УДК № 517.9.

А.М.Ткачук (КНУ ім.Т.Шевченка, Київ)

A.M.Tkachuk

ІНВАРІАНТНІ МНОЖИНИ РІЗНИЦЕВИХ СИСТЕМ ТА ЇХ СТІЙКІСТЬ

INVARIANT SETS OF DIFFERENCE SYSTEMS AND THEIR STABILITY

Для системи різницевих рівнянь встановлені умови існування та стійкості інваріантних множин, обгрунтовано принцип зведення. Досліджено поведінку інваріантної множини при малих збуреннях.

The conditions of existence and stability of invariant sets are obtained, the principle of reducing is explained for the system of difference equations. The behaviour of invariant set is researched by the small perturbations.

1. Постановка задачі. Розглядається система різницевих рівнянь вигляду

$$x_{n+1}^h = x_n^h + hX(x_n^h), \tag{1}$$

де $h > 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $x_n^h = x^h(t_0 + nh)$, $\quad x_0^h(t_0) = x_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, функція $X(x)$ визначена в деякій області D простору $\mathbb{R}^n$ та ліпшіцева. Будемо вивчати інваріантні множини таких систем.

Означення 1 . *Множину $M \subset D$ назвемо інваріантною множиною системи (1), якщо вона має властивість: розв'язок $x_n^h(x_0)$ системи (1), що починається в точці $x_0 \in M$, залишається на M для довільного $n \in \mathbb{Z}$. Якщо $n \in \mathbb{Z}^+$, то множину M будемо називати додатно інваріантною множиною системи (1).*

Інваріантні множини системи (1), а також питання, які пов'язані з їх стійкістю, можуть бути вивчені в термінах знакосталих функцій аналогічно тому, як це зроблено для систем диференціальних рівнянь [1].

Означення 2 . *Компактну, додатно інваріантну множину N системи (1) назвемо стійкою, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що якщо $\rho(x_0, N) < \delta$, то $\rho(x_n^h(x_0), N) < \varepsilon$ для $n \in \mathbb{Z}^+$. Якщо множина N стійка та задовольняє граничне співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n^h(x_0), N) = 0$ для всіх x_0 із деякого δ_0-околу множини N, тоді назвемо її асимптотично стійкою.*

Нехай D_1 — обмежена область, що міститься в D з деяким своїм околом, $\overline{D}_1 = D_1 \cup \partial D_1$.

Означення 3 . *Функцію $V_h(x)$, визначену в $\overline{D}_1$, бедемо називати знакосталою в D_1, якщо для всіх $x \in \overline{D_1}$ ненульові значення функції $V_h(x)$ мають один і той же знак.*

Знакосталу в D_1 функцію $V_h(x)$ назвемо знаковизначеною в D_1, якщо множина її нулів непорожня і компактна в D_1.

2. Основні результати.

1) Інваріантні множини, їх стійкість.

Позначимо через $\triangle V_h(x) = V_h(x + hX(x)) - V_h(x)$, а через $V_\mu(h)$ множину точок $\overline{D}_1$, для яких $0 < |V_h(x)| \leq \mu$. Приведена нижче теорема дає умови існування та стійкості додатно інваріантної множини для системи (1).

Теорема 1 . *Якщо $V_h(x)$ знаковизначена в D_1 функція, для якої $\triangle V_h(x)$ знакостала в D_1, множина $N_0(h)$:*

$$V_h(x) = 0, \qquad x \in D_1, \tag{2}$$

рівномірно відділена по h від границі області ∂D_1, тобто

$$\exists h_0 > 0, \quad \exists \gamma > 0, \quad \text{\textit{що}} \quad \rho(N_0(h), \partial D_1) > \gamma, \quad \forall h \leq h_0, \tag{3}$$

тоді множина (2) є додатно інваріантною та стійкою, коли знаки $V_h(x)$ і $\triangle V_h(x)$ різні.

Доведення. Припустимо, що $V_h(x) \geq 0$, $\triangle V_h(x) \leq 0$, $x \in \overline{D_1}$. Покажемо, що множина $N_0(h)$, яка складається із точок D_1, для яких $V_h(x) = 0$, є додатно інваріантною, стійкою множиною системи (1).

