Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

7 • 1996

УДК 517.946

В.М. Булавацький, І.І. Юрик

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОПЕРЕНОСУ В РЕЛАКСУЮЧОМУ СЕРЕДОВИЩІ

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В.І. Фущичем)

A mixed boundary problem for the nonlinear differential partial equation of order 3 simulating heat transfer in relaxing media is considered and its numerical-analytical solution is obtained. As a result of calculation, three options of temperature field variation are established.

1. Як відомо [1], основним визначальним законом класичної теорії теплопереносу є закон Фур'є. У випадку теплопереносу в нерівноважних середовищах, з урахуванням явищ запізнення, в лінійному наближенні замість класичного закону Фур'є маємо [2]

$$q + \tau_q \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(T + \tau_T \frac{\partial T}{\partial t}\right), \tag{1}$$

де λ_0 — коефіцієнт теплопровідності середовища; q — потік; T — температура; τ_q, τ_T — часи релаксації теплового потоку та температури відповідно.

З урахуванням (1) рівняння теплопереносу за наявності джерел та відсутності конвективної складової має вигляд [3]

$$R\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} - c\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T + \tau_2 \frac{\partial T}{\partial t}\right) = \left(1 + R\frac{\partial}{\partial t}\right) Q(T), \tag{2}$$

де $R = \tau_q / c_V$; $\tau_2 = \tau_T / c_V$; $c = \lambda_0$; c_V — теплоємність; $Q(T)$ — потужність джерел.

В рамках цієї математичної моделі розглянемо таку мішану крайову задачу про високотемпературний процес горіння в релаксуючому середовищі:

$$R\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\right) = \left(1 + R\frac{\partial}{\partial t}\right) f(u), \tag{3}$$

$$u(0,t) = u'_x(l,t) = 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{5}$$

де

$$R, c, \tau_2 = \text{const}, \qquad f(u) = u^m \qquad (m \geq 1),$$

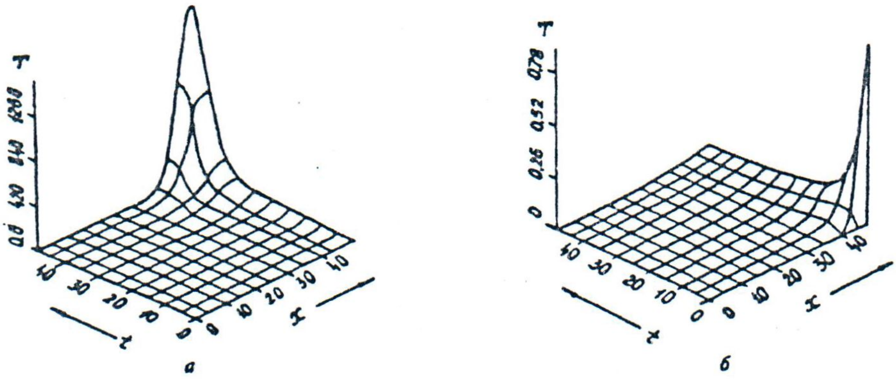

Рис. 1. Еволюція розв'язку крайової задачі у лінійному (a — $R = \tau_2 = 0,1; m = 1$) та нелінійному ($б$ — $R = \tau_2 = 0,1; m = 10$) випадках

φ, ψ — задані функції, $(x, t) \in (0, l) \times (0, \infty)$.

2. У лінійному випадку ($m = 1, R \neq 0$) розв'язок задачі (3)–(5) має вигляд [4]

$$u(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n{}^{(i)}(t) \sin(\lambda_n x) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

