УДК 517.98

Михайло Ф. Городній
Вікторія М. Романенко

**Про обмежені розв'язки диференціального рівняння з секторіальним операторним коефіцієнтом.**

*Досліджено питання про існування і єдиність обмеженого розв'язку диференціального рівняння*

$$x'(t) = Tx(t) + f(t),\ t \in \boldsymbol{R},$$

*та апроксимацію цього розв'язку розв'язкам відповідних задач Коші. Тут $T$ – секторіальний оператор в банаховому просторі $\boldsymbol{B}$, $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{B}$ – фіксована обмежена на $\boldsymbol{R}$ функція, що задовольняє локальну умову Гельдера.*

*Ключові слова: диференціальне рівняння, секторіальний оператор, апроксимація.*

Mykhaylo F. Gorodnii
Victoria N. Romanenko

**On the bounded solutions of a differential equation with the sectorial operator coefficient.**

*We investigate the question of the existence and uniqueness of a bounded solution of the differential equation*

$$x'(t) = Tx(t) + f(t),\ t \in \boldsymbol{R},$$

*and approximation of this solution by solutions of the corresponding Cauchy's problems. Here $T$ is a sectorial operator in the Banach space $\boldsymbol{B}$, $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{B}$ is a fixed bounded on $\boldsymbol{R}$ function satisfying local Hölder condition.*

*Key Words: differential equation, sectorial operator, approximation.*

**Постановка задачі :**

Нехай $\boldsymbol{B}$ – комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; $T$ – секторіальний оператор, що діє в $\boldsymbol{B}$, з областю визначення $\boldsymbol{D}(T)$ [6, с. 26]. Зафіксуємо функцію $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{B}$, яка задовольняє такі умови:

α) $\| f \|_\infty := sup\{\| f(t)\| \mid t \in \boldsymbol{R}\} < +\infty$ ;

β) для кожного $t_0$ існують такі залежні від $t_0$ сталі $\beta \in (0,1]$, $M > 0$, $\gamma > 0$, що

$$\forall t, s \in [t_0 - \gamma; t_0 + \gamma] : \| f(t) - f(s)\| \le M|t - s|^\beta . \quad (1)$$

**Означення.** Функція $x : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{B}$ називається відповідним $f$ обмеженим розв'язком диференціального рівняння

$$x'(t) = Tx(t) + f(t),\ t \in \boldsymbol{R}, \quad (2)$$

якщо $x \in C^1(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{B})$, $\| x \|_\infty < +\infty$, для довільного $t \in \boldsymbol{R}$ $x(t) \in \boldsymbol{D}(T)$ і виконується рівність (2).

**Вступ :**

У даній статті досліджується питання про існування та єдиність обмеженого розв'язку диференціального рівняння (2) та питання про апроксимацію цього розв'язку розв'язками відповідних задач Коші.

Відзначимо, що у випадку обмеженого оператора $T$ та неперервної і обмеженої на $\boldsymbol{R}$ функції $f$ відповідь на питання про існування і єдиність обмеженого розв'язку рівняння (2) містить відома теорема М. Г. Крейна [1, с.119]. У роботі [2] ця теорема узагальнена на випадок секторіального оператора $T$ і обмеженої на $\boldsymbol{R}$ функції $f$, яка задовільняє глобальну умову Гельдера. Аналогічний до наведеного в [2] результат для рівняння виду (2) відносно невідомої операторнозначної функції одержано А.Я. Дороговцевим і Т.О. Петровою [3]. Також подібне питання вивчається в [4, с. 249]. Питання про апроксимацію єдиного обмеженого розв'язку диференціального рівняння (2) у випадку, коли $f$ задовольняє глобальну умову Гельдера, досліджується в [5].