Розглянемо розв'язок системи $x_n^h(x_0)$ (1), який починається при $n = 0$ в точці $x_0 \in N_0(h)$, і покажемо, що цей розв'язок належить множині нулів $N_0(h)$. Нехай $M = \max\limits_{x \in \overline{D_1}} \|X(x)\|$ і h виберемо таким чином, щоб $hM < \frac{\gamma}{4}$. Тоді

$$\rho\left(x_1^h(x_0), N_0(h)\right) \leq \left|x_1^h(x_0) - x_0\right| \leq h\,\|X(x_0)\| < \frac{\gamma}{4}. \tag{4}$$

Звідки $x_1^h(x_0) \in D_1$, де $x_1^h(x_0)$ – розв'язок системи (1) при $n = 1$.

За умовою теореми $\triangle V_h(x_1^h(x_0)) = V_h(x_0 + hX(x_0)) - V_h(x_0) \leq 0$, тому $V_h(x_1^h(x_0)) \leq V_h(x_0) = 0$. А отже

$$x_1^h(x_0) \in N_0(h). \tag{5}$$

З (4) та (5) отримаємо: $\rho\left(x_2^h(x_0), N_0(h)\right) \leq \rho\left(x_2^h(x_0), x_1^h(x_0)\right) + \rho\left(x_1^h(x_0), N_0(h)\right) < \frac{\gamma}{4}$. Звідки $x_2^h(x_0) \in D_1$.

З умови теореми $V_h(x_2^h(x_0)) \leq V_h(x_1(x_0)) \leq V_h(x_0) = 0$, а тому $x_2^h(x_0) \in N_0(h)$. Аналогічно отримаємо, що

$$\rho\left(x_n^h(x_0), N_0(h)\right) < \frac{\gamma}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

$$x_n^h(x_0) \in D_1, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \qquad \text{та} \qquad x_n^h(x_0) \in N_0(h).$$

Отже, $N_0(h)$ — додатно інваріантна множина.

Доведемо стійкість $N_0(h)$ для кожного $h \leq h_0$, тобто, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, h) > 0$ таке, що якщо $\rho\left(x_0, N_0(h)\right) < \delta$, то $\rho\left(x_n^h(x_0), N_0(h)\right) < \varepsilon$ для $n \in \mathbb{Z}^+$. Нехай $\varepsilon > 0$ - достатньо мале число таке, що $U_\varepsilon = U_\varepsilon(N_0(h)) \subset \overline{D}_1$ і $\varepsilon < \frac{\gamma}{2}$. За лемою [1, с. 60] по заданому ε можна вибрати $\mu = \mu(\varepsilon, h) > 0$ і $\delta = \delta(\varepsilon, h) > 0$, щоб виконувалися включення

$$U_\delta(N_0(h)) \subset V_\mu \subset U_\varepsilon(N_0(h)). \tag{6}$$

Розглянемо розв'язок $x_n^h(x_0)$ системи (1), що при $n = 0$ починається в точці $x_0 \in U_\delta(N_0(h))$. Тоді з (4) при $n = 1$ отримаємо:

$$\rho\left(x_1^h(x_0), N_0(h)\right) \leq \rho\left(x_1^h(x_0), x_0\right) + \rho\left(x_0, N_0(h)\right) < \frac{\gamma}{4} + \delta < \gamma.$$

Звідки $x_1^h(x_0) \in D_1$. Із знакосталості $\triangle V_h(x)$ в D_1 маємо

$$V_h(x_1^h(x_0)) \leq V_h(x_0) \leq \mu, \tag{7}$$

отже $x_1^h(x_0) \in V_\mu$, а із (6)

$$\rho\left(x_1^h(x_0), N_0(h)\right) < \varepsilon.$$

Аналогічно при $n = 2$ отримаємо:

$$\rho\left(x_2^h(x_0), N_0(h)\right) \le \rho\left(x_2^h(x_0), x_1^h(x_0)\right) + \rho\left(x_1^h(x_0), N_0(h)\right) \le \frac{\gamma}{4} + \varepsilon < \gamma.$$