де

$$\bar{u}_n^{(1)}(t) = \left(k_n^{(1)} - k_n^{(2)}\right)^{-1} \left[(\beta_n - \alpha_n k_n^{(2)})\, e^{k_n^{(1)} t} - (\beta_n - \alpha_n k_n^{(1)})\, e^{k_n^{(2)} t}\right] \qquad (d_n > 0);$$

$$\bar{u}_n^{(2)}(t) = e^{-\varkappa_n t/2R} \left[\alpha_n \cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n}\left(\beta_n + \frac{\alpha_n \mu_n}{2R}\right) \sin(\omega_n t)\right] \qquad (d_n < 0);$$

$$\bar{u}_n^{(3)}(t) = [\alpha_n + (\beta_n + \alpha_n \mu_n / 2R)\, t]\, e^{-\mu_n t/2R} \qquad (d_n = 0);$$

$$k_n^{(1,2)} = (-\mu_n \pm \sqrt{d_n})/2R, \qquad d_n = \mu_n^2 + 4R\varkappa_n, \qquad \mu_n = 1 - R + c\tau_2 \lambda_n^2,$$

$$\varkappa_n = 1 + (\tau_2 - c)\lambda_n^2, \quad \lambda_n = \pi(2n-1)/2l,$$

$$\omega_n = \frac{1}{2R}\sqrt{-d_n}, \quad \begin{Bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix} = \int_0^l \begin{Bmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{Bmatrix} \sin(\lambda_n x) dx.$$

Характерний графік еволюції цього розв'язку наведено на рис. 1,a.

3. У випадку $m > 1$, обертаючи лінійну частину рівняння (3) з урахуванням крайових умов (4), (5), зводимо задачу до розв'язування такого нелінійного інтегрального рівняння:

$$u(x,t) = \nu(x,t) + \int_0^t \int_0^l u^m(\xi, \tau)\, G(\xi, x; t - \tau)\, d\xi d\tau, \tag{6}$$

де $\nu(x,t), G(\xi, x; t - \tau)$ — відомі функції (відповідні вирази не наводяться з огляду на громіздкість). Ефективний наближений розв'язок рівняння (6) можна одержати таким чином.

На сітці $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = l$ з кроком Δx наближений розв'язок інтегрального рівняння шукаємо у вигляді [5]

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\zeta_i(x), \tag{7}$$

де $u_i(t)$ — середнє значення $u(x,t)$ на інтервалі (x_{i-1}, x_i); $\zeta_i(x) = \eta(x - x_{i-1}) - \eta(x - x_i)$; η — функція Хевісайда. Підстановка (7) в (6) та використання методу Бубнова–Гальоркіна [5] зводять задачу до розв'язування системи рівнянь

$$u_j(t) = f_j(t) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t u_i^m(\tau) a_{ij}(t-\tau)\, d\tau \qquad (j = \overline{1,N}), \tag{8}$$

де

$$f_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \nu(x,t)\, dx, \qquad a_{ij}(t-\tau) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} G(\xi, x; t-\tau)\, d\xi dx.$$

Для розв'зування системи (8) застосуємо апроксимаційний метод (а-метод) [6]. Попередньо поставимо у відповідність (8) систему

$$u_j(t) = \tilde{f}_j(t) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t u_i^m(\tau)\, \tilde{a}_{ij}(t,\tau)\, d\tau \qquad (j = \overline{1,N}), \tag{9}$$

де $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{f}_j$ — відрізки степеневих розкладів функцій a_{ij} та f_j відповідно. Згідно з а-методом, системі (9) ставиться у відповідність така "збурена" система:

$$u_j^{(n)}(t) = \tilde{f}_j(t) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \left[u_i^{(n)}(\tau)\right]^m \tilde{a}_{ij}(t,\tau) - \varepsilon_{N_1}^{(j)}(t) \tag{10}$$

$$(0 \le t \le t_*, \quad j = \overline{1,N}),$$

де $u_j^{(n)}(t)$ — поліном степеня n; $\varepsilon_{N_1}^{(j)}(t)$ — нев'язка, що включає допоміжні параметри [6]. Зображення розв'язку системи у вигляді поліномів з невідомими коефіцієнтами зводить розглядувану задачу до розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів поліномів та допоміжних параметрів [6]. Використовуючи методику роботи [7], можна показати, що якщо числа n і t_* такі, що в кулі $\|\cdot\|_C \le \rho$ існує єдиний розв'язок (10), то має місце оцінка

$$\|u_j(t) - u_j^{(n)}(t)\|_C \le A(\rho, t_*)\, \|\varepsilon_{N_1}(t)\|_C \qquad (j = \overline{1,N}),$$

