РУБРИКА

УДК ______________

Цыганкова А.А.

ЦИКЛОИДА И ДРУГИЕ КРИВЫЕ

В статье рассмотрены циклоидальные кривые – циклоида, кардиоида, астроида, представлены их вид, уравнения и некоторые свойства.

Ключевые слова: циклоидальная кривая, плоская линия, траектория.

Среди множества кривых линий, образующихся как траектория движения материальной точки, особый интерес вызывают циклоидальные кривые.

Циклоидальные, то есть «кругообразные, напоминающие круг» от греч. – это кривые, которые описывает фиксированная точка окружности при движении этой окружности без скольжения по прямой, окружности или другой кривой. При движении окружности по внешней стороне неподвижной окружности ее точка описывает *эпициклоиду* («ὲπί» - на, над, κύκλος - круг, окружность, греч.), при движении по внутренней стороне – *гипоциклоиду* («ύπο»- під, «κύκλος» - круг, окружность, греч.). Если же окружность катится без скольжения по прямой, то точка этой окружности описывает *циклоиду*. Циклоида является наипростейшей кривой, которую описывает точка одной линии, которая катится без скольжения по другой линии на плоскости. Одному полному обороту окружности соответствует участок циклоиды, называемый *аркой*, изображенный на рис.1.

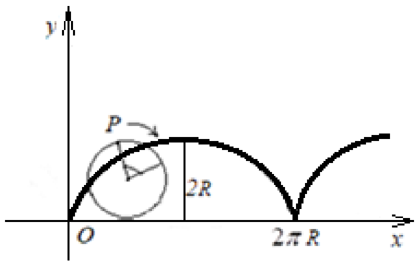

Рис.1

Можно записать уравнения циклоиды в параметрической форме:

$x = R(t - \sin t), y = R(1 - \cos t)$, $-\infty < t < +\infty$, где R - радиус окружности.

При изменении параметра t от 0 до 2π эти уравнения описывают первую арку циклоиды, при изменении от 2π до 4π - вторую и т.д.

Траекторией движения точки, находящейся на радиусе внутри окружности, катящейся по прямой, будет *укороченная циклоида*, а точки, находящейся на продолжении радиуса, *удлиненная циклоида*. Удлиненную циклоиду описывает, например, точка обода колеса движущегося железнодорожного вагона.

Циклоида имеет ряд интересных свойств. Одно из которых – это кривая наискорейшего спуска: по какой траектории должна двигаться материальная точка, чтобы совершить путь из начальной точки A в конечную точку B за кратчайшее время? Известно, что самым коротким путем из точки A в точку B является прямая. Но при движении по прямой скорость нарастает медленно и затраченное на спуск время оказывается большим. При крутом спуске по произвольной линии скорость спуска увеличивается, но вместе с тем удлиняется и путь по кривой, и время его прохождения. Оказалось, что искомой кривой наискорейшего спуска, которую назвали «брахистохроной», является перевернутая циклоида. Независимо от того, с какого места перевернутой циклоиды начать спуск, на весь путь до конечной точки будет затрачено одно и то же время. Эту задачу решали многие математики: Лейбниц, Ньютон, Лопиталь, Бернулли.

Еще одно интересное свойство циклоиды возникло при решении задачи о периоде колебаний маятника, которую рассматривал голландский ученый Гюйгенс. По какой кривой должен двигаться шарик, висящий на нитке маятника, чтобы период его колебаний не зависел от амплитуды? Такой кривой оказалась перевернутая циклоида, которую назвали «таутохрона» - кривой равных времен.

Циклоидальные кривые можно отнести к наиболее важным плоским кривым линиям.

Рассмотрим окружность, катящуюся снаружи другой неподвижной окружности (рис.2).

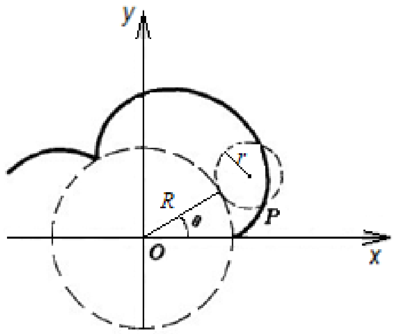

Рис.2

В зависимости от соотношения радиусов окружностей фиксированная точка катящейся окружности будет описывать кривые разных видов. Например, если радиусы окружностей одинаковы, то образуется кривая, носящая название *кардиоиды*. Она имеет узнаваемый вид (рис.3):

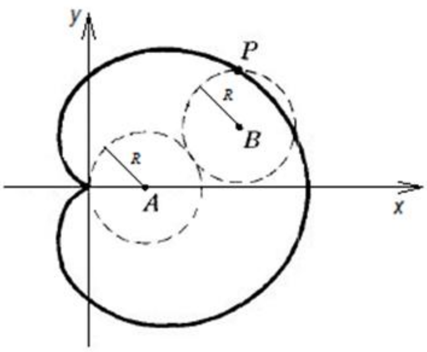

Рис.3

Кардиоида задается такими параметрическими уравнениями: $x = 2R\cos t(1+\cos t), y = 2R\sin t(1+\cos t)$, 0≤ *t* <2π. Или в полярных координатах: $\rho = 2R(1+\cos\varphi)$.

Еще одной известной эпициклоидой есть *улитка Паскаля*, которую описывает точка, лежащая внутри окружности, при ее движении по неподвижной окружности такого же радиуса. Ее уравнение в полярных координатах имеет вид: $\rho = a\cos\varphi + b$. При $a = b$ улитка Паскаля превращается в кардиоиду.

Точка окружности, катящейся внутри другой окружности, при соотношении их радиусов 1:4, описывает *астроиду*, т.е. «звездообразную» кривую (от греч. αστρον — звезда и ειδος — вид) (рис.4).

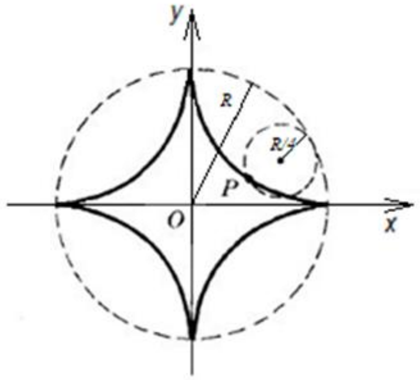

Рис.4

Параметрические уравнения астроиды имеют такой вид: $x = R\cos^3 t, y = R\sin^3 t$, $0 \leq t < 2\pi$.

Циклоидальные «замечательные» кривые имеют огромное практическое применение не только в математике, но и в физике, и в технике. Циклоидальные кривые применяются в теории механизмов, для построения профилей зубцов шестерен и пр., в производстве, строительстве, военном деле. Детали машин, которые совершают одновременно равномерное вращательное и поступательное движения, описывают циклоидальные кривые. Циклоида находит свое применение, например, и в сельском хозяйстве: профиль легких разборных теплиц имеет вид циклоиды.

Задачи, приводящие к циклоиде, сыграли значительную роль в становлении механики и математического анализа. Методы, развитые при решении задачи о брахистохроне, положили начало вариационному исчислению. Трудно представить себе мир без этих кривых и их замечательных свойств.

Литература:

1. *Берман Г.Н.* Циклоида. Об одной замечательной кривой линии и некоторых других, с ней связанных / Г.Н. Берман – М.: Наука,1980. – 112с.

Статья поступила в редакцию __.__.2008 г.

Cycloid and other curves

The article considers cycloidal curves - cycloid, cardioid, astroid, presents their form, equations and some properties.

Keywords: cycloidal curve, flat line, trajectory.