Звідки $x_2^h(x_0) \in D_1$. З умови $\triangle V_h(x) \le 0$ випливає

$$V_h(x_2^h(x_0)) \le V_h(x_1^h(x_0)) \le V_h(x_0) \le \mu,$$

тому $x_2^h(x_0) \in V\mu$. З (6) маємо, що $\rho\left(x_2^h(x_0), N_0(h)\right) < \varepsilon$. Продовжуючи далі, отримаємо, що $\rho\left(x_n^h(x_0), N_0(h)\right) < \varepsilon$, для довільного $n \in \mathbb{Z}^+$. Теорема доведена.

Наступна теорема гарантує асимптотичну стійкість додатно інваріантної множини.

Теорема 2 . *Якщо функції $V_h(x)$ та $\triangle V_h(x)$ є знаковизначеними в D_1, множини їх нулів для кожного кроку $h > 0$ в D_1 співпадають та виконується умова (3), то додатно інваріантна множина (2) є асимптотично стійкою, коли знаки $V_h(x)$ і $\triangle V_h(x)$ різні.*

Доведення. Припустимо, що $V_h(x) \ge 0$, а $\triangle V_h(x) \le 0$ для $x \in D_1$. З теореми 1 випливає, що множина нулів $N_0(h)$ функції $V_h(x)$ в D_1 є додатно інваріантною стійкою множиною системи (1). Тому для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $\rho(x_0, N_0(h)) < \delta$, виконується нерівність $\rho\left(x_n^h(x_0), N_0(h)\right) < \varepsilon$ для $n \in \mathbb{Z}^+$ та довільного $h > 0$.

Тепер для асимптотичної стійкості достатньо показати виконання граничного співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n^h(x_0), N_0(h)\right) = 0 \tag{8}$$

для довільної точки $x_0 \in U_{\delta_0} = U_{\delta_0}(N_0(h))$, де δ_0 – достатньо мале додатнє число.

Виберемо $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, щоб розв'язок системи (1) $x_n^h(x_0)$ з початковими даними x_0 такими, що $\rho\,(x_0, N_0(h)) < \delta$, лежали в D_1 при $n \geq 0$. В силу стійкості множини $N_0(h)$ та вибору δ і ε це завжди можна отримати. Розглянемо траєкторію $x_n^h(x_0)$ системи (1) для $n \in \mathbb{Z}^+$, $h > 0$, $x_0 \in U_\delta$. Можливі два випадки. В першому $x_p^h(x_0) \in N_0(h)$ для деякого $p \in \mathbb{Z}^+$, тоді із додатної інваріантності множини $N_0(h)$ траєкторія $x_n^h(x_p^h(x_0))$, належить $N_0(h)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}^+$, тому співвідношення (8) виконано.

Розглянемо другий випадок, коли $x_n^h(x_0) \overline{\in} N_0(h)$ ні при одному $n \in \mathbb{Z}^+$. Тоді, оскільки

$$\triangle V_h(x_n^h(x_0)) = V_h(x_n^h(x_0) + hX(x_n^h(x_0))) - V_h(x_n^h(x_0)) = V_h(x_{n+1}^h(x_0)) - V_h(x_n^h(x_0)) \leq 0,\ n \in \mathbb{Z}^+,$$

то функція $V_h(x_n^h(x_0))$ монотонно спадає і, отже, прямує до деякої границі $\mu_0 \geq 0$ (в силу невід'ємності функції V_h). Покажемо, що $\mu_0 = 0$. Припустимо, що $\mu_0 > 0$. Тоді існує таке $\delta_0 = \delta_0(\mu_0) > 0$, що має місце включення $U_{\delta_0} \subset V_{\mu_0}$ і $x_n^h(x_0) \in U_\varepsilon \backslash U_{\delta_0}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Позначимо $\sup\limits_{x \in U_\varepsilon \backslash U_{\delta_0}} \triangle V_h(x) = -\alpha$, де $\alpha > 0$ (в силу того, що $\triangle V_h(x)$ приймає лише від'ємні значення). Тоді

$$\triangle V_h(x_n^h(x_0)) = V_h(x_n^h(x_0) + hX(x_n^h(x_0))) - V_h(x_n^h(x_0)) \leq -\alpha,\ n \in \mathbb{Z}^+,\ h > 0.$$