У подальшому будемо вважати, що спектр $\sigma(T)$ оператора $T$ не перетинається з уявною віссю $i\boldsymbol{R} := \{\, it \mid t \in \boldsymbol{R}\}$. Покладемо, як і в [6, с. 209], $\sigma_+(T)$, $\sigma_-(T)$ – частини спектра $\sigma(T)$, які містяться відповідно у правій та лівій півплощинах $\boldsymbol{C}$, причому $\sigma_\pm(T)$ – непорожні множини. Тоді $\sigma_-(T)$ – компактна, $\sigma_+(T)$ – замкнена множина; простір $\boldsymbol{B}$ розкладається в пряму суму інваріантних відносно оператора $T$ підпросторів $\boldsymbol{B}_\pm$; звуження $T_\pm$ оператора $T$ на $\boldsymbol{B}_\pm$ мають відповідно спектри $\sigma_\pm(T)$; $T_-$ – лінійний обмежений, $T_+$ – секторіальний оператори. Якщо $P_\pm$ – проектори в $\boldsymbol{B}$ відповідно на підпростори $\boldsymbol{B}_\pm$, $f_\pm(t) := P_\pm f(t),\ t \in \boldsymbol{R}$, то відповідний функції $f$ єдиний обмежений розв'язок $x$ рівняння (2), зображується у вигляді

$$x(t) = x_+(t) + x_-(t),\quad t \in \boldsymbol{R},$$

де $x_\pm$ – відповідні функціям $f_\pm$ єдині обмежені розв'язки диференціальних рівнянь

$$x_-'(t) = T_- x_-(t) + f_-(t),\quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{3}$$

$$x_+'(t) = T_+ x_+(t) + f_+(t),\quad t \in \boldsymbol{R}. \tag{4}$$

Покладемо

$$x_-(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{T_-(t-s)} f_-(s)\,ds,\quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{5}$$

$$x_+(t) = -\int_{t}^{+\infty} e^{T_+(t-s)} f_+(s)\,ds,\quad t \in \boldsymbol{R}. \tag{6}$$

Інтеграли в (5,6) збігаються абсолютно, бо експоненти від операторів $T_\pm$ коректно визначені при $t>0$ і задовольняють такі умови:

$$\exists\delta>0\ \exists c>0\ \ \forall t>0:\ \left\|e^{T_-t}\right\|\le ce^{-\delta t},\ \left\|e^{-T_+t}\right\|\le ce^{-\delta t},\ \left\|T_+e^{-T_+t}\right\|\le\frac{c}{t}e^{-\delta t} \qquad (7)$$

у просторах $\boldsymbol{B}_\pm(T)$.

Згідно з теоремою М. Г. Крейна [1, с. 119] випливає, що рівняння (3) має єдиний обмежений розв'язок $x_-$, який зображується у вигляді (5). Щодо рівняння (4) справджується

**Теорема 1.** Рівняння (4) має єдиний обмежений розв'язок $x_+$, який зображується у вигляді (6).

Доведення. Існування. Зафіксуємо $s>0$ і розглянемо в просторі $\boldsymbol{B}_+$ рівняння

$$\frac{dx_s(t)}{dt}=T_+x_s(t)+e^{-T_+s}f_+(t),\ t\in\boldsymbol{R}. \qquad (8)$$

Для скорочення запису покладемо $f_s:=e^{-T_+s}f_+(t),\ \ t\in\boldsymbol{R}$. Відзначимо, що $f_s:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{D}(T_+)$, а також з урахуванням (7)

$$\|f_s\|_\infty\le ce^{-\delta s}\|f_+\|_\infty,\ \|T_+f_s\|_\infty\le e^{-\delta s}\|f_+\|_\infty c/s. \qquad (9)$$

Тому коректно визначені функції

$$x_s(t):=-\int_t^{+\infty}e^{-T_+(k-t)}f_s(k)dk,$$

$$w_s(t):=-\int_t^{+\infty}T_+e^{-T_+(k-t)}f_s(k)dk. \qquad (10)$$

Відмітимо,що внаслідок (9) $\|x_s\|_\infty<+\infty,\|w_s\|_\infty<+\infty$. Використовуючи замкненість $T_+$ та перехід до інтегральних сум можна переконатися, що для кожного $t\in\boldsymbol{R}$: $w_s(t)=T_+x_s(t)$.

