати досліджень автора [96, 110—139, 231, 333—338] по цій темі, які представлені у даній роботі. За цей період дослідження деяких розділів проводилось паралельно або перетиналося у часі із дослідженнями інших авторів. Це стосується задачі про осесиметричне деформування пружного простору з розрізами по частинам сферичної, циліндричної, конічної та параболічної поверхонь. Доцільність включення останніх із перерахованих задач у дану роботу продиктована прагненням показати результативність і ефективність запропонованого аналітичного методу до розв'язання мішаних просторових задач математичної теорії пружності, необхідністю зберегти єдиний підхід до повноти дослідження і всестороннього висвітлення теми, і саме головне тими обставинами, що аналітичний та чисельний аналіз механічних характеристик у роботах інших авторів не проводився, а тому в них не були надані рекомендації інженерного характеру для розрахунку елементів конструкцій на міцність.

В цілому, із аналізу перелічених вище опублікованих робіт можна зробити висновок наведений нижче:

- відсутній ефективний аналітичний метод розв'язання осесиметричних задач теорії пружності для тіл із розрізами, що лежать на поверхнях сталої (відмінної від нуля) або змінної кривини;
- задачі про деформацію обмежених та складених тіл з тріщинами просторово-вигнутої форми на даний час являються фактично не дослідженими;
- аналіз впливу кривини поверхні тріщини на напружено-деформівний стан тіла не проводився.

Монографія присвячена розробці та розвитку аналітичних методів дослідження напружено-деформівного стану тривимірних тіл, послаблених внутрішніми просторово-вигнутими тріщинами. Основними складовими цієї наукової проблеми являються:

- вибір геометричної моделі тріщини у вигляді частини поверхні обертання з відмінною від нуля кривиною і постановка відповідної крайової задачі механіки деформівного твердого тіла;
- розробка загального аналітичного методу розв'язування нового класу задач теорії пружності про напружений стан пружних тіл з розрізами по частинам поверхонь обертання;
- розширення границь застосування розвинутого аналітичного методу на клас нових задач про осесиметричне деформування нескінчених пружних тіл з тріщинами, які лежать на сферичній, циліндричній, еліпсоїдальній, параболоїдальній та конічній поверхнях;

- розширення границь застосування запропонованого і розвинутого аналітичного методу на розв'язування класу задач про рівновагу кусково-однорідних або скінчених тіл, послаблених просторовими розрізами;
- створення асимптотичного методу аналізу полів напружень та переміщень поблизу граничних кіл вказаних розрізів;
- проведення чисельного та аналітичного розв'язку регулярних (сингулярних) систем інтегро-диференціальних рівнянь та дослідження коефіцієнтів інтенсивності напружень і локального напружено-деформівного стану поблизу розрізів в залежності від їх геометрії, прикладених зусиль та пружних властивостей матеріалів;
- виявлення нових механічних ефектів, пов'язаних із геометричним параметрами тріщин та розробка рекомендацій до їх застосування у інженерній практиці при розрахунку елементів конструкцій на міцність та надійність.

Всі перелічені проблеми розглядаються в узагальненому і систематизованому вигляді в підготовленій монографії, яка написана на основі опублікованих в періодичній літературі наших робіт. В бібліографічних каталогах наукових видань і реферативних журналах монографій за подібною тематикою не знайдено.

Структура роботи віддзеркалена у змісті.

## ОСЕСИМЕТРИЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ПРУЖНИХ ТІЛ, ЯКІ ПОСЛАБЛЕНІ РОЗРІЗАМИ ПО ЧАСТИНАМ ПОВЕРХНЕЙ ОБЕРТАННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Як відомо [157, 171, 172], значні успіхи в області механіки руйнування, як у нашій країні, так і за кордоном, були досягнуті за короткий проміжок часу завдяки високому рівню розвитку математичних методів теорії пружності. Розв'язки задач про рівновагу пружних тіл, які послаблені розрізами по поверхнях обертання другого порядку, також базуються на загальних розв'язках основних граничних задач теорії пружності для тіл обертання в ізотермічних та криволінійних координатах [109, 216].

Детальна історична довідка про дослідження основних граничних задач у цих координатах, починаючи з робіт 1873 року, наведена в унікально-фундаментальній монографії А.Т. Улітка [228].

Не зупиняючись на аналізі інших розв'язаних задач теорії пружності для тіл обертання, відмітимо лише різноманітність математичних методів, що застосовувалися для розв'язування даного класу задач [2, 86, 90, 95, 105, 106, 161, 179, 183, 189, 190, 221, 228, 233] та ін.

Однак, найбільш загальним методом побудови розв'язків не лише системи рівнянь тривимірної теорії пружності, але й інших задач математичної фізики, є добре розвинений метод власних функцій. Що стосується векторних формулювань граничних задач теорії пружності для тіл обертання, то їх розв'язок через побудовані повні ортогональні системи векторних функцій наведений в оригінальних

працях А.Т. Улітко [228]. Цей метод виявився досить ефективним при розв'язуванні великої кількості конкретних задач просторової теорії пружності [57—59, 96—98, 229] та ін.

Нижче, побудова розв'язку осесиметричного рівняння Ламе проводиться методом його безпосереднього інтегрування.

### §1. Розв'язування осесиметричних рівнянь Ламе у довільних ізотермічних координатах обертання

Для однорідного ізотропного середовища векторне рівняння Ламе має вигляд [105]

$$2 \frac{m-1}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = 0, \quad (1.1)$$

де  $\vec{u}$  — вектор пружних переміщень;  $m$  — число Пуассона. Рівняння (1.1) записане для випадку відсутності об'ємних сил.

Розв'язок системи (1.1) мають задовольняти відповідні граничні умови, які задані на поверхні тіла. Будемо розглядати такий випадок, коли на поверхні тіла заданий вектор зовнішніх зусиль, а вектор пружних переміщень задовольняє умову [105]

$$2G \left[ \vec{n} \frac{\operatorname{div} \vec{u}}{m-2} + (\vec{n} \cdot \operatorname{grad}) \vec{u} + 0,5(\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{u}) \right]_S = \vec{F}_n, \quad (1.2)$$

де  $G$  — модуль зсуву матеріалу;  $\vec{n}$  — орт зовнішньої нормалі до граничної поверхні тіла  $S$ ;  $\vec{F}_n$  — заданий вектор зовнішніх зусиль на поверхні  $S$ .

Інтегрування рівнянь (1.1) проводимо в ізотермічних координатах обертання  $\xi, \eta, \varphi$ , які вводимо за допомогою наступних рівностей [228]

$$z + i\rho = f(\xi + i\eta) = \alpha(\xi, \eta) + i\beta(\xi, \eta), \quad \varphi = \varphi, \quad (1.3)$$

де  $f(\zeta)$  — довільна аналітична функція у площині  $\zeta = \xi + i\eta$ ;  $z, \rho, \varphi$  — циліндричні координати.

На рис.2 показано переріз тіла обертання площинами  $\varphi = \varphi_0$  та  $\varphi = \varphi_0 + \pi$ , а також координатні поверхні  $\xi = \text{const}$  та  $\eta = \text{const}$  та одиничні вектори  $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$  та  $\vec{e}_z, \vec{e}_\rho$ .

Дійсна та уявна частина функції  $f(\zeta)$  пов'язані співвідношеннями Коші-Рімана [99]

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{\partial \beta}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} = -\frac{\partial \beta}{\partial \xi}. \quad (1.4)$$

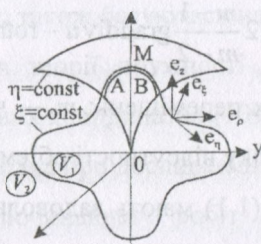


Рис. 2. Ізотермічні координати обертання

Масштабні коефіцієнти Ламе в ізотермічних координатах обертання знаходяться за формулами [88]

$$\begin{aligned} h_\xi = h_\eta = h &= \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \left[ \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[ \left( \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$h_\varphi = \rho = \beta(\xi, \eta).$$

Далі нам знадобляться представлення наступних диференціальних операторів у криволінійних координатах [88, 109]

$$\text{grad}f = \frac{\bar{e}_\xi}{h_\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\bar{e}_\eta}{h_\eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\bar{e}_\varphi}{h_\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (1.6)$$

$$\text{div} \bar{u} = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\varphi} \left\{ \frac{\partial(u_\xi h_\eta h_\varphi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(u_\eta h_\xi h_\varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial(u_\varphi h_\xi h_\eta)}{\partial \varphi} \right\}, \quad (1.7)$$

$$(\text{rot} \bar{u})_\xi = \frac{1}{h_\xi h_\varphi} \left\{ \frac{\partial(u_\varphi h_\varphi)}{\partial \eta} - \frac{\partial(u_\eta h_\eta)}{\partial \varphi} \right\},$$

$$(\text{rot} \bar{u})_\eta = \frac{1}{h_\xi h_\varphi} \left\{ \frac{\partial(u_\xi h_\xi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(u_\varphi h_\varphi)}{\partial \xi} \right\},$$

$$(\text{rot} \bar{u})_\varphi = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial(u_\eta h_\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial(u_\xi h_\xi)}{\partial \eta} \right\}, \quad (1.8)$$

де  $u_\varphi, u_\xi, u_\eta$  — проєкції вектора переміщень на одиничні вектори

$\bar{e}_\varphi, \bar{e}_\xi, \bar{e}_\eta$ .