Звідки $V_h(x_{n+1}^h(x_0)) = V_h(x_0) + [V_h(x_1^h(x_0)) - V_h(x_0)] + [V_h(x_2^h(x_0)) - V_h(x_1^h(x_0))] +$

$$+ \cdots + [V_h(x_n^h(x_0)) - V_h(x_{n-1}^h(x_0))] + [V_h(x_{n+1}^h(x_0)) - V_h(x_n^h(x_0))] =$$

$$= V_h(x_0) + \sum_{k=0}^{n} [V_h(x_{k+1}^h(x_0)) - V_h(x_k^h(x_0))] \leq V_h(x_0) - \alpha(n+1).$$

Дана нерівність при досить великих n приводить до протиріччя з додатною визначеністю функції $V_h(x)$ в області D_1. Отже, $\mu_0 = 0$. Тому, якщо $x_n^h(x_0) \overline{\in} N_0(h)$ при цілих невід'ємних n, то

$$\lim_{n \to \infty} V_h(x_n^h(x_0)) = 0, \qquad \forall h > 0, \qquad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{9}$$

Розглянемо Ω_{x_0} — ω-граничну множину точок траєкторії $x_n^h(x_0)$. З її означення маємо, що

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n^h(x_0), \Omega_{x_0}\right) = 0. \tag{10}$$

З співвідношення (10) отримаємо, що для доведення (8) достатньо довести включення $\Omega_{x_0} \subset N_0(h)$ для кожного $x_0 \in U_\delta$. Доведення цього факту аналогічне [1, с. 64], що і доводить асимптотичну стійкість множини $N_0(h)$.

2) Принцип зведення для різницевих систем.

Нехай $N(h)$ та $M(h)$ — додатно інваріантні множини системи (1) для кожного кроку h, причому такі, що $N \supset M$.

Означення 4 . *Будемо говорити, що M стійка на N, якщо для довільного околу U_ε множини M існує такий її окіл U_δ, що якщо $x_0 \in U_\delta \cap N$, то $x_n^h(x_0) \subset (U_\varepsilon \cup M)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}^+$. Будемо говорити, що M асимптотично стійка на N, якщо M стійка на N і знайдеться таке $\delta_0 > 0$, що $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n^h(x_0), M) = 0$, для всіх $x_0 \in U_{\delta_0} \cap N$.*

Наступний результат вказує умови, при яких із стійкості множини M на інваріантній множині N випливає її стійкість. Позначимо через $V_{\delta,\mu}(h)$ множину точок $x \in D_1$, які належать δ-околу множини M і задовольняють нерівність $|V_h(x)| \le \mu$, де $V_h(x)$ — деяка функція визначена в D_1.

Теорема 3 . *Нехай додатно інваріантна множина N системи (1) містить замкнену додатно інваріантну і асимптотично стійку на N множину M. Тоді, якщо N є множиною (2) для деякої знакосталої в D_1 функції $V_h(x)$, для якої $\triangle V_h(x)$ знакостала в D_1 та протилежного з V_h знаку, то M — стійка множина системи (1).*

Доведення. Використовуючи лему 1 [1, с. 68] та асимптотичну стійкість M на N, виберемо додатні числа ε і $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, щоб виконувалися співвідношення

$$\rho\left(x_n^h(x_0), M\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (U_\varepsilon \cup M) \subset D_1, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad x_0 \in V_{\delta,0}; \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n^h(x_0), M\right) = 0 \quad \text{рівномірно по} \quad x_0 \in V_{\delta,0}. \tag{12}$$

Нехай n_0 — додатнє ціле число, що визначається із умови $\rho\left(x_{n_0}^h(x_0), M\right) < \frac{\delta}{2}$ для всіх $x_0 \in V_{\delta,0}$. Можливість вибору такого n_0 випливає із рівномірності граничного співвідношення (12). Виберемо тепер $\mu_0 = \mu_0(n_0, \varepsilon)$ так, щоб траєкторія $x_n^h(x_0)$ при $n \in [0, n_0]$ належала множині $U_\varepsilon \cup M$ для довільного $x_0 \in V_{\delta,\mu_0}$. Вибір такого μ_0 можливий. Покажемо це.

