О СВЯЗИ МЕЖДУ СВОЙСТВАМИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СООТВЕТСТВУЮЩИХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ткачук А.Н.

Национальный университет пищевых технологий, Киев, Украина
tkachukam@ukr.net

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \tag{1}$$

и соответствующая ей система разностных уравнений

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hX(t_0 + kh, x_k^h), \tag{2}$$

где $k \in Z$, $h > 0$ – шаг разностного уравнения.

$$x_k^h = x^h(t_0 + kh), \qquad x^h(t_0) = x_0^h, \qquad x(t_0) = x_0.$$

Тут вектор-функция $X(t, x)$ определена при $t \in R$, $x \in D$ – некоторой области из R^n, $t_0 \in R$. Пусть $X(t, x)$ в своей области определения есть непрерывно-дифференцируемой и ограниченной вместе со своими частными производными так, что

$$\left|X(t, x)\right| + \left|\frac{\partial X(t, x)}{\partial t}\right| + \left\|\frac{\partial X(t, x)}{\partial x}\right\| \le C.$$

Изучается связь между ограниченными решениями систем (1) и (2). Получены условия существования ограниченного двухстороннего решения системы разностных уравнений (2) при условии, что такое решение имеет система дифференциальных уравнений (1).

Имеет место теорема.

Теорема 1. Если система (1) имеет ограниченное, равномерно по $t_0 \in R$ асимптотически устойчивое решение $x(t)$, которое лежит в области D вместе с некоторой окрестностью, то существует h_0, что при $h \le h_0$ система (2) также имеет ограниченное решение. При этом

$$\sup_{k \in Z}\left|x(kh) - x_k^h\right| \to 0, \qquad h \to 0.$$

Рассматривается также и обратная задача, то есть указаны условия, при которых свойство ограниченности на R решения уравнения (1) сохраняется, при наличии такого в (2).

Теорема 2. Если существует $h_0 > 0$, что при $h \le h_0$ система (2) имеет равномерно по t_0 и h асимптотически устойчивое, двухстороннее решение x_k^h, что лежит в области D вместе с некоторой ρ - окрестностью, тогда и система (1) также имеет ограниченное двустороннее решение.

Установлена также связь между периодическими решениями дифференциальных и разностных уравнений, а также найдены условия сходимости периодических решений системы разностных уравнений к периодическому решению системы дифференциальных уравнений.

Пусть $X(t + \omega, x) = X(t, x)$. Выберем шаг $h = \frac{\omega}{n}$, n – натуральное.

Теорема 3. Если система (2) при достаточно малом шаге h имеет равномерно по k_0 и h асимптотически устойчивое периодическое решение x_k^h, что лежит в D вместе с некоторой окрестностью, то и система дифференциальных уравнений (1) имеет периодическое решение.

Теорема 4. Если при выполнении условий теоремы 3 система (1) имеет единственное периодическое решение $\varphi(t)$ периода $s\omega$, где s – целое, то имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\in Z}\left|x_m^h\left(\frac{ms\omega}{n}\right)-\varphi\left(\frac{ms\omega}{n}\right)\right|=0,$$

где x_m^h – периодическое решение системы (2), $h=\frac{s\omega}{n}$ – шаг.