Як відомо [109], осесиметрична задача теорії пружності для тіл обертання розпадається на дві незалежні задачі — задачу про деформацію у меридіальній площині  $\varphi = \text{const}$  та задачу кручення, у якій відмінна від нуля є лише компонента вектора переміщень  $u_\varphi$ . В першому випадку вектор переміщень у криволінійному базисі  $\bar{e}_\xi, \bar{e}_\eta$

має вигляд

$$\bar{u} = u_\xi(\xi, \eta) \bar{e}_\xi + u_\eta(\xi, \eta) \bar{e}_\eta. \quad (1.9)$$

Якщо для невідомих дивергенції та ротора векторного поля ввести позначення [228]

$$\begin{aligned} \text{div} \bar{u} &= 2 \frac{m-2}{m} \Theta(\xi, \eta), \\ \text{rot} \bar{u} &= 4 \frac{m-1}{m} e_\varphi \omega(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (1.10)$$

то рівняння (1.1) запишеться у вигляді

$$\text{grad } \Theta(\xi, \eta) - \text{rot} \left[ \vec{e}_\varphi \omega(\xi, \eta) \right] = 0. \quad (1.11)$$

Це векторне рівняння рівносильне системі скалярних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial(\omega h_\varphi)}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial(\omega h_\varphi)}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Після диференціювання системи (1.12) було показано, що  $\Theta(\xi, \eta)$  задовольняє рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( h_\varphi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( h_\varphi \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (1.13)$$

а функція  $\omega(\xi, \eta)$  такому рівнянню

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial(\omega h_\varphi)}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial(\omega h_\varphi)}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (1.14)$$

У багатьох криволінійних координатах обертання розв'язки рівнянь (1.13) та (1.14) проводиться методом відокремлення змінних або за допомогою відповідних інтегральних перетворень [56, 233]. Ясно, що розв'язок системи (1.12) запишеться у вигляді нескінчених рядів за повними системами власних функцій із двома нескінченими послідовностями невідомих коефіцієнтів або представиться через відповідні невласні інтеграли з двома невідомими функціями щільності.

З рівності (1.10) отримуємо

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (u_\xi h h_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (u_\eta h h_\varphi) \right\} = 2 \frac{m-2}{m} \Theta(\xi, \eta);$$

$$\frac{1}{h_{\xi}h_{\eta}} \left\{ \frac{\partial(u_{\eta}h)}{\partial\xi} - \frac{\partial(u_{\xi}h)}{\partial\eta} \right\} = 4 \frac{m-1}{m} \omega(\xi, \eta);$$

$$h = h_{\xi} = h_{\eta}. \quad (1.15)$$

Враховуючи значення косинусів кутів між одиничними векторами [88, 109]

$$\bar{e}_{\rho} \cdot \bar{e}_{\eta} = \bar{e}_z \cdot \bar{e}_{\xi} = \frac{1}{h} \frac{\partial\alpha}{\partial\xi},$$

$$\bar{e}_z \cdot \bar{e}_{\eta} = -\bar{e}_{\rho} \cdot \bar{e}_{\xi} = \frac{1}{h} \frac{\partial\alpha}{\partial\eta}, \quad (1.16)$$

а також формули

$$u_{\xi} = \frac{1}{h} \left( -\frac{\partial\alpha}{\partial\eta} u_{\rho} + \frac{\partial\alpha}{\partial\xi} u_z \right),$$

$$u_{\eta} = \frac{1}{h} \left( -\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} u_{\rho} + \frac{\partial\alpha}{\partial\eta} u_z \right) \quad (1.17)$$

для циліндричних проекцій вектора переміщень отримаємо систему диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\frac{1}{h^2} \frac{\partial\alpha}{\partial\xi} \left( \frac{\partial u_{\rho}}{\partial\xi} - \frac{\partial u_z}{\partial\eta} \right) + \frac{1}{h^2} \frac{\partial\alpha}{\partial\eta} \left( \frac{\partial u_z}{\partial\xi} + \frac{\partial u_{\rho}}{\partial\eta} \right) = 4 \frac{m-1}{m} \omega(\xi, \eta),$$

$$\frac{1}{h^2} \frac{\partial\alpha}{\partial\xi} \left( \frac{\partial u_z}{\partial\eta} - \frac{\partial u_{\rho}}{\partial\xi} \right) + \frac{1}{h^2} \frac{\partial\alpha}{\partial\eta} \left( \frac{\partial u_z}{\partial\xi} + \frac{\partial u_{\rho}}{\partial\eta} \right) + h_{\varphi}^{-1} u_{\rho} = 2 \frac{m-2}{m} \Theta(\xi, \eta). \quad (1.18)$$

Якщо послідовно помножити перше рівняння на  $\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}$ ,  $\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}$ , а друге

— на  $\left( -\frac{\partial\alpha}{\partial\eta} \right)$ ,  $\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}$  і потім додати ці рівняння, то отримаємо

$$\frac{\partial u_z}{\partial\xi} + \frac{1}{h_{\varphi}} \frac{\partial(u_{\rho}h_{\varphi})}{\partial\eta} = 2 \frac{m-2}{m} \frac{\partial\alpha}{\partial\xi} \Theta + 4 \frac{m-1}{m} \frac{\partial\alpha}{\partial\eta} \omega;$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial \eta} - \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial (u_\rho h_\varphi)}{\partial \xi} = 2 \frac{m-2}{m} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \Theta - 4 \frac{m-1}{m} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \omega. \quad (1.19)$$

Однорідна система цих рівнянь має вигляд системи (1.12) і її розв'язок  $\bar{u}_\rho$ ,  $\bar{u}_z$  знаходиться аналогічно, а частинний розв'язок  $u_\rho^*$ ,  $u_z^*$  знайдено методом варіації довільних сталих [76] через наведену нижче комбінацію функції  $\omega(\xi, \eta)$  і  $\Theta(\xi, \eta)$ .

$$\begin{aligned} u_\rho^* &= \frac{3m-4}{m} \beta(\xi, \eta) \Theta(\xi, \eta) + 4 \frac{m-1}{m} \alpha(\xi, \eta) \omega(\xi, \eta), \\ u_z^* &= -4 \frac{m-1}{m} \alpha(\xi, \eta) \Theta(\xi, \eta) + \frac{3m-4}{m} \beta(\xi, \eta) \omega(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Достовірність частинного розв'язку можна перевірити шляхом безпосередньої підстановки (1.20) в систему (1.19).

Загальний розв'язок векторного рівняння Ламе (1.1) відносно циліндричних компонент вектора переміщень в довільних ізотермічних координатах має вигляд

$$u_\rho = \bar{u}_\rho + u_\rho^*, \quad u_z = \bar{u}_z + u_z^*. \quad (1.21)$$

де  $\bar{u}_\rho$ ,  $\bar{u}_z$  задовольняють відповідно рівнянням (1.13), (1.14), а  $u_\rho^*$ ,  $u_z^*$  визначаються рівностями (1.20).

У випадку чистого кручення пружного тіла обертання відмінною від нуля буде єдина компонента вектора переміщень  $u_\varphi = u(\xi, \eta) = u$ , а тому  $\text{div} \bar{u} = 0$ . Векторне рівняння Ламе (1.1) матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial (h_\varphi u)}{\partial \xi} \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial (h_\varphi u)}{\partial \eta} \right\} = 0. \quad (1.22)$$

Таким чином, якщо на поверхні тіла обертання  $S$  задані переміщення, то деформівний стан в довільній точці тіла знаходиться

за допомогою такої послідовності операцій. Насамперед вибирається відповідна система криволінійних координат обертання і потім будується у явному вигляді розв'язок (1.21). Ясно, що формули (1.21) необхідно перетворити так, щоб на поверхні тіла  $S$  вони представлялись у вигляді розкладу за повними системами власних функцій. Зауважимо, що в силу властивостей спеціальних функцій, через які дається розв'язок рівнянь (1.13) та (1.14) такі перетворення завжди можна виконати. Після цього відомі переміщення на границі тіла  $S$  подаються у вигляді розкладів по тим самим системам власних функцій дискретного або неперервного спектру [228].

У випадку, коли задані напруження на поверхні тіла  $S$ , то граничні умови будемо формулювати відносно циліндричних проєкцій вектора зусиль  $\vec{F}_n$ .

Нехай напруження задані на поверхні  $S(\xi = \text{const})$  з нормаллю  $\vec{n} = \vec{e}_\xi$ . Очевидно, що через проєкції вектора переміщень (1.21) можна знайти вирази для компонент тензора напружень як у циліндричній системі координат, так і у системі координат  $\xi, \eta, \varphi$ . Однак, такий шлях досить громіздкий, що пов'язано із застосуванням у ряді диференціальних операцій операторів такого типу

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial z}; \quad h^2 \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Простіше за все вирази для циліндричних проєкцій вектора зусиль отримати з рівності (1.2). Якщо у цій рівності покласти  $\vec{n} = \vec{e}_\xi$ , а потім спроектувати його на циліндричні вісі, то після ряду перетворень отримаємо

$$hR_{\xi} = 2G \left[ \frac{\partial u_p}{\partial \xi} - \frac{2}{m} \Theta(\xi, \eta) \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} - 2 \frac{m-1}{m} \omega(\xi, \eta) \frac{\partial \alpha}{\alpha \xi} \right], \quad (1.23)$$

$$hZ_{\xi} = 2G \left[ \frac{\partial u_z}{\partial \xi} - \frac{2}{m} \Theta(\xi, \eta) \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} - 2 \frac{m-1}{m} \omega(\xi, \eta) \frac{\partial \alpha}{\alpha \eta} \right].$$

У цих формулах індекс  $\xi$  означає, що циліндричні проекції  $R_{\xi}, Z_{\xi}$  вектора зусиль  $\vec{F}_n$  розглядаються на довільній поверхні  $\xi = \text{const}$ .