Нехай μ_0 вказаним способом вибрати не можна. Тоді знайдуться збіжні послідовності n_m, y_m, μ_m такі, що $0 < n_m \le n_0$, $\lim\limits_{m\to\infty} n_m = \tau$, $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = y_0$, $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_m = 0$ і $y_m \in V_{\delta,\mu_m}$; $x_n^h(y_0) \subset (U_\varepsilon \cup M), n \in [0, n_m]$; $\rho\left(x_{n_m}^h(y_m), M\right) \ge \varepsilon$. З останнього співвідношення граничним переходом отримаємо, що

$$\rho\left(x_\tau^h(y_0), M\right) \ge \varepsilon. \tag{13}$$

Згідно з лемою 2 [1, с. 69] множина V_{δ,μ_m} стягується до $V_{\delta,0}$ при $\mu_m \to 0$. Тому $y_0 \in V_{\delta,0}$ і $\rho\left(x_\tau^h(y_0), M\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ми прийшли до протиріччя з рівністю (13).

Із неперервної залежності ров'язків системи (1) від початкових даних, отримаємо нерівність

$$\rho\left(x_n^h(x_0), x_n^h(\tilde{x}_0)\right) \le \frac{\delta}{2}, \qquad n \in [0, n_0] \tag{14}$$

для довільних двох точок $x_0, \tilde{x}_0 \in (V_{\delta,\mu_0} \cup M)$ таких, що $\rho(x_0, \tilde{x}_0) \le d$, де d – достатньо мале.

Даний факт і подальше доведення проводиться по схемі аналогічній для диференціальних рівнянь [1]. З нерівності (14) матимемо $\rho\left(x_n^h(y), M\right) \le \varepsilon, \quad n \in [0, n_0]$, де y — довільна точка множини $V_{\delta,\mu}$, а $\rho\left(x_{n_0}^h(y), M\right) < \delta$. Тоді для ров'язку, який починається в точці $y \in V_{\delta,\mu}$ в момент $n = n_0$ отримаємо, що $x_{n_0}^h(y) \in (V_{\delta,\mu} \cup M)$. Звідки буде випливати стійкість множини M.

3) Дослідження поведінки інваріантної множини при малих збуреннях системи.

Нехай $M_0(h)$ — замкнена інваріантна множина системи (1). Наступний результат пояснює характер поведінки M_0 при малих збуреннях системи (1). Збурення будемо характеризувати малим додатнім параметром μ. Збурену систему запишемо у вигляді

$$x_{n+1}^h = x_n^h + h\left[X(x_n^h) + \mu Y(x_n^h)\right], \tag{15}$$

де функції X та Y визначені і задовольняють умову Ліпшіца для всіх x із області D.

Означення 5 . *Областю притягування $\Pi(M_0)$ множини M_0 назвемо всі точки $x_0 \in D$, для яких $\Omega_{x_0} \subset M_0$, де Ω_{x_0} — ω-гранична множина траєкторії $x_n^h(x_0)$.*

Теорема 4 . *Якщо M_0 — замкнена компактна асимптотично стійка інваріантна (додатно) множина системи (1), то можна вказати такі $\delta > 0$ і $\mu_0 = \mu_0(\delta) > 0$, що для всіх $\mu < \mu_0$ система (15) також має замкнену інваріантну множину $M = M(\mu, h)$, для якої $\lim\limits_{\mu \to 0} \rho(M_0, M) = 0$ і $U_\delta(M_0) \subset \Pi(M)$.*

Доведення. Для доведення теореми нам буде потрібна лема.

