Сєдих О.Л.
ст. викладач
Національний університет харчових технологій
Кафедра інформатики
м.Київ, Україна
Овчарук А.В.
студент 3 курсу
Національний університет харчових технологій

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ В МАТЕМАТИЧНОМУ ПАКЕТІ MATHCAD КВАДРАТУРНИХ АЛГОРИТМІВ РІШЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА І ВОЛЬТЕРРИ II РОДУ

Анотація. В даній статті розглядається програмна реалізація чисельного рішення рівнянь Фредгольма і Вольтерри II роду. Існує велика кількість задач в математиці і в математичній фізиці, що приводять до інтегральних рівнянь. Інтегральні рівняння широко використовуються в моделях, що розглядаються в теорії пружності, газовій динаміці, екології тощо. У даній роботі пропонується реалізація в пакеті MathCAD квадратурних алгоритмів рішення інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтерри другого роду.

Ключеві слова: MathCAD, метод квадратур, формула трапеції, інтегральне рівняння Фредгольма, інтегральне рівняння Вольтерри.

Введення. Багато задач прикладної математики зводяться до вирішення інтегральних рівнянь різних типів (лінійних і нелінійних). Найбільш простими з них є лінійні рівняння Фредгольма и Вольтерри другого роду, тим не менш, саме ці класи рівнянь мають найбільшу область практичного застосування. Постановки таких задач в більшості випадків вимагають застосування ефективних чисельних методів для їх вирішення. Одним із сучасних чисельних методів є метод квадратур. Теоретичні основи методу квадратур викладені в роботах [1–2].

Інтегральним рівнянням називається рівняння відносно невідомої функції, що знаходиться під знаком інтегралу. Інтегральне рівняння в загальному вигляді можна записати у наступній формі:

$$x(t) = \int_D K(t,s,x(s))ds + f(t) \qquad (1)$$

де D – деяка область n-мірного простору; $x(t)$ – рішення рівняння; $f(t)$ – відома функція; $K(t,s,x(s))$ – ядро інтегрального рівняння.

Найбільше досліджені лінійні інтегральні рівняння, в яких невідома функція входить лінійно, а підінтегральну функцію $K(t,s,x(s))$ можна представити у вигляді $Q(t,s)\cdot x(s)$:

$$h(t)x(t) = \lambda\int_a^b Q(t,s)x(s)ds + f(t) \qquad (2)$$

$$h(t)x(t) = \lambda\int_a^t Q(t,s)x(s)ds + f(t) \qquad (3)$$

Класифікація типів лінійних інтегральних рівнянь здійснюється по вигляду верхньої межі інтегралу в (1): якщо верхня межа інтегрування є постійною, то рівняння називається рівнянням Фредгольма, якщо змінною – рівнянням Вольтерри. Якщо $h(t)$=0, то рівняння (2), (3) називаються інтегральними рівняннями першого роду, якщо $h(t)$=1, то – другого роду.

Ядро інтегрального рівняння Фредгольма визначається на множині точок квадрата [a,b]x[a,b], рівняння Вольтерри – в трикутнику $a \le s \le t \le b$.

Не завжди можна знайти точне рішення рівнянь (2), (3). Тому, часто їх рішення знаходять приблизно. Розроблено багато наближених методів вирішення інтегральних рівнянь.

Останнім часом для рішення задач обчислювальної математики часто застосовують математичний пакет MathCAD [4]. В пакеті MathCAD привабливим є той факт, що для рішення математичної задачі потрібно записати алгоритм розв'язання задачі у вигляді, який майже точно збігається з природнім математичним записом алгоритму. Результати можна досить просто вивести в таблиці, графіки, функції, що дуже важливо для наочності рішення.

Постановка задачі та алгоритм рішення. Розглянемо чисельні методи розв'язання інтегральних рівнянь, в основі яких лежить заміна інтеграла в інтегральному рівнянні кінцевою сумою, використовуючи будь-яку квадратурну формулу. Це дозволяє звести рішення вихідної задачі до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), число яких визначається числом вузлів тимчасової сітки. Такі методи вирішення інтегральних рівнянь називаються квадратурними методами або методами кінцевих сум. Перевага даних методів полягає в простоті їх реалізації.