Аналогічно, на поверхні  $\eta = \text{const}$  вектор нормалі дорівнює  $\vec{n} = \vec{e}_{\eta}$  і циліндричні проекції  $R_{\eta}, Z_{\eta}$  вектора зусиль представляються у вигляді

$$hR_{\eta} = 2G \left[ \frac{\partial u_p}{\partial \eta} + \frac{2}{m} \Theta(\xi, \eta) \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} - 2 \frac{m-1}{m} \omega(\xi, \eta) \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \right],$$

$$hZ_{\eta} = 2G \left[ \frac{\partial u_z}{\partial \eta} + \frac{2}{m} \Theta(\xi, \eta) \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + 2 \frac{m-1}{m} \omega(\xi, \eta) \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \right]. \quad (1.24)$$

Вирази для компонент тензора напружень у довільних ізотермічних координатах обертання можна отримати також із рівності (1.2), якщо у ньому по чергово покласти  $\vec{n} = \vec{e}_{\xi}; \vec{e}_{\eta}; \vec{e}_{\varphi}$ , а потім спроектувати отримані рівності на відповідні координатні вісі  $O\xi, O\eta, O\varphi$ . При цьому необхідно пам'ятати, що одиничні вектори  $\vec{e}_{\xi}, \vec{e}_{\eta}, \vec{e}_{\varphi}$  є функціями координат  $\xi, \eta, \varphi$  і тому необхідно враховувати формули такого вигляду [88]

$$\frac{\partial \vec{e}_{\xi}}{\partial \xi} = -\frac{\vec{e}_{\eta}}{h_{\eta}} \frac{\partial h_{\xi}}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \vec{e}_{\xi}}{\partial \eta} = \frac{\vec{e}_{\eta}}{h_{\xi}} \frac{\partial h_{\eta}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \vec{e}_{\xi}}{\partial \varphi} = \frac{\vec{e}_{\varphi}}{h_{\xi}} \frac{\partial h_{\varphi}}{\partial \xi}.$$

У подальшому компоненти тензора напружень  $\sigma_{\xi\xi}$ ,  $\sigma_{\xi\eta}$ ,  $\sigma_{\eta\eta}$  будемо знаходити більш простим шляхом, а саме через наступні формули

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= R_{\xi}(\bar{e}_{\rho} \cdot \bar{e}_{\xi}) + Z_{\xi}(\bar{e}_z \cdot \bar{e}_{\xi}), \\ \sigma_{\xi\eta} &= R_{\xi}(\bar{e}_{\rho} \cdot \bar{e}_{\eta}) + Z_{\xi}(\bar{e}_z \cdot \bar{e}_{\eta}), \\ \sigma_{\eta\eta} &= R_{\eta}(\bar{e}_{\rho} \cdot \bar{e}_{\eta}) + Z_{\eta}(\bar{e}_z \cdot \bar{e}_{\eta}),\end{aligned}\quad (1.25)$$

де косинуси кутів між одиничними векторами визначаються рівностями (1.16).

У випадку кручення тіла обертання вектор зусиль на поверхні  $\xi = \text{const}$  та  $\eta = \text{const}$  представляється у вигляді

$$h\bar{F}_{\xi} = 2G\bar{e}_{\varphi} \left[ \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{1}{h_{\varphi}} \frac{\partial(uh_{\varphi})}{\partial \xi} \right], \quad (1.26)$$

$$h\bar{F}_{\eta} = 2G\bar{e}_{\eta} \left[ \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{2h_{\varphi}} \frac{\partial(uh_{\varphi})}{\partial \eta} \right].$$

звідки випливає

$$\sigma_{\xi\varphi} = \frac{G}{h} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{h_{\varphi}} \frac{\partial h_{\varphi}}{\partial \xi} \right), \quad (1.27)$$

$$\sigma_{\eta\varphi} = \frac{G}{h} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u}{h_{\varphi}} \frac{\partial h_{\varphi}}{\partial \eta} \right).$$

Таким чином, розв'язок основних осесиметричних задач теорії пружності для внутрішньої або зовнішньої області відносно деякої поверхні обертання зводиться до проблеми визначення двох нескінчених послідовностей невідомих коефіцієнтів або двох невідомих густин, що входять до (1.21).

Зауважимо, що розглянутий вище підхід до дослідження осесиметричного напружено-деформівного стану тіл обертання можна розповсюдити і на випадок неосесиметричних задач теорії пружності.

## §2. Постановка задач про рівновагу пружних тіл, послаблених розрізами по частинам поверхонь обертання

Нехай тіло скінчених розмірів послаблене внутрішньою тріщиною, яка лежить на деякій довільній поверхні  $S$ . Припустимо, що тріщина розташована на достатньо великій відстані від поверхні тіла, тому вплив границь тіла на напружений стан поблизу тріщини незначний і є можливість замінити скінчені розміри тіла нескінченими. Першочерговою задачею являється проблема математичного моделювання геометрії реальної тріщини. Відомо, що в пластинах та оболонках прямолінійні тріщини представляються різноманітними моделями. Це можуть бути граничні випадки еліптичного чи прямокутного отвору у пластині, коли мала піввісь еліпса і мала сторона прямокутника прямують до нуля. Ясно, що представлення лінії розриву суцільності матеріалу, наприклад, як границі послідовності еліпсів, являється цілком довільним. Замість еліпса можна було взяти іншу овальну чи з кутовими точками криву і у граничному випадку ми б отримали різні результати. Як показано у роботах М.Ф. Морозова [150] різні геометричні моделі тріщин приводять до різних значень коефіцієнтів інтенсивності напружень, котрі відрізняються один від одного у декілька разів. Наукові і експериментальні дослідження [10, 33, 71] однозначно показали, що найбільш адекватно моделює реальну тріщину в пружному тілі

математичний розріз з нульовою відстанню між протилежними берегами і нульовим радіусом кривини у його вершини. Ця модель тріщини сьогодні є загальноприйнятою і домінуючою [178, 203, 243]. У подальшому під словами “тріщина”, “розріз”, “щілина” ми будемо розуміти саме таку модель, однак, поширену на випадок поверхневих тріщин у тривимірних тілах. Початок такому моделюванню, швидше за все, покладений у роботах П.А. Ребіндера [206], де була введена модель клиноподібної тріщини з гирлом, де відстань між берегами сходиться до міжатомної відстані.

У просторовому випадку тріщини, як уже вказувалося у вступі, моделювалися, зазвичай, деякими плоскими поверхнями. Як правило, дослідники зупинялися на тріщинах дископодібної та еліптичної форми [10, 175].

У даній роботі реальні тріщини пропонується моделювати математичними розрізами, котрі лежать по частинам довільних поверхонь обертання.

Нехай пружний простір послаблений математичним розрізом, що розміщений на частині координатної поверхні  $S$  ( $\xi = \xi_0, 0 \leq \eta \leq \eta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ). У меридіональному перерізі щілина співпадає з кривою АВМ (рис. 2). Вважається, що на нескінченості до пружного простору прикладена така система осесиметричних сил, яка виключає контактування поверхонь розрізу.

До розв'язування цієї задачі застосуємо принцип Бюкнера [157], який базується на методі суперпозиції. Сутність його базується на таких міркуваннях. Розв'язок поставленої задачі А представимо у вигляді суми розв'язків двох статичних задач: задачі Б про

напружено-деформівний стан суцільного пружного масиву під дією зовнішніх сил і задачі В про рівновагу пружного простору з розрізом по поверхні  $S$ , коли зусилля прикладені лише на поверхні щілини. У задачі Б система зовнішніх сил співпадає з зовнішніми силами задачі А, а в задачі В зусилля на поверхні розрізу рівні за величиною і протилежно напрямлені тим зусиллям, що виникають на умовно виділеній поверхні щілини  $S$  у задачі Б (рис. 3).

Суперпозиція розв'язків задач Б та В еквівалентна розв'язку задачі про рівновагу пружного простору за умови, що поверхні тріщин вільні від напружень, а масив знаходиться під дією лише зовнішнього поля осесиметричних сил. Розв'язок задачі Б знаходиться порівняно просто й поля напружень не мають особливостей у внутрішніх точках тіла. Тому характер особливостей напружень у початковій задачі буде впливати із розв'язків задачі В. У силу сказаного, подальші дослідження будуть присвячені задачі В із заданими зусиллями на поверхні щілини. В колективній монографії [202] такі задачі відносяться до класу мішаних просторових задач механіки деформівного твердого тіла.

Подальший етап постановки задачі базується на використанні методів частинних областей та сшивання, який на даний час є досить поширеним при дослідженні крайових задач математичної фізики [145]. Сутність їх полягає у тому, що складну область розділяють на дві чи більше простих областей таким чином, щоб у кожній із них фізичні поля представлялися у вигляді розкладу за повними системами власних функцій дискретного чи неперервного спектру.

Оскільки явний вигляд системи власних функцій відомий, то задача зводиться до визначення нескінчених систем невідомих коефіцієнтів або до знаходження невідомих функцій густин. Природно, що при цьому необхідно «сшити» відповідні розв'язки, так як мають виконуватися умови неперервності фізичних полів на загальних ділянках сусідніх областей.