Доведемо, що для довільного $t\in\boldsymbol{R}$ існує $x_s'(t)$, а також $x_s(t)$ задовільняє (8). Зафіксуємо $t_0\in\boldsymbol{R}$, відрізок $[t_0-\gamma/2;t_0+\gamma/2]$, де $\gamma$ відповідна $t_0$ стала з (1), та $n_0\in\boldsymbol{N}$, таке, що $n_0>t_0+\gamma/2$. Внаслідок леми 3.2.1 з [4, с. 57], при $n\ge n_0$ для функції

$$F(t,n):=-\int_t^n e^{-T_+(k-t)}f_s(k)dk,\ \ t\in(t_0-\gamma,n], \qquad (11)$$

виконуються співвідношення

$$\frac{dF(t,n)}{dt}=T_+F(t,n)+f_s(t), \qquad (12)$$

$$T_+F(t,n)=-\int_t^n T_+e^{-T_+(k-t)}\left(f_s(k)-f_s(t)\right)dk-\left(I-e^{-T_+(n-t)}\right)f_s(t). \qquad (13)$$

Тому

$$\sup_{t\in[t_0-\gamma/2,t_0+\gamma/2]}\left\|F(t,n)-x_s(t)\right\|=\sup_{t\in[t_0-\gamma/2,t_0+\gamma/2]}\left\|\int_n^{+\infty} e^{-T_+(k-t)}f_s(k)dk\right\|\le$$

$$\le c\|f_s\|_\infty\int_{n-(t_0+\gamma/2)}^{+\infty} e^{-\delta z}dz\to 0,\quad n\to+\infty, \qquad (14)$$

тобто $\{F(\cdot,n):\ n\ge n_0\}$ збігається рівномірно на $[t_0-\gamma/2;t_0+\gamma/2]$ до функції $x_s(t)$. Доведемо, що $\{T_+F(\cdot,n);\ n\ge n_0\}$ збігається рівномірно на $[t_0-\gamma/2;t_0+\gamma/2]$ до функції $w_s(t)$. Зауважимо, що

$$w_s(t)=-\int_t^{+\infty} T_+e^{-T_+(k-t)}f_s(k)dk\pm\int_t^{+\infty} T_+e^{-T_+(k-t)}f_s(t)dk=$$

$$=-\int_t^{+\infty} T_+e^{-T_+(k-t)}\left(f_s(k)-f_s(t)\right)dk-\int_t^{+\infty}\frac{d}{dk}\left(-e^{-T_+(k-t)}f_s(t)\right)dk= \qquad (15)$$

$$=-\int_t^{+\infty} T_+e^{-T_+(k-t)}\left(f_s(k)-f_s(t)\right)dk-f_s(t).$$

Тому, з урахуванням (13,15)

$$\sup_{t\in[t_0-\gamma/2,t_0+\gamma/2]}\left\|T_+F(t,n)-w_s(t)\right\|\le\sup_{t\in[t_0-\gamma/2,t_0+\gamma/2]}\left\|\int_n^{+\infty} T_+e^{-T_+(k-t)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(f_s(k)-f_s(t)\right)dk\right\|+\sup_{t\in[t_0-\gamma/2,t_0+\gamma/2]}\left\|e^{-T_+(n-t)}f_s(t)\right\|=:\Lambda_1(n)+\Lambda_2(n),$$

причому

$$\Lambda_2(n)\le ce^{-\delta(n-t_0-\gamma/2)}\|f_s\|_\infty\to 0,\ n\to+\infty. \qquad (16)$$

Також

$$\Lambda_1(n)\le\int_n^{+\infty} e^{-\delta(k+s-t_0-\gamma/2)}\frac{c}{k+s-t_0-\gamma/2}2\|f\|_\infty dk=$$

$$=2\|f\|_\infty c\int_{n-t_0-\frac{\gamma}{2}}^{+\infty} e^{-\delta(s+z)}\frac{1}{s+z}dz\to 0,\ n\to 0. \qquad (17)$$

З (12, 16, 17) випливає, послідовність $\left\{\dfrac{dF(\cdot,n)}{dt}:\ n\ge n_0\right\}$ збігається рівномірно на $\left[t_0-\gamma/2\,;t_0+\gamma/2\right]$ до функції $T_+x_s(t)+f_s(t)$.