Лема. *Якщо розв'язки системи (1) при $\mu = 0$ $x_n^h(x_0, 0) = x_n^h(x_0)$ лежать в області D для $n \in [0, n_0]$ і $x_0 \in \mathbb{S} \subset D$ разом з деяким ε-околом, то при достатньо малих μ, розв'язки $x_n^h(x_0, \mu)$ системи (15) лежать при $n \in [0, n_0]$ в області D разом з деяким* *околом і має місце граничне співвідношення*

$$\sup_{n\in[0,n_0];x_0\in\mathbb{S}} \left|x_n^h(x_0,\mu)-x_n^h(x_0)\right| \to 0, \qquad \mu\to 0. \tag{16}$$

Доведення леми. Позначимо через P компактну підмножину точок з D, що містить траєкторію $x_n^h(x_0)$ $(n\in[0,n_0])$ разом з ε-околом, а через $A=\max\limits_{x\in D}|Y(x)|$. Для кожного $h>0$ виберемо $\mu(h)$ так, щоб

$$h\mu(h)(1+hL)^{n_0}n_0\max_{x\in P}|Y(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

З сумарних представлень розв'язків систем (1) та (15) відповідно

$$x_n^h(x_0)=x_0+h\sum_{p=0}^{n-1}X\left(x_p^h(x_0)\right),$$

$$x_n^h(x_0,\mu)=x_0+h\left[\sum_{p=0}^{n-1}(X(x_p^h(x_0,\mu))+\mu Y(x_p^h(x_0,\mu)))\right]$$

для їх різниці отримаємо оцінку

$$\left|x_n^h(x_0,\mu)-x_n^h(x_0)\right|\le h\sum_{p=0}^{n-1}\left[|X(x_p^h(x_0,\mu))-X(x_p^h(x_0))|+\mu|Y(x_p^h(x_0,\mu))|\right]\le$$

$$\le Lh\sum_{p=0}^{n-1}|x_p^h(x_0,\mu)-x_p^h(x_0)|+h\mu\sum_{p=0}^{n-1}|Y(x_p^h(x_0,\mu))|.$$

Звідси та з [2] $\forall n\in\mathbb{Z}^+$

$$\left|x_n^h(x_0,\mu)-x_n^h(x_0)\right|\le(1+Lh)^n h\mu\sum_{p=0}^{n-1}|Y(x_p^h(x_0,\mu))|. \tag{18}$$

Нерівність (18) справедлива при довільному $n\in[0,n_0]$ такого, що $x_n^h(x_0,\mu)\in P$. Покажемо, що $x_n^h(x_0,\mu)\in P$ для кожного $n\in[0,n_0]$. Останнє доведемо за індукцією.

Дійсно, при $n=0$ твердження вірне. Нехай при $n=k-1$ воно також вірне і доведемо його справедливість при $n=k$. З (18) випливає, в силу припущення індукції і (17), оцінка

$$\left|x_k^h(x_0,\mu)-x_k^h(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{19}$$

І оскільки $x_k^h(x_0)$ за умовою лежить в D разом з ε-околом, то, в силу побудови множини P, $x_k^h(x_0, \mu) \in P$. Отже згідно індукції $x_n^h(x_0, \mu) \in P$ при $n \in [0, n_0]$.

Граничне співвідношення (16) випливає тепер із (18) та (17). Лема доведена.

Продовжимо доведення теореми. Оскільки множина M_0 асимптотично стійка, то умови леми очевидно виконуються для всіх розв'язків незбуреної системи, що починаються в достатньо малому околі M_0.

Існування замкненої додатно інваріантної множини M для системи (15) та включення $U_\delta(M_0) \subset \Pi(M)$ випливають із аналогічних до [1, с. 75] міркувань для диференціальних рівнянь, де суттєво використовується рівномірна неперервність розв'язків за параметром. Справедливість цього факту для різницевих систем випливає з доведеної леми.

Література

[1] *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. - М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1987.-304с.

[2] *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. - К., Наук.думка, 1972.-246 с.