У силу сказаного, розібі'ємо пружний простір поверхнею  $S$  на дві області: внутрішню область  $V_1(\xi \leq \xi_0)$  та зовнішню область  $V_2(\xi \geq \xi_0)$ .

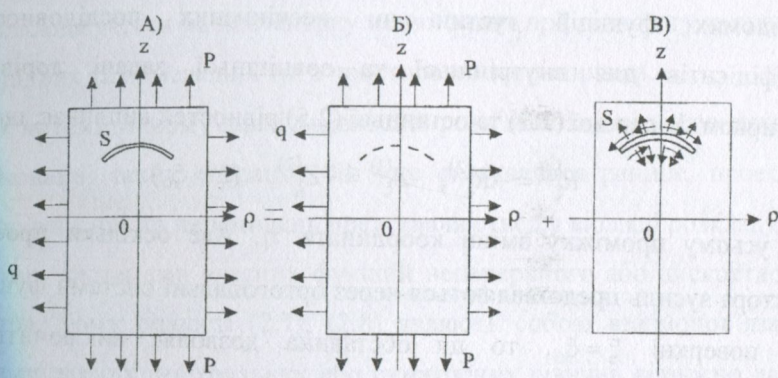


Рис.3. Принцип суперпозиції

Граничні умови у задачі В формулюються таким чином

$$\bar{F}_\xi^{(1)} = -\bar{F}_\xi^{(2)} = \bar{f}(\xi, \eta), \quad (\xi = \xi_0, \eta < \eta_0). \quad (2.1)$$

Ці граничні рівності повинні бути доповнені умовою неперервності векторних полів переміщень та зусиль на поверхні обертання поза розрізом, тобто

$$\bar{u}_1(\xi, \eta) = \bar{u}_2(\xi, \eta), \quad \bar{F}_\xi^{(1)} = -\bar{F}_\xi^{(2)}, \quad (\xi = \xi_0, \eta > \eta_0). \quad (2.2)$$

При переході від векторних рівностей (2.1), (2.2) до скалярних, необхідно розглядати проекції векторів переміщень та зусиль не на ізотермічні осі обертання, а на циліндричні осі координат, тобто

$$R_{\xi}^{(1)} = -R_{\xi}^{(2)} = f_1(\xi, \eta); \quad Z_{\xi}^{(1)} = -Z_{\xi}^{(2)} = f_2(\xi, \eta), \quad (\xi = \xi_0, 0 \leq \eta < \eta_0). \quad (2.3)$$

$$u_{\xi}^{(1)} = u_{\xi}^{(2)}, \quad u_{\rho}^{(1)} = u_{\rho}^{(2)}, \quad (\xi = \xi_0, \eta > \eta_0). \quad (2.4)$$

$$R_{\xi}^{(1)} = -R_{\xi}^{(2)}, \quad Z_{\xi}^{(1)} = -Z_{\xi}^{(2)}, \quad (\xi = \xi_0, \eta > \eta_0). \quad (2.5)$$

Умов (2.3)—(2.5) достатньо для знаходження невідомих розв'язку рівняння (1.1). Справді, як вказувалось раніше, число невідомих функцій густин чи нескінчених послідовностей коефіцієнтів для внутрішньої та зовнішньої задачі дорівнює чотирьом. Із першої (2.3) та останньої (2.5) рівностей випливає, що

$$R_{\xi}^{(1)} = -R_{\xi}^{(2)}, \quad Z_{\xi}^{(1)} = -Z_{\xi}^{(2)}, \quad (\xi = \xi_0). \quad (2.6)$$

на усьому проміжку зміни координати  $\eta$ . Але оскільки проекції вектора зусиль представляються через ортогональні системи функцій на поверхні  $\xi = \xi_0$ , то ця обставина дозволяє виключити із подальшого розгляду сталі внутрішньої або зовнішньої задачі. Останні дві невідомі функції щільності чи дві послідовності невідомих коефіцієнтів знаходяться із наведених нижче рівнянь

$$R_{\xi}^{(1)} = f_1(\xi, \eta), \quad Z_{\xi}^{(1)} = f_2(\xi, \eta), \quad (\xi = \xi_0, 0 \leq \eta < \eta_0), \quad (2.7)$$

$$u_{\xi}^{(1)} - u_{\xi}^{(2)} = 0, \quad u_{\rho}^{(1)} - u_{\rho}^{(2)} = 0, \quad (\xi = \xi_0, \eta \geq \eta_0), \quad (2.8)$$

де  $u_{\xi}^{(2)}$  та  $u_{\rho}^{(2)}$  представляються через невідомі сталі (щільності) внутрішньої задачі.

Аналогічно, у випадку кручення пружного простору з розрізом по частині обертання  $S(\xi = \xi_0, 0 \leq \eta \leq \eta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$  граничні умови мають вигляд

$$u^{(1)} = u^{(2)}, \sigma_{\xi\varphi}^{(1)} = \sigma_{\xi\varphi}^{(2)}, \quad (\xi = \xi_0, \eta > \eta_0), \quad (2.9)$$

$$h\sigma_{\xi\varphi}^{(1)} = h\sigma_{\xi\varphi}^{(2)} = f(\eta), \quad (\xi = \xi_0, 0 \leq \eta < \eta_0), \quad (2.10)$$

де функція  $f(\eta)$  відповідає навантаженню, перенесеному на поверхню розрізу відповідно до принципу Бюкнера [157].

Зауважимо, що таке формулювання граничних умов, легко розповсюджується на постановку нових задач про рівновагу кусково-однорідних та обмежених тіл з просторовими тріщинами.

У математичному плані подальший розв'язок задачі заключається у виконанні таких операцій. Як уже вказувалося раніше, проекції векторів зусиль та переміщень представляються у вигляді розкладу за повними системами власних функцій неперервного або дискретного спектра. Тому рівності (2.7), (2.8) являють собою взаємопов'язану систему парних інтегральних або суматорних рівнянь відносно двох невідомих густин чи нескінчених послідовностей коефіцієнтів.

На даний час відомі декілька методів [202] розв'язування парних рівнянь, однак, специфіка фізичної сутності задач і особливостей структури парних рівнянь потребували дещо іншого підходу до розв'язування взаємопов'язаних систем, який приводиться у §3.

### § 3. Конструктивний розв'язок парних інтегральних та суматорних рівнянь

Розв'язок взаємопов'язаних систем парних інтегральних рівнянь базується на методі розв'язку дуальних рівнянь такого вигляду

$$\begin{aligned} \int_a^b c(\tau)m(\tau)X(\tau,\eta)d\tau &= f(\eta), \quad (a \leq \eta < \eta_0), \\ \int_a^b c(\tau)X(\tau,\eta)d\tau &= g(\eta), \quad (\eta_0 \leq \eta \leq b), \end{aligned} \quad (3.1)$$

де  $c(\tau)$  — невідома густина;  $m(\tau)$ ,  $f(\eta)$ ,  $g(\eta)$  — відомі функції;  $X(\tau,\eta)$  — ядро парної системи і через нього дається розклад функцій  $\Theta(\xi,\eta)$  (1.13) чи  $\omega(\xi,\eta)$  (1.14) на поверхні  $\xi = \xi_0$ ;  $[a, b]$  — замкнутий проміжок зміни координати  $\eta$  (1.3).

Як зазначається у детальному історичному огляді методів розв'язку парних рівнянь [234], вони, швидше за все, вперше зустрілися у роботі Бельтрамі (1881р.) і на цей час у літературі вже накопичилось багато методів їх розв'язування, що пов'язане з широким застосуванням парних рівнянь при дослідженні різних наукових та інженерних задач.

Про переваги цього математичного методу над іншими у колективній академічній роботі [202, с.56] сказано наступне: *"На даний час для розв'язування мішаних задач математичної фізики із аналітичних методів немає більш гнучкого й універсального методу, ніж метод парних рівнянь"*.

Зупинимося коротко на основних методах розв'язування систем вигляду (3.1). Один із методів розв'язування носить назву методу довизначення і його сутність полягає в тому, що, наприклад, друге

рівняння системи (3.1) до визначається на інтервалі  $[a, \eta_0]$  деякою функцією  $\varphi(\eta)$ , тобто

$$\int_a^b c(\tau)X(\tau, \eta)d\tau = \begin{cases} \varphi(\eta), (a \leq \eta < \eta_0) \\ g(\eta), (\eta_0 \leq \eta < b) \end{cases} \quad (3.2)$$

Надалі необхідно знайти таку функцію  $Y(x, \eta)$ , котра б задовольняла рівнянню

$$\int_a^b X(\tau, \eta)Y(t, \eta)d\eta = \delta(t - \tau), \quad (3.3)$$

де  $\delta(t - x)$  — дельта-функція Дірака [52].

Якщо помножити (3.2) на  $Y(x, \eta)$  та проінтегрувати по змінній  $\eta$ , то після ряду перетворень одержимо

$$c(x) = \int_0^{\eta_0} \varphi(\eta)Y(x, \eta)d\eta + \int_{\eta_0}^{\eta_1} g(\eta)Y(x, \eta)d\eta. \quad (3.4)$$

Підстановка (3.4) у перше рівняння системи (3.1) приводить до інтегрального рівняння першого роду щодо невідомої функції  $\varphi(\eta)$ .

Основними дослідженнями в цьому напрямку слід вважати роботи Нобла [294], Г.Я. Попова [186, 188], Трантера [328], Снеддона, Сривастава [319, 323] і ін.