де

$$A(\rho, t_*) = \exp\,(t_*, Qc(t_*,\rho)), \qquad c(t_*,\rho) = m\rho^{m-1}\left(\frac{1-t_*^{M+1}}{1-t_*}\right)^2,$$

$$\varepsilon_{N_1} = \max_{k\in\overline{1,N}} |\varepsilon_{N_1}^{(k)}|, \quad Q, M = \text{const} > 0, \quad u_j \; - \; \text{точний розв'язок}(9).$$

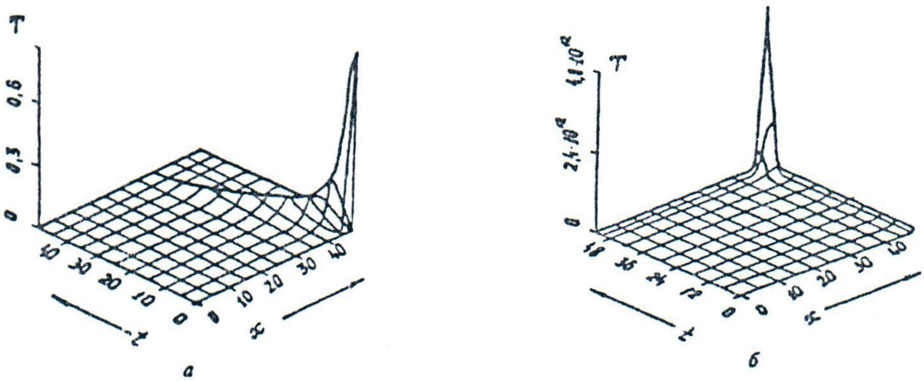

Рис. 2. Режим розпаду початкової структури (a — $R = 10, \tau_2 = 0, m = 10$) та загострення ($б$ — $R = \tau_2 = 10, m = 10$) у нелінійному випадку

4. Чисельна реалізація наведеного розв'язку та зіставлення його з скінченно-різницевим, одержаним згідно з схемою [4]

$$Rv_{\bar{t}t} + v_{\overset{\circ}{t}} - c\hat{v}_{\bar{x}x} - c\tau_2(v_{\bar{x}x})_{\overset{\circ}{t}} = \hat{f} + Rf_{\overset{\circ}{t}},$$

показали задовільну їх відповідність. Деякі з одержаних результатів графічно зображено на рис. 1,2 (розрахунки виконано для випадку задання початкового розподілу температури у вигляді рівнобедреного трикутника одиничної висоти, основа якої збігається з точкою $x = l$). Здобуті результати дозволяють, зокрема, зробити висновок про існування трьох типів розв'язків нелінійної крайової задачі (3)–(5):

нелокалізовааний режим спадання температури з часом (див. рис. 1,б);

режим розпаду початкової структури на дві затухаючі, що рухаються в протилежних напрямках (див. рис. 2,а);

режим з загостренням [8] (див. рис. 2,б).

1. *Никитенко Н.И.* Теория тепломассопереноса. — Киев: Наук. думка, 1983. — 352 с.
2. *Молокович Ю.М., Непримеров Н.И., Пикуза В.И., Штанин А.В.* Релаксационная фильтрация. — Казань: Изд. Казан. ун-та, 1980. — 136 с.
3. *Вахненко В.А., Даниленко В.А., Кулич В.В.* Элементы теории самоорганизации и нелинейных волновых процессов в природных средах со структурой. — Киев, 1991. — 44 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т геофизика им. С.И. Субботина).
4. *Булавацкий В.М.* Специальные краевые задачи подземной гидродинамики. — Киев: Наук. думка, 1993. — 132 с.
5. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981. — 416 с.
6. *Дзядык В.К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1988. — 304 с.
7. *Биленко В.И.* О погрешности а-метода решения интегральных уравнений Вольтерра с полиномиальными нелинейностями //Укр. мат. журн. — 1989. — 41, N 4. — С. 537–544.
8. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1987. — 480 с.

Український державний університет харчових технологій, Київ

Надійшло до редакції 27.02.95