Перевіримо, що при фіксованому $n\ge n_0$ функція $T_+F(t,n)$ неперервна на $\left[t_0-\gamma/2\,;t_0+\gamma/2\right]$. Зафіксуємо $p,t\in\left[t_0-\gamma/2\,;t_0+\gamma/2\right]$, такі, що $p<t$. Внаслідок (13)

$$\|T_+F(t,n)-T_+F(p,n)\|\le\left\|-\int_t^n T_+e^{-T_+(k-t)}\left(f_s(k)-f_s(t)\right)dk+\right.$$

$$\left.+\int_p^n T_+e^{-T_+(k-p)}\left(f_s(k)-f_s(p)\right)dk\right\|+\|f(t)-f(p)\|+$$

$$+\left\|e^{-T_+(n-t)}f_s(t)-e^{-T_+(n-p)}f_s(p)\right\|=:E_1+E_2+E_3.$$

З (1) випливає, що

$$E_2<M|t-p|^{\beta}. \tag{18}$$

Зауважимо, що

$$E_3=\left\|e^{-T_+(n-t)}\left(f_s(t)-f_s(p)\right)-\left(e^{-T_+(n-p)}-e^{-T_+(n-t)}\right)f_s(p)\right\|\le$$

$$\le\left\|e^{-T_+(n+s-t)}\right\|\|f(t)-f(p)\|+\left\|\left(e^{-T_+(t-p)}-I\right)e^{-T_+(n+s-t)}f(p)\right\|=$$

$$=:E_{3,1}+E_{3,2}.$$

З урахуванням (1, 9) справджується оцінка

$$E_{3,1}\le e^{-\delta(n+s-t)}cM\,|t-p\,|^{\beta}\le cM\,|t-p\,|^{\beta}. \tag{19}$$

Внаслідок теорем 1.4.3, 1.4.4 з [4, с. 34]

$$\forall\beta>0\ \exists c_\beta>0\ \forall t>0:\ \left\|T_+{}^{\beta}e^{-T_+t}\right\|\le c_\beta\frac{1}{t^{\beta}}e^{-\delta t}; \tag{20}$$

$$\forall\,0<\gamma\le1,\ \forall x\in\boldsymbol{D}\left(T_+^{\gamma}\right):\ \left\|\left(e^{-T_+At}-I\right)x\right\|\le\frac{1}{\gamma}c_{1-\gamma}t^{\gamma}\left\|T_+^{\gamma}x\right\|, \tag{21}$$

також $\boldsymbol{D}\left(T_+^{\gamma}\right)\supset\boldsymbol{D}(T_+)$, а отже (b) виконується на $\boldsymbol{D}(T_+)$;

$$\forall x\in\boldsymbol{D}\left(T_+^{\gamma}\right):\ \left\|T_+^{\gamma}x\right\|\le c\left\|T_+^{\gamma}x\right\|^{\gamma}\|x\|^{1-\gamma}. \tag{22}$$

З урахуванням (20, 21)

$$E_{3,2}\le L_1(t-p)\left\|T_+e^{-T_+(n+s-t)}f(p)\right\|\le L_2(t-p)\|f\|_{\infty}\frac{e^{-\delta(n+s-t)}}{n+s-t}\le \tag{23}$$

$\le L_2\|f\|_{\infty}|t-p|/(n+s-t_0-\gamma/2)$, де $L_1,L_2$ – деякі сталі.

Оцінимо $E_1$. Відмітимо, що

$$E_1 \leq \left\| -\int_t^n T_+ e^{-T_+(k-t)}\left(f_s(k)-f_s(t)\right)dk + \int_t^n T_+ e^{-T_+(k-p)}\left(f_s(k)-f_s(t)\right)dk \right\| +$$

$$+\left\| -\int_t^n T_+ e^{-T_+(k-p)}\left(f_s(k)-f_s(t)\right)dk + \int_t^n T_+ e^{-T_+(k-p)}\left(f_s(k)-f_s(p)\right)dk \right\| +$$

$$+\left\| -\int_t^n T_+ e^{-T_+(k-p)}\left(f_s(k)-f_s(p)\right)dk + \int_p^n T_+ e^{-T_+(k-p)}\left(f_s(k)-f_s(p)\right)dk \right\| =$$

$=: E_{1,1} + E_{1,2} + E_{1,3}$.