При вирішенні конкретних парних рівнянь у даний час широко застосовується метод регуляризації. Основна ідея цього методу полягає в наявності розв'язків парних рівнянь такого вигляду

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha(\tau)d(\tau)X(\tau, \eta)d\tau &= f(\eta), \quad (a \leq \eta < \eta_0), \\ \int_a^b d(\tau)X(\tau, \eta)d\tau &= g(\eta), \quad (\eta_0 \leq \eta \leq b), \end{aligned} \quad (3.5)$$

де

$$d(\tau) = L_1 f + L_2 g, \quad (3.6)$$

а  $L_1$  та  $L_2$  — відомі лінійні оператори.

Якщо тепер представити  $m(\tau)$  в вигляді

$$m(\tau) = \alpha(\tau) + n(\tau) \quad (3.7)$$

і застосувати до системи (3.1) формулу зворотання (3.6), то для невідомої  $c(\tau)$  дістаємо рівняння

$$c(\eta) + L_1 \left( \int_a^b c(\tau) m(\tau) X(\tau, \eta) d\tau \right) = L_1 f + L_2 g. \quad (3.8)$$

Очевидно, що функції, які входять до складу цього рівняння, задовольняють таким умовам, що забезпечують збіжність розглянутих інтегралів.

Значний внесок у розвиток цього методу внесли роботи Нобла [294, 295], Й.І. Воровича, Ю.О. Устинова [45], З.С. Аграновича, В.А. Марченко, В.П. Шестопалова [249], Д.В. Грилицького, Я.М. Кізіми [55] та ін.

Метод перетворюючих операторів уперше був запропонований у роботі Нобла [296], а потім дістав подальший розвиток у роботах А.А. Баблюяна [3—15], С.М. Мхітаряна [158], Грантера [329], В.М. Александрова [3] та ін.

Його сутність полягає у знаходженні таких комбінацій диференціальних та інтегральних операторів, які дозволяють звести систему (3.1) до одного рівняння з розривною правою частиною

$$\int_a^b c(\tau) u(\tau, \eta) d\tau = \begin{cases} L_1 f, & (a \leq \eta < \eta_0), \\ L_2 g, & (\eta_0 \leq \eta \leq b). \end{cases} \quad (3.9)$$

$$L_1 = \lambda I + D_1 V_1 D_1^*, \quad V_1 \varphi = \int_a^b V_1(\tau, \eta) \varphi(\tau) d\tau,$$

$$L_2 = \lambda I + D_2 V_2 D_2^*, \quad V_2 \varphi = \int_a^b V_2(\tau, \eta) \varphi(\tau) d\tau, \quad (3.10)$$

де  $I$  — тотожній оператор;  $D_1, D_2, D_1^*, D_2^*$  — диференціальні оператори.

При цьому вважається, що для  $u(\tau, \eta)$  мають місце формули перетворення:

$$F(\tau) = \int_a^b u(\tau, \eta) f(\eta) d\eta; \quad f(\eta) = \int_a^b V(\tau, \eta) F(\tau) d\tau, \quad (3.11)$$

які дають розв'язок рівняння (3.9).

Багато різних задач математичної фізики досліджено за допомогою рівнянь (3.11), що розв'язувалися методом підстановки.

Сутність цього методу полягає в наступному. Введенням ще однієї невідомої густини  $c_1(\tau)$  система (3.1) представляється у вигляді двох систем

$$\int_a^b c_1(\tau) m(\tau) X(\tau, \eta) d\tau = f(\eta), \quad (a \leq \eta < \eta_0),$$

$$\int_a^b c_1(\tau) X(\tau, \eta) d\tau = 0, \quad (\eta_0 \leq \eta \leq b). \quad (3.12)$$

$$\int_a^b [c(\tau) - c_1(\tau)] m(\tau) X(\tau, \eta) d\tau = 0, \quad (a \leq \eta < \eta_0),$$

$$\int_a^b [c(\tau) - c_1(\tau)] X(\tau, \eta) d\tau = g(\eta), \quad (\eta_0 \leq \eta \leq b). \quad (3.13)$$

Надалі необхідно виразити невідомі густини через такі інтегральні оператори  $L_1$  та  $L_2$  від деяких допоміжних функцій  $\varphi(t)$  та

$\varphi(t)$ , котрі задовольняли б тотожно, відповідно другому рівнянню системи (3.12) та першому рівнянню системи (3.13).

Такої ситуації легко досягти, якщо представити густини у вигляді

$$c_1(\tau) = L_1\varphi = \int_a^{\eta_0} \varphi(t)Y_1(\tau, t)dt,$$

$$m(\tau)[c(\tau) - c_1(\tau)] = L_2\psi = \int_{\eta_0}^b \psi(t)Y_2(\tau, t)dt, \quad (3.14)$$

де функції  $\varphi(t)$  та  $\psi(t)$  і їх похідні являються неперервними функціями на розглянутих проміжках, а  $Y_1(\tau, t)$  та  $Y_2(\tau, t)$  задовольняють умовам

$$\int_a^b X(\tau, \eta)Y_1(\tau, t)d\tau = H(t - \eta)M(\eta, t), \quad H(t - \eta) = \begin{cases} 1, & t > \eta, \\ 0, & t < \eta. \end{cases}$$

$$\int_a^b X(\tau, \eta)Y_2(\tau, t)d\tau = H(\eta - t)N(\eta, t), \quad (3.15)$$

де  $H(t - \eta)$  — функція Хевісайда [52].

Підстановка (3.14) у рівняння систем, що залишилися, приводить (3.12) і (3.13) до деяких функціональних рівнянь щодо невідомих функцій  $\varphi(t)$  та  $\psi(t)$ . Вибір інтегральних операторів (3.14) не є однозначним. Тому в залежності від вибору операторів  $L_1, L_2$  і властивостей функції  $m(\tau)$  функціональні рівняння відносно  $\varphi(t)$  і  $\psi(t)$  можуть зводитися до інтегральних рівнянь Фредгольма першого чи другого роду, сингулярних рівнянь, інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма чи до нескінчених систем алгебраїчних рівнянь.

Авторами розглянутого підходу до розв'язку парних рівнянь цілком заслужено вважають М.М. Лебедева [101, 103] та Кука [253], тому надалі ми його будемо іменувати методом Лебедева-Кука.

Дуже значний внесок у розвиток цього методу внесли роботи Н.І. Ахієзера [123], Я.С. Уфлянда [234], В.Т. Грінченка, А.Т. Улітка [57—59, 228, 229] та ін.

Перераховане вище ні в якому разі не охоплює всіх методів розв'язування систем виду (3.1). Існує ще ряд методів, які базуються на використанні апарата теорії аналітичних функцій, а також комбіновані підходи, у яких є елементи перерахованих вище методів чи їхньої модифікації. Дуже важливі результати по конструктивній побудові розв'язків парних рівнянь містяться в роботах [4, 7, 8, 30, 31, 34, 39, 41, 50, 65, 144, 177, 185, 208, 209, 291, 292, 301, 302, 321] та ін.

Оригінальний метод розв'язування парних суматорних рівнянь з ядрами у вигляді функцій Лежандра, Матьє, Бесселя і поліномів Якобі, що дозволяє зводити проблему до нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь, розвинений В.П. Шестопаловим [249], а також в інших роботах цього наукового напрямку [40, 89].

Надзвичайно широка і постійна увага провідних науковців світу до проблеми розв'язання парних рівнянь викликана необхідністю побудови розв'язків широкого класу практично важливих задач теорії пружності, термодинаміки, гідромеханіки, електростатики та інших інженерних проблем.

У подальших параграфах парні рівняння вигляду (3.1) розглядаються при значенні ядер, що будуть зустрічатися далі при

розв'язанні конкретних задач про рівновагу пружних тіл, послаблених просторово-вигнутими тріщинами. Ідея їх розв'язування аналогічна ідеї методу Лебедева-Кука, однак, підхід до побудови інтегрального оператора  $L$  відрізняється від підходів, що застосовувалися у роботах [101, 102, 234]. В остаточному підсумку це вплинуло на структуру розв'язуючих рівнянь, які у наших роботах [114, 117, 133, 130] мають вигляд інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма. Цей підхід виявився досить зручним і ефективним на заключній стадії розв'язування задач, а саме, при аналітичному і чисельному дослідженні локальних напружено-деформівних станів поблизу розрізів, а також механічних характеристик задач. Крім цього, при побудові розв'язуючих рівнянь широко використовується апарат теорії узагальнених функцій, що значно спростило і скоротило ряд аналітичних перетворень.

### 3.1. Розв'язування парних рівнянь по поліномах і приєднаних функціях Лежандра

Розглянемо парну систему рядів-рівнянь по поліномах Лежандра щодо невідомих коефіцієнтів  $A_n$  такого вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (1 + M_n) (n + 0,5) P_n(\cos \theta) = f(\theta), \quad (0 \leq \theta < \theta_0),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) = 0, \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \pi), \quad (3.16)$$

де  $P_n(\cos \theta)$  — поліноми Лежандра;  $M_n$  — відома величина, що при  $n \rightarrow \infty$  спадає не повільніше, ніж  $0(n^{-2})$ ;  $f(\theta)$  — неперервна функція при  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ . Саме така поведінка  $M_n$  виникає в конкретних задачах, які будуть розглянуті в наступних розділах.

Розв'язок системи шукаємо у вигляді

$$A_n = \int_0^{\theta_0} \varphi(t) \sin(n + 0,5)t dt = I, \quad (3.17)$$

де  $\varphi(t)$  — невідома допоміжна функція, що має неперервну похідну при  $0 \leq t \leq \theta_0$ .