Квадратурний метод розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма

Замінимо визначений інтеграл (2) його наближеним значенням, що обчислюється за допомогою квадратурної формули:

$$\int_a^b \varphi(s)ds \approx \sum_j^n A_j \varphi(s_j) \tag{4}$$

де j=1,2,...,n – номери вузлів тимчасової сітки; A_j – коефіцієнти квадратурної формули.

Підставивши праву частину (4) і враховуючи, що $\varphi(s)=Q(t,s)\ x(s)$, в рівняння Фредгольма другого роду (2), отримаємо

$$x(t) \approx \lambda \sum_{j=1}^n A_j Q(t,s_j)x(s_j) + f(t) \tag{5}$$

Вираз (5) задає функцію, що описує наближене рішення інтегрального рівняння (2). Введемо на відрізку [a,b] дискретну тимчасову сітку $t_1,t_2,\ldots,t_n$, вузли якої співпадають з вузлами сітки $s_1,s_2,\ldots,s_n$. Для кожного моменту часу t_i виконується рівність

$$x(t_i) \approx \lambda \sum_{j=1}^n A_j Q(t_i,s_j)x(s_j) + f(t_i) \tag{6}$$

де i=1,2,…,n.

Введемо позначення $Q_{i,j}=Q(t_i,s_j)$, $f_i=f(t_i)$, $x_i=x(t_i)$ і запишемо (6) у вигляді системи n лінійних алгебраїчних рівнянь n з невідомими:

$$\begin{cases} (1-\lambda A_1 Q_{1,1})x_1 - \lambda A_2 Q_{1,2} x_2 - \ldots - \lambda A_n Q_{1,n} x_n = f_1 \\ -\lambda A_1 Q_{2,1} x_1 + (1-\lambda A_2 Q_{2,2})x_2 - .. \lambda A_n Q_{2,n} x_n = f_2 \\ \ldots.. \\ -\lambda A_1 Q_{n,1} x_1 - \lambda A_2 Q_{n,2} x_2 - \ldots + (1-\lambda A_n Q_{n,n})x_n = f_n \end{cases} \qquad (7)$$

для рішення якої можна використовувати будь-який метод розв’язку СЛАР.

Таким чином, знаходження рішення рівняння Фредгольма другого роду здійснюється за наступним алгоритмом:

1. Задається тимчасова сітка t_i
2. Обчислюються значення функції *f(t)* у вузлах тимчасової сітки
3. Обчислюються елементи матриці, яка містить коефіцієнти СЛАР
4. Розв’язується СЛАР

Точність чисельного рішення інтегрального рівняння залежить від кількох факторів: квадратурної формули, числа вузлів тимчасової сітки, властивостей функції *Q(t,s)*. Якщо ядро і вільний член будуть недостатньо гладкими, то для обчислення інтеграла не слід застосовувати високоточні квадратури, а краще обмежитися такими формулами, як формули трапецій і прямокутників.

Квадратурний метод вирішення інтегральних рівнянь Вольтерри

Будемо чисельно розв'язувати рівняння (3). Рівняння Вольтерри формально можна вважати рівнянням Фредгольма з ядром

$$K(t,s) = \begin{cases} Q(t,s), & якщо \quad a \le s \le t \le b \\ 0, & якщо \quad a \le t \le s \le b \end{cases} \qquad (8)$$

Виберемо квадратурну формулу з коефіцієнтами A_j, тоді наближене рішення інтегрального рівняння буде мати вигляд (4). Складемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка аналогічна (7):

$$\begin{cases} (1-\lambda A_1 Q_{1,1})x_1 = f_1 \\ -\lambda A_1 Q_{2,1} x_1 + (1-\lambda A_2 Q_{2,2})x_2 = f_2 \\ \ldots.. \\ -\lambda A_1 Q_{n,1} x_1 - \lambda A_2 Q_{n,2} x_2 - \ldots + (1-\lambda A_n Q_{n,n})x_n = f_n \end{cases} \qquad (9)$$