Враховуючи (1,9), дістанемо

$$E_{1,3} = \left\| \int_p^t T_+ e^{-T_+(k-p)}\left(f_s(k)-f_s(p)\right)dk \right\| \leq$$

$$\leq \int_p^t e^{-\delta(k-p)} M(k-p)^{\beta}\, c/(k-p)\, dk \leq cM|t-p|^{\beta}; \tag{24}$$

$$E_{1,2} \leq \int_t^n \left\| T_+ e^{-T_+(k+s-p)} \right\| \left\| f_+(t)-f_+(p) \right\| dk \leq M(t-p)^{\beta} \int_t^n \frac{e^{-\delta(k+s-p)}}{k+s-p} dk \leq$$

$$\leq M(t-p)^{\beta} \frac{e^{-\delta s}}{s} \int_p^{+\infty} e^{-\delta(k-p)} dk =: M_*(t-p)^{\beta}. \tag{25}$$

Також з (20, 21) випливає, що

$$\left\| \left(e^{-T_+(t-p)} - I\right) T_+ e^{-T_+(k+s-t)}\left(f_+(k)-f_+(t)\right) \right\| \leq$$

$$\leq c_*(t-p) \left\| T_+^2 e^{-T_+(k+s-t)}\left(f_+(k)-f_+(t)\right) \right\| \leq$$

$$\leq c_*(t-p) \left\| T_+^2 e^{-T_+ s} \right\| \left\| e^{-T_+(k-t)} \right\| 2 \| f_+ \|_{\infty} \leq c_{*,1}(t-p) \frac{e^{-\delta s}}{s^2} e^{-\delta(k-t)},$$

де $c_*$, $c_{*,1}$ - деякі сталі. Тоді знайдеться така стала $c_{*,2} > 0$, що

$$E_{1,1} = \left\| \int_t^n \left(e^{-T_+(t-p)} - I\right) T_+ e^{-T_+(k+s-t)}\left(f_+(k)-f_+(t)\right) dk \right\| \leq$$

$$\leq c_{*,2}(t-p) \int_t^{+\infty} e^{-\delta(k-t)} dk =: M_{*,1}(t-p). \tag{26}$$

З (18, 19, 23, 24, 25, 26) випливає неперервність $T_+ F(t,n)$ на $[t_0 - \gamma/2; t_0 + \gamma/2]$, що гарантує неперервність похідних. Тому для довільного $t \in [t_0 - \gamma/2; t_0 + \gamma/2]$ існує похідна $x_s' = T_+ x_s + f_s(t)$, тобто $x_s(t)$ - розв'язок рівняння (8), що відповідає $f_s(t)$.

Отже, доведено, що для довільного $s > 0$ рівняння (8) має обмеженний розв'язок (10), а також

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = -\int_t^{+\infty} T_+ e^{-T_+(k-t)} e^{-T_+ s} (f_+(k) - f_+(t)) dk. \tag{27}$$

Зафіксуємо $t_0 \in \boldsymbol{R}$, відповідне йому $\gamma$ з (1) та перейдемо до границі на $[t_0 - \gamma/2; t_0 + \gamma/2]$ при $s \to 0+$. Покладемо

$$x_+(t) := -\int_t^{+\infty} e^{-T_+(k-t)} f_+(k) dk. \tag{28}$$

Перевіримо, що

$$\sup_{t \in [t_0 - \gamma/2, t_0 + \gamma/2]} \| x_s(t) - x_+(t) \| \to 0, \ s \to 0. \tag{29}$$

З урахуванням (20, 21)

$$\left\| \left( e^{-T_+ s} - I \right) T_+ e^{-T_+(k-t)} f_+(k) \right\| \le c_* s^{1/2} \left\| T_+^{1/2} e^{-T_+(k-t)} f_+(k) \right\| \le$$

$$\le c_* s^{1/2} \frac{c}{(k-t)^{1/2}} e^{-\delta(k-t)} \| f \|_\infty.$$

Звідси

$$\sup_{t \in [t_0 - \gamma/2, t_0 + \gamma/2]} \| x_s(t) - x_+(t) \| = \sup_{t \in [t_0 - \gamma/2, t_0 + \gamma/2]} \left\| \int_t^{+\infty} \left( e^{-T_+ s} - I \right) T_+ e^{-T_+(k-t)} \times \right.$$

$$\left. \times f(k) dk \right\| \le \sup_{t \in [t_0 - \gamma/2, t_0 + \gamma/2]} c_{*,1} s^{1/2} \int_t^{+\infty} \frac{e^{-\delta(k-t)}}{(k-t)^{1/2}} dk =$$

$$= c_{*,1} s^{1/2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\delta z}}{\sqrt{z}} dz \to 0, \ s \to 0,$$

що доводить (29).