Якщо врахувати розривну суму [53]

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \sin(n + 0,5)t = \frac{H(t - \theta)}{\sqrt{2 \cos \theta - 2 \cos t}},$$

$$H(t - \theta) = \begin{cases} 1; & t > \theta \\ 0; & t < \theta \end{cases}. \quad (3.18)$$

то легко показати, що інтегральний оператор  $I$  тотожно задовольняє другому рівнянню системи (3.16).

Надалі нам знадобляться значення наведених нижче рядів у класі узагальнених функцій [52]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -0,5 + \pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2n\pi)(x - 2n\pi), \quad x \in R, \quad (3.19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx = 0,5 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

Якщо помножити перший ряд на  $\cos \frac{x}{2}$ , а другий — на  $(-\sin \frac{x}{2})$  і знайти їх суму, то отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n + 0,5)x = -\cos \frac{x}{2} + \pi \cos \frac{x}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2n\pi). \quad (3.20)$$

Цей базовий ряд дає можливість шляхом аналітичних перетворень і диференціальних операцій знайти значення наведених нижче сум в класі узагальнених функцій

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n+0,5)t \cos(n+0,5)x = \frac{\pi}{2} \delta(t-x), \quad (0 < t, x < \pi),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+0,5) \sin(n+0,5)t \cos(n+0,5)x = -\frac{\pi}{2} \delta'_t(t-x). \quad (3.21)$$

Аналогічним методом отримано значення сум

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+0,5) \cos(n+0,5)t \sin(n+0,5)x = \frac{\pi}{2} \delta'_t(t-x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n+0,5)t \sin(n+0,5)x = \frac{\pi}{2} \delta(t-x). \quad (3.22)$$

Якщо тепер підставити (3.17) у перше рівняння системи (3.16) і скористатися інтегральним представленням Мелера-Діріхле для поліномів Лежандра [53]

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos(n+0,5)x}{\sqrt{2\cos x - 2\cos\theta}} dx, \quad (3.23)$$

то після зміни порядків додавання та інтегрування отримаємо

$$\int_0^{\theta} \frac{g(x) dx}{\sqrt{2\cos x - 2\cos\theta}} = f(\theta), \quad (0 \leq \theta < \theta_0), \quad (3.24)$$

де

$$g(x) = \int_0^{\theta_0} \varphi(t) M(t, x) dt, \quad (3.25)$$

$$M(t, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + M_n) (n+0,5) \sin(n+0,5)t \cos(n+0,5)x. \quad (3.26)$$

Рівність (3.24) відноситься до класу інтегральних рівнянь Абеля і його розв'язок має вигляд [64]

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(\theta) \sin\theta d\theta}{\sqrt{2\cos\theta - 2\cos x}} = F(x). \quad (3.27)$$

Якщо врахувати другу рівність (3.11), то після ряду перетворень

(3.26) запишемо у вигляді суми сингулярної і регулярної складових

$$M(t, x) = -\delta'_t(t-x) + K(t, x), \quad (3.28)$$

$$K(t, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} M_n(n+0,5) \sin(n+0,5)t \cos(n+0,5)x. \quad (3.29)$$

Збіжність ряду (3.29) забезпечується поведінкою величини  $M_n$  при  $n$ , що прямує до нескінченості.

Підставляючи (3.28) у (3.25) і враховуючи рівності [52]

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \delta'_t(t-x) dt &= -f'(x), \\ \int_a^b f(t) \delta(t-x) dt &= f(x), \end{aligned} \quad (3.30)$$

після ряду перетворень було отримане інтегро-диференціальне рівняння відносно функції  $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) + \int_0^{\theta_0} \varphi(t) K(t, x) dt = F(x), \quad (3.31)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad (3.32)$$

де  $K(t, x)$  визначається рівністю (3.29).

Умова (3.32) рівнозначна вимозі обмеженості функції  $f(\theta)$  у точці  $\theta = 0$ , що й було обумовлено на початку параграфу.

Аналогічно будуватиметься розв'язок системи

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (1 + M_n) \frac{(n+0,5)^2}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta) &= f(\theta), \quad (0 \leq \theta < \theta_0), \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n+0,5}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta) &= 0, \quad (0 \leq \theta \leq \pi), \end{aligned} \quad (3.33)$$

де  $P_n^1(\cos \theta)$  — приєднані функції Лежандра першого роду [18, 53], а

інші величини мають той самий зміст, що й у системі (3.16).

Знайдемо низку допоміжних співвідношень. Якщо скористатися інтегральним представленням (3.23) й наведеними нижче рівностями [53]

$$\frac{n+0,5}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) = \frac{P_{n+1}(\cos\theta) - P_{n-1}(\cos\theta)}{2\sin\theta}, \quad (3.34)$$

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin(n+0,5)x}{\sqrt{2\cos\theta - 2\cos x}} dx, \quad (3.35)$$

то на їх основі і ряду аналітичних перетворень були отримані необхідні для подальших досліджень інтегральні представлення для приєднаних функцій Лежандра

$$\frac{n+0,5}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\sin x \sin(n+0,5)x dx}{\sin\theta \sqrt{2\cos x - 2\cos\theta}}, \quad (3.36)$$

$$\frac{n+0,5}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin x \cos(n+0,5)x}{\sin\theta \sqrt{2\cos\theta - 2\cos x}} dx. \quad (3.37)$$

Якщо тотожності (3.36) та (3.37) помножити відповідно  $\sin(n+0,5)t$  та  $\cos(n+0,5)t$  і потім просумувати отримані рівності по  $n$  від одиниці до нескінченості, то після врахування співвідношень (3.11) та (3.12) прийдемо до розривних сум такого вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+0,5}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) \sin(n+0,5)t = \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{\sin t H(\theta-t)}{\sin\theta \sqrt{2\cos t - 2\cos\theta}}, \quad (3.38)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+0,5}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) \cos(n+0,5)t = -\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \frac{\sin t H(t-\theta)}{\sin\theta \sqrt{2\cos\theta - 2\cos t}}, \quad (3.39)$$

де  $H(t-\theta)$  — функція Хевісайда [52].

Отримані важливі формули (3.36—3.39) є базовими для розв'язку системи (3.33).

Розв'язок системи (3.33) шукаємо у вигляді

$$A_n = \int_0^{\theta_0} \varphi(t) \cos(n + 0,5)t dt, \quad (3.40)$$

де  $\varphi(t)$ ,  $\varphi'(t)$  — неперервні і обмежені функції при  $0 \leq t \leq \theta_0$ .

Якщо підпорядкувати функцію  $\varphi(t)$  інтегральній умові

$$\int_0^{\theta_0} \varphi(t) \cos \frac{t}{2} dt = 0, \quad (3.41)$$

то на основі (3.39) оператор (3.40) тотожно задовольняє другому рівнянню системи (3.33).

Підстановка (3.40) у перше рівняння системи (3.33) приводить до нижче наведеного рівняння Абеля

$$\int_0^{\theta} \frac{g(x) dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \theta}} = f(\theta) \sin \theta, \quad (0 \leq \theta < \theta_0), \quad (3.42)$$

де

$$g(x) = \sin x \int_0^{\theta_0} \varphi(t) M(t, x) dt, \quad (3.43)$$

$$M(t, x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + M_n)(n + 0,5) \cos(n + 0,5)t \sin(n + 0,5)x. \quad (3.44)$$

Остаточно, задача зводиться до інтегро-диференціального рівняння Фредгольма

$$\varphi'(x) + \int_0^{\theta_0} \varphi(t) K(t, x) dt = \frac{2}{\pi \sin x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(\theta) \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{2 \cos \theta - 2 \cos x}}, \quad (3.45)$$

де

$$K(t, x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (n+0,5) M_n \cos(n+0,5)t \sin(n+0,5)x. \quad (3.46)$$

Єдиність розв'язку рівняння (3.45) забезпечує інтегральна умова (3.41).

Відмітимо, що, якщо інтегруванням за змінною  $\theta$  звести систему (3.33) до системи парних рівнянь за поліномами Лежандра, то в результаті інтегрування з'явиться довільна стала. Математичних умов для її визначення немає і лише додаткові дослідження характеру конкретної крайової задачі дають необхідну залежність для виключення невизначеності у розв'язку, що й було використано у роботах [15, 209] та ін.

Запропонований метод розв'язання парних рівнянь приведений в роботах [117, 33]. Не складає труднощів застосувати цей метод до розв'язування парних інтегральних рівнянь за функціями Лежандра неперервного спектру, що й було використано у роботах Н.М. Стоян [224].

### 3.2. Розв'язування парних інтегральних рівнянь з ядрами Бесселя

Розглянемо парну систему інтегральних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} c(\tau) \tau [1 + m(\tau)] J_0(\tau \eta) d\tau &= f(\eta), \quad (0 \leq \eta < \eta_0), \\ \int_0^{\infty} c(\tau) J_0(\tau \eta) d\tau &= 0, \quad (\eta > \eta_0), \end{aligned} \quad (3.47)$$

де  $c(\tau)$  — невідома функція щільності;  $J_0(\tau \eta)$  — функція Бесселя другого роду [100];  $m(\tau)$  — відома функція і спадає на нескінченності не повільніше ніж  $0(\tau^{-2})$ .

Розв'язок системи шукаємо у вигляді

$$c(\tau) = \int_0^{\eta_0} \varphi(t) \sin \tau t dt, \quad (3.48)$$

де  $\varphi(t)$ ,  $\varphi'(t)$  — неперервні функції при  $0 \leq t \leq \eta_0$ .

Інтегральний оператор (3.48) задовольняє тотожно другому рівнянню системи (3.47) на основі рівності [19, 37]

$$\int_0^{\infty} \sin \tau t J_0(\tau \eta) d\tau = \frac{H(t - \eta)}{\sqrt{t^2 - \eta^2}}. \quad (3.49)$$

Якщо скористатися інтегральним представлення для функції Бесселя  $J_0(\tau \eta)$  [37]

$$J_0(\tau \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\eta} \frac{\cos \tau x dx}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} \quad (3.50)$$

і підставити (3.48), (3.50) у перше рівняння системи (3.47), то прийдемо до наведеного нижче рівняння Абеля

$$\int_0^{\eta} \frac{g(x) dx}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} = f(\eta), \quad (0 \leq \eta \leq \eta_0), \quad (3.51)$$

$$g(x) = \int_0^{\eta_0} \varphi(t) M(t, x) dt, \quad (3.52)$$

$$M(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [1 + m(\tau)] \tau \cos \tau x \sin \tau t d\tau. \quad (3.53)$$

Розв'язок рівняння (3.51) має вигляд [64]

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{sf(s) ds}{\sqrt{x^2 - s^2}}. \quad (3.54)$$

На підставі інтегралів

$$\int_0^{\infty} \cos \tau t \cos \tau x d\tau = \frac{\pi}{2} \delta(t - x),$$

$$\int_0^{\infty} \tau \sin t\tau \cos t\tau d\tau = -\frac{\pi}{2} \delta'_t(t-x). \quad (3.55)$$

бачимо, що інтеграл (3.53) є розбіжним у класі звичайних функцій і збіжним у класі узагальнених функцій.

Після врахування (3.55) у рівностях (3.52)—(3.54) приходимо до інтегро-диференціального рівняння

$$\varphi'(x) + \int_0^{\eta_0} \varphi(t) K(t, x) dt = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{sf(s) ds}{\sqrt{x^2 - s^2}}, \quad (3.56)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad (3.57)$$

де

$$K(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tau m(\tau) \sin t\tau \cos t\tau d\tau. \quad (3.58)$$

Цікаво відмітити, що при  $m(\tau) = 0$  система (3.47) співпадає з системою парних рівнянь, що була отримана Снеддоном [219] при розгляді задачі про дископодібну тріщину у пружному просторі. Її розв'язок розглянутим вище методом є досить простим і зводиться до знаходження інтегралу

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{sf(s) ds}{\sqrt{x^2 - s^2}}. \quad (3.59)$$

Ефективність цього методу буде показана в подальших розділах шляхом порівняння з відомими результатами.

Побудуємо розв'язок системи вигляду

$$\int_0^{\infty} c(\tau) \tau [1 + m(\tau)] J_1(\tau \eta) d\tau = f(\eta), \quad (0 \leq \eta < \eta_0),$$

$$\int_0^{\infty} c(\tau) J_1(\tau \eta) d\tau = 0, \quad (\eta > \eta_0), \quad (3.60)$$

де  $J_1(\tau \eta)$  — циліндрична функція першого роду першого порядку [37]; інші функції мають той самий зміст, що й у системі (3.47).

Розв'язок системи шукаємо у вигляді

$$c(\tau) = \int_0^{\eta_0} \varphi(t) \cos \tau t dt. \quad (3.61)$$

Якщо підпорядкувати функцію  $\varphi(t)$  інтегральній умові

$$\int_0^{\eta_0} \varphi(t) dt = 0, \quad (3.62)$$

то на основі рівності [37]

$$\int_0^{\infty} \cos \tau t J_1(\tau \eta) d\tau = \frac{1}{\eta} - \frac{tH(t-\eta)}{\eta\sqrt{t^2-\eta^2}}, \quad (3.63)$$

оператор (3.61) буде задовольняти другому рівнянню системи (3.60) тотожно.

Підставляючи в перше рівняння системи (3.60) замість  $c(\tau)$  інтегральний оператор (3.61), а потім заміняючи  $J_1(\tau \eta)$  інтегральним представленням [37]

$$J_1(\tau \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\eta} \frac{x \sin \tau x}{\eta \sqrt{\eta^2 - x^2}} dx \quad (3.64)$$

приходимо до інтегрального рівняння Абеля

$$\int_0^{\eta} \frac{xg(x)}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} dx = \eta f(\eta), \quad (0 \leq \eta < \eta_0), \quad (3.65)$$

де

$$g(x) = \int_0^{\eta_0} \varphi(t) M(t, x) dt, \quad (3.66)$$

$$M(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tau [1 + m(\tau)] \cos \tau t \sin \tau x d\tau. \quad (3.67)$$

На підставі (3.54), а також інтегралів у класі узагальнених функцій

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin \tau t \sin \tau x d\tau &= \frac{\pi}{2} \delta(t - x), \\ \int_0^{\infty} \tau \cos \tau t \sin \tau x d\tau &= \frac{\pi}{2} \delta'_t(t - x) \end{aligned} \quad (3.68)$$

із рівностей (3.65)—(3.67) отримано інтегро-диференціальне рівняння, яке наведене нижче

$$-\varphi'(x) + \int_0^{\eta_0} \varphi(t) K(t, x) dt = \frac{2}{\pi x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{s^2 f(s) ds}{\sqrt{x^2 - s^2}}, \quad (3.69)$$

$$K(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tau m(\tau) \cos \tau t \sin \tau x d\tau. \quad (3.70)$$

Єдиність розв'язку (3.69) забезпечується інтегральною умовою (3.61).

У випадку  $m(\tau) = 0$  парна система (3.60) співпадає з системою рівнянь, наведеної у роботі Р.Л. Салганика [211], присвяченій крученню пружного простору з дископодібною тріщиною. Як випливає із (3.69) розв'язок задачі отримується у замкнутому вигляді, що і свідчить про ефективність методу.

### 3.3. Розв'язування парних інтегральних рівнянь з тригонометричними ядрами

Розглянемо систему парних інтегральних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \tau c(\tau) [1 + m(\tau)] \sin \tau z d\tau &= f(z), \quad (0 \leq z < z_0), \\ \int_0^{\infty} c(\tau) \sin \tau z d\tau &= 0, \quad (z \geq z_0). \end{aligned} \quad (3.71)$$

На функції, що входять у цю систему, накладаються ті самі обмеження, що й у системі (3.47).

Системи вигляду (3.71) виникають, наприклад, при розв'язуванні мішаних задач для областей, які обмежені циліндричними поверхнями.

На основі рівності [37]

$$\int_0^{\infty} \sin \tau z J_1(\tau t) d\tau = \frac{z H(t-z)}{t \sqrt{t^2 - z^2}} \quad (3.72)$$

легко показати, що вибір розв'язку у вигляді

$$c(\tau) = \int_0^{\tau} \varphi(t) J_1(\tau t) dt \quad (3.73)$$

тотожньо задовольняє другому рівнянню системи (3.72).

Застосовуючи до (3.64) формулу обернення Абеля, отримаємо інтегральне представлення тригонометричної функції

$$\sin \tau z = \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{x^2 J_1(\tau x) dx}{\sqrt{z^2 - x^2}} = \tau \int_0^z \frac{x J_0(\tau x) dx}{\sqrt{z^2 - x^2}}. \quad (3.74)$$

Підстановка (3.73) та (3.74) у перше рівняння системи (3.71) приводить до такого рівняння Абеля

$$\int_0^z \frac{g(x)dx}{\sqrt{z^2 - x^2}} = f(z), \quad (0 \leq z < z_0), \quad (3.75)$$

$$g(x) = x \int_0^{z_0} \varphi(t) M(t, x) dt, \quad (3.76)$$

$$M(t, x) = \int_0^{\infty} \tau^2 [1 + m(\tau)] J_1(\tau t) J_0(\tau x) d\tau. \quad (3.77)$$

Легко показати, що інтеграл (3.77) збіжний у класі узагальнених функцій. Справді, на підставі рівності [198]

$$\int_0^{\infty} J_1(\tau t) J_0(\tau x) d\tau = \frac{1}{t} H(t-x) \quad (3.78)$$

шляхом диференціальних операцій отримаємо

$$\int_0^{\infty} J_0(\tau x) J_0(\tau t) \tau d\tau = \frac{1}{t} \delta(t-x) = \frac{1}{x} \delta(t-x), \quad (3.79)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(\tau x) J_1(\tau t) \tau^2 d\tau = -\frac{1}{x} \delta'_t(t-x) = \frac{1}{t^2} \delta(t-x) - \frac{1}{t} \delta'_t(t-x), \quad (3.80)$$

Тоді

$$M(t, x) = -\frac{1}{x} \delta'_t(t-x) + \int_0^{\infty} m(\tau) \tau^2 J_1(\tau t) J_0(\tau x) d\tau,$$

що і доводить наше твердження.