Покладемо

$$w(t) := -\int_t^{+\infty} T_+ e^{-T_+(k-t)} (f_+(k) - f_+(t)) dk, \ t \in \boldsymbol{R}. \tag{30}$$

Перевіримо, що

$$\Psi(s) := \sup_{t \in [t_0 - \gamma/2, t_0 + \gamma/2]} \left\| \frac{dx_s(t)}{dt} - w(t) \right\| \to 0, \ s \to 0+. \tag{31}$$

Справді,

$$\Psi(s)=\sup_{t\in[t_0-\gamma/2,t_0+\gamma/2]}\left\|\int_t^{+\infty}\left(e^{-T_+s}-I\right)T_+e^{-T_+(k-t)}\left(f_+(k)-f_+(t)\right)dk\right\|\le$$

$$\le\sup_{t\in[t_0-\gamma/2,t_0+\gamma/2]}\left\|\int_t^{t_0+\gamma}\left(e^{-T_+s}-I\right)T_+e^{-T_+(k-t)}\left(f_+(k)-f_+(t)\right)dk\right\|+$$

$$+\sup_{t\in[t_0-\gamma/2,t_0+\gamma/2]}\left\|\int_{t_0+\gamma}^{+\infty}\left(e^{-T_+s}-I\right)T_+e^{-T_+(k-t)}\left(f_+(k)-f_+(t)\right)dk\right\|=$$

$$=:\Psi_1(s)+\Psi_2(s).$$

Враховуючи (20, 21), отримаємо

$$\Psi_2(s)\le\sup_{t\in[t_0-\gamma/2,t_0+\gamma/2]}\left(\int_{t_0+\gamma}^{+\infty}c_*s\left\|T_+^2e^{-T_+(k-t)}\right\|2\|f_+\|_\infty dk\right)\le$$

$$\le\sup_{t\in[t_0-\gamma/2,t_0+\gamma/2]}\int_{t_0+\gamma}^{+\infty}c_{*,1}s\frac{e^{-\delta(k-t)}}{(k-t)^2}dk\le\left(c_{*,1}\int_{\gamma/2}^{+\infty}\frac{e^{-\delta z}}{z^2}dz\right)s\to0,\ s\to0+.$$

Зафіксуємо $0<\nu<\beta$. Тоді

$$\Psi_1(s)\le\sup_{t\in[t_0-\gamma/2,t_0+\gamma/2]}\left[\int_t^{t_0+\gamma}\left(c_{*,0}s^\nu\left\|T_+^{1+\nu}e^{-T_+(k-t)}\right\|M(k-t)^\beta dk\right)\right]\le$$

$$\le\sup_{t\in[t_0-\gamma/2,t_0+\gamma/2]}\left(\int_t^{t_0+\gamma}c_{*,2}s^\nu\frac{e^{-\delta(k-t)}}{(k-t)^{1+\nu}}(k-t)^\beta dk\right)\le$$

$$\le\left(c_{*,2}\int_0^{2\gamma}\frac{e^{-z}}{z^{1+\nu-\beta}}dz\right)s^\nu\to0,\quad s\to0+.$$

З (29, 31) та неперервності $\dfrac{dx_s(t)}{dt}$ на $[t_0-\gamma/2;t_0+\gamma/2]$ випливає, що для довільного $t\in[t_0-\gamma/2;t_0+\gamma/2]$ існує $x_+'(t)=w(t)$. Таким чином, для будь-якого $t\in\boldsymbol{R}$ існує $x_+'(t)=w(t)$.

Зафіксуємо $t_0\in\boldsymbol{R}$. З (8,15) випливає, що

$$\frac{dx_s(t_0)}{dt}-e^{-T_+s}f_+(t_0)=T_+x_s(t_0)\,. \qquad (32)$$

Враховуючи секторіальність $T_+$ та (31) перейдемо в (32) до границі при $s\to0+$. Одержимо

$$T_+x_s(t_0)\to x'_+(t_0)-f_+(t_0),\quad s\to0+,$$

а також, з урахуванням (29),

$$x_s(t_0) \to x_+(t_0), \ s \to 0+.$$

Тому, внаслідок замкненості оператора $T_+$, $x_+(t_0) \in \boldsymbol{D}(A)$, а також

$$x'_+(t_0) = T_+ x_+(t_0) + f_+(t_0).$$

Таким чином, $x_+(t)$– розв'язок рівняння (4). Обмеженість $x_+(t)$ очевидна, бо

$$\| x_+(t) \| \le \int_t^{+\infty} ce^{-\delta(k-t)} \| f_+ \|_\infty \, dk = c \| f_+ \|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-\delta z} dz .$$

Єдиність $x_+(t)$ доводиться тим же методом, що й при доведенні теореми 1 з [6, с. 65].