Розв'язуючи рівняння Абеля (3.75), а потім використовуючи формули (3.76), (3.77), (3.80) і (3.30) приходимо до інтегро-диференціального рівняння вигляду

$$\varphi'(x) + \int_0^{z_0} \varphi(t) K(t, x) dt = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{zf(z) dz}{\sqrt{x^2 - z^2}}, \quad (3.81)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad (3.82)$$

де

$$K(t, x) = \int_0^{\infty} x \tau^2 m(\tau) J_1(\tau t) J_0(\tau x) d\tau. \quad (3.83)$$

Наведемо розв'язок парних рівнянь вигляду

$$\int_0^{\infty} \tau c(\tau) [1 + m(\tau)] \cos \tau z d\tau = f(z), \quad (0 \leq z < z_0),$$

$$\int_0^{\infty} c(\tau) \cos \tau z d\tau = 0, \quad (z_0 \leq z). \quad (3.84)$$

На основі рівності [100]

$$\int_0^{\infty} \cos \tau z J_0(\tau t) d\tau = \frac{H(t-z)}{\sqrt{t^2 - z^2}} \quad (3.85)$$

нижче наведена підстановка

$$c(\tau) = \int_0^{z_0} \varphi(t) J_0(\tau t) dt \quad (3.86)$$

задовольняє тотожно другому рівнянню системи (3.84).

Якщо проінтегрувати перше рівняння системи (3.84) за змінною  $z$  у проміжку від 0 до  $z$

$$\int_0^{\infty} c(\tau) [1 + m(\tau)] \sin \tau z d\tau = \int_0^z f(z) dz = F(z). \quad (3.87)$$

і підставити (3.86) та (3.74) у це рівняння, то після ряду перетворень, отримаємо

$$\int_0^z \frac{g(x) dx}{\sqrt{z^2 - x^2}} = F(z). \quad (3.88)$$

$$g(x) = \int_0^{z_0} \varphi(t) M(t, x) dt. \quad (3.89)$$

$$M(t, x) = \int_0^{\infty} x \tau [1 + m(\tau)] J_0(\tau x) J_0(\tau t) d\tau. \quad (3.90)$$

На підставі формул (3.79), (3.54) із рівностей (3.88)—(3.90) отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма

$$\varphi(x) + \int_0^{x_0} \varphi(t) K(t, x) dt + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{s F(s) ds}{\sqrt{x^2 - s^2}},$$

$$K(t, x) = \int_0^{\infty} x \tau m(\tau) J_0(\tau x) J_0(\tau t) d\tau. \quad (3.91)$$

#### 3.4. Розв'язування парних рівнянь, пов'язаних з перетворенням

Мелліна

Розглянемо парні рівняння вигляду

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{c(v) \Gamma(1+0,5v)}{\Gamma(0,5+0,5v)} (v-1) [1+m(v)] r^{-v} dv = f(r), \quad (0 \leq r < r_0),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{c(v) \Gamma(1-0,5v)}{\Gamma(0,5-0,5v)} r^{-v} dv = 0, \quad (r \geq r_0). \quad (3.92)$$

де  $(l)$  — деяка нескінчена пряма паралельна уявній осі комплексної площини  $S$ , що лежить у смужі  $v_1 < \text{Re} v < v_2$ ;  $\Gamma(v)$  — гама-функція;  $c(v)$  — невідома густина;  $f(r)$  — відома функція;  $m(v)$  спадає при  $|v| \rightarrow \infty$  не повільніше, ніж  $0(|v|^{-2})$  і при  $v = 0,5 + i\tau$  являється парною і дійсною функцією аргументу  $\tau$ .

Розв'язок системи (3.92) будемо будувати на підставі інтегралів

$$\frac{1}{4i\sqrt{\pi}} \int_{(l)} \frac{\Gamma(0,5+0,5v)}{\Gamma(1+0,5v)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-v} dv = \frac{r H(r_0 - r)}{\sqrt{r_0^2 - r^2}}, \quad (\text{Re} v > -1), \quad (3.93)$$

$$r^{-s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1-0,5v)}{\Gamma(0,5-0,5v)} \int_0^r \frac{x^{-v} dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad (\text{Re} v < 1). \quad (3.94)$$

Під час виведення (3.93), (3.94) були використані такі рівності [118, 197]

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\mu-1} x dx = 2^{\mu-2} \frac{\Gamma(0,5\mu)\Gamma(0,5\mu)}{\Gamma(\mu)},$$

$$\Gamma(\nu) = 2^{\nu-1} \pi^{-0,5} \Gamma(0,5\nu)\Gamma(0,5+0,5\nu),$$

а також формули розв'язку інтегрального рівняння Абеля (3.51), (3.54).

Запишемо невідому густину  $c(\nu)$  у вигляді оператора

$$c(\nu) \frac{\Gamma(1-0,5\nu)}{\Gamma(0,5-0,5\nu)} = A \frac{\Gamma(0,5+0,5\nu)}{\Gamma(1+0,5\nu)} \int_0^{r_0} \varphi(t) t^\nu dt, \quad (3.95)$$

де  $\varphi(t)$  — неперервна функція при  $0 \leq t \leq r_0$ ;  $A$  — довільний сталий множник.

На підставі (3.93) інтегральний оператор (3.95) задовольняє другому рівнянню системи (3.92) тотожно.

Підстановка (3.95) у перше рівняння системи (3.92) і подальше послідовне використання інтегрального представлення (3.94) приводить до такої рівності

$$\int_0^r \frac{L(x) dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = f(r), \quad (0 \leq r < r_0), \quad (3.96)$$

де

$$L(x) = \int_0^{r_0} \varphi(t) M(t, x) dt, \quad (3.97)$$

$$M(t, x) = \frac{A}{i\pi^{1,5}} \int_{(t)} [1 + m(\nu)] (\nu - 1) \left(\frac{x}{t}\right)^{-\nu} d\nu. \quad (3.98)$$

Покладаючи у останньому співвідношенні  $\nu = 0,5 + it$  та враховуючи дійсність і парність функції  $m(\nu)$ , а також ту обставину,

що інтеграл від непарної функції в симетричних межах рівний нулю, останній інтеграл представимо у вигляді

$$M(t, x) = -\frac{A}{\pi^{1,5}} \sqrt{\frac{t}{x}} \int_0^{\infty} [1 + m(\tau)] \left[ \cos\left(\tau \ln \frac{x}{t}\right) - 2\tau \sin\left(\tau \ln \frac{x}{t}\right) \right] d\tau.$$

Якщо врахувати наведені нижче отримані інтеграли від тригонометричних функцій у класі узагальнених функцій

$$\int_0^{\infty} \cos\left(\tau \ln \frac{x}{t}\right) d\tau = \pi \delta\left(\ln \frac{t}{x}\right) = \pi t \delta(t - x), \quad (3.99)$$

$$\int_0^{\infty} \tau \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) d\tau = -\pi \delta'_{\ln t}\left(\ln \frac{t}{x}\right) = \pi \left[ t \delta(t - x) + t^2 \delta'_t(t - x) \right], \quad (3.100)$$

і покласти  $A = -\pi/2$ , то після ряду перетворень  $M(t, x)$  запишеться у вигляді суми сингулярних та регулярних складових

$$M(t, x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{x}} \left[ \delta\left(\ln \frac{t}{x}\right) - 2\delta'_{\ln t}\left(\ln \frac{t}{x}\right) \right] + K(t, x), \quad (3.101)$$

$$K(t, x) = \frac{1}{2\pi^{0,5}} \sqrt{\frac{t}{x}} \int_0^{\infty} m(\tau) \left[ \cos\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) - 2\tau \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) \right] d\tau. \quad (3.102)$$

Легко показати, що невластний інтеграл (3.102) являється збіжним.

Якщо підставити тепер (3.101) у рівність (3.97) й скористатися отриманими інтегралами від узагальнених функцій

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \varphi(t) \delta\left(\ln \frac{t}{x}\right) dt &= x\varphi(x), \\ \int_0^{\infty} \varphi(t) \delta'_{\ln t}\left(\ln \frac{t}{x}\right) dt &= -x(x\varphi)'_x, \end{aligned} \quad (3.103)$$

то вираз  $L(x)$  запишеться у вигляді

$$L(x) = (x^2\varphi)'_x + \int_0^{r_0} \varphi(t)K(t, x)dt, \quad (3.104)$$

де  $K(t, x)$  визначається інтегралом (3.102).

Розв'язуючи рівняння Абеля (3.96), отримаємо наведене нижче інтегро-диференціальне рівняння відносно невідомої функції  $\varphi(x)$

$$\left[ x^2\varphi(x) \right]'_x + \int_0^{r_0} \varphi(t)K(t, x)dt = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{sf(s)ds}{\sqrt{x^2 - s^2}}. \quad (3.105)$$

Зауважимо, що розв'язок системи (3.92) можна побудувати не лише за допомогою інтегралів (3.93), (3.94), але й спираючись на рівності вигляду

$$\frac{1}{4i\sqrt{\pi}} \int_{(i)} \frac{\Gamma(0,5\nu)}{\Gamma(0,5+0,5\nu)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\nu} d\nu = \frac{r_0 H(r_0 - r)}{\sqrt{r_0^2 - r^2}}, \quad (\text{Re}\nu > 0), \quad (3.106)$$

$$r^{-s+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1,5-0,5\nu)}{\Gamma(1-0,5\nu)} \int_0^r \frac{x^{-\nu+1}}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx, \quad (\text{Re}\nu < 2).$$

Парні рівняння, що включають перетворення Мелліна, розглядалися у роботах М.М. Лебедева, І.П. Скальської [102], І.Н. Златіної [66], а також у роботах [167—169].

Запропонований підхід до розв'язування парних рівнянь формальним шляхом легко розповсюдити на розв'язування взаємопов'язаних систем парних рівнянь відносно двох невідомих функцій щільності або двох нескінчених послідовностей невідомих коефіцієнтів. Це буде зроблено у подальших розділах під час розв'язування конкретних мішаних задач теорії пружності.