Теорему 1 доведено.

Зафіксуємо $t_1 < t_2$. Рівнянню (3) відповідає задача Коші

$$\begin{cases} v'_-(t) = T_- v_-(t) + f_-(t), & t \ge t_1, \\ v_-(t_1) = 0, \end{cases} \tag{33}$$

в просторі $\boldsymbol{B}_-$, а рівнянню (4) – задача Коші

$$\begin{cases} v'_+(t) = T_+ v_+(t) + f_+(t), & t \le t_2, \\ v_+(t_2) = \overline{0}, \end{cases} \tag{34}$$

в просторі $\boldsymbol{B}_+$.

Неважко перевірити, що розв'язки задач Коші (33, 34) мають вигляд

$$v_-(t) = \int_{t_1}^{t} e^{T_-(t-s)} P_- f(s) ds, \quad t \ge t_1, \tag{35}$$

$$v_+(t) = -\int_{t}^{t_2} e^{T_+(t-s)} P_+ f(s) ds, \quad t \le t_2. \tag{36}$$

Покладемо

$$v(t) := v_+(t) + v_-(t), \ t \in [t_1, t_2], \tag{37}$$

тоді справджується

**Теорема 2.** Нехай $T$ – секторіальний оператор, $\sigma(T) \cap i\boldsymbol{R} = \varnothing$. Тоді для довільної функції $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{B}$, яка задовільняє умову (1), та відповідного їй розв'язку $x(t)$ рівняння (2) виконується оцінка $\forall t \in [t_1; t_2]$:

$$\| x(t) - v(t) \| \le \left( \frac{c \| P_- \|}{\delta} e^{-\delta(t-t_1)} + \frac{c \| P_+ \|}{\delta} e^{-\delta(t_2 - t)} \right) \| f(t) \|_\infty , \tag{38}$$

де $v(t)$, $t \in [t_1; t_2]$ визначається за допомогою формул (35, 36, 37).

Доведення. Внаслідок (5,7,35)

$$\forall t \in [t_1;t_2] \;:\; \|x_-(t)-v_-(t)\| \le c\|P_-\| \, \|f(t)\|_\infty \int_{-\infty}^{t_1} e^{-\delta(s-t)}ds =$$

$$= \frac{c\,\|P_-\|\,e^{-\delta(t-t_1)}}{\delta}\|f(t)\|_\infty . \tag{39}$$

Аналогічно, скориставшись співвідношеннями (6,7,36) матимемо:

$$\forall t \le t_2 \;:\; \|x_+(t)-v_+(t)\| \le \frac{c\,\|P_+\|\,e^{-\delta(t_2-t)}}{\delta}\|f(t)\|_\infty . \tag{40}$$

З (39,40) випливає оцінка (38).

Теорему 2 доведено.

**Висновок:**

У даній статті досліджено питання про існування та єдиність обмеженого розв'язку диференціального рівняння (2) та питання про апроксимацію цього розв'язку розв'язками відповідних задач Коші.

## Література

1. Далецкий Ю.Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений диференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.,"Наука",1970. – 534 с.
2. Городній М.Ф. Стійкість обмежених розв'язків диференціальних рівнянь з малим параметром у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 7 – с. 889 – 900.
3. Дороговцев А.Я., Петрова Т.А. Ограничение и переодические решения операторного уравнения Риккати с неограниченым оператором // Диффер. Уравнения. – 1997. – 33, № 3. – с. 309 – 315.
4. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
5. Романеннко В.М. Наближення обмежених розв'язків різницевих та диференціальних рівнянь розв'язками відповідних задач Коші // Вісник Київського університету. – 2002. – Серія: фіз.-мат. науки , № 2. – с. 142 – 147.
6. Дороговцев А.Я. Периодические и стационарные режимы бесконечных детерминированых и стохастических динамических систем. – К.: Вища шк., 1992,– 319 с.

Надійшла до редакції 15.01.2004р.