Тому шукані значення x_1, x_2, …, x_n знаходяться послідовними обчисленнями за такими формулами:

$$x_1 = \frac{f_1}{1 - \lambda A_1 Q_{1,1}}$$

$$x_i = \frac{f_i + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} A_j Q_{i,j} x_j}{1 - \lambda A_i Q_{i,i}} \qquad (10)$$

$$де \quad i = 2, \ldots, n$$

Рис.:1. Рішення в пакеті MathCAD інтегрального рівняння Фредгольма II роду $x(t) = \int_0^1 t \cdot s ds + 2t$, що має точне рішення $x(t) = 3t$

Інтегральне рівняння Фредгольма II роду
Квадратурна формула - трапеція

$Q(t,s) := t \cdot s \qquad \lambda := 1 \qquad f(t) := 2 \cdot t$

$xt(t) := 3 \cdot t$ - точне рішення

$a := 0 \qquad b := 1 \qquad n := 10$

$i := 0 .. n - 1$

$h := \frac{b - a}{n - 1}$

$t_i := a + h \cdot i \qquad s := t$

$A_i := 1$

$A_0 := \frac{1}{2} \qquad A_{n-1} := \frac{1}{2}$

$j := 0 .. n - 1$

$q_{i,j} := Q(t_i, s_j) \qquad F_i := f(t_i) \qquad xt_i := xt(t_i)$

$M_{i,j} := \mathrm{if}(i = j, 1 - \lambda \cdot A_i q_{i,j} \cdot h, -\lambda \cdot A_j q_{i,j} \cdot h)$

$x := \mathrm{lsolve}(M, F)$

Рис.:2. Чисельне рішення інтегрального рівняння $x(t) = \int_0^1 t \cdot s ds + 2t$

$x^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0.334	0.669	1.003	1.337	1.672	2.006	2.341	...

Рис.:3. Точне рішення інтегрального рівняння $x(t) = \int_0^1 t \cdot s ds + 2t$

$xt^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0.333	0.667	1	1.333	1.667	2	2.333	...

Рис.:4. Візуалізація рішення інтегрального рівняння $x(t) = \int_0^1 t \cdot s ds + 2t$

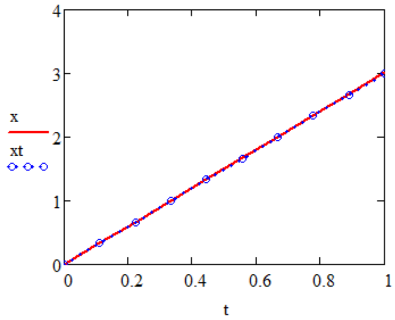


Рис.:5. Рішення в пакеті MathCAD інтегрального рівняння Вольтерри II роду $x(t)=\int_0^t t\cos(t\cdot s^3)\,ds+t^2-\frac{1}{3}tg\,t^4$, що має точне рішення $x(t)=t^2$

Інтегральне рівняння Вольтерри II роду
Квадратурна формула - трапеція

$Q(t,s) := t\cdot\cos\left(t\cdot s^3\right)^2 \qquad f(t) := t^2-\frac{1}{3}\cdot\tan\left(t^4\right) \qquad \lambda := 1$

$xt(t) := t^2$ - точне рішення

$a := 0 \qquad b := 0.5 \qquad n := 10$

$i := 1..n-1 \qquad h := \frac{b-a}{n-1}$

$j := i$

$t_i := a+h\cdot i$

$s := t \qquad xt_i := xt(t_i)$

$A_i := 1$

$A_0 := 0.5 \qquad A_{n-1} := 0.5$

$q_{i,j} := Q(t_i, t_i) \qquad F_i := f(t_i)$

$$x_0 := \frac{F_0}{1-\lambda\cdot A_0\cdot q_{0,0}}$$

$m := 1..n-1$

$$x_m := \frac{F_m+\sum_{j=0}^{m-1}\left(\lambda\cdot A_j q_{m,j}\cdot x_j\cdot h\right)}{1-\lambda\cdot A_m\cdot q_{m,m}\cdot h}$$

Рис.:6. Чисельне рішення інтегрального рівняння $x(t)=\int_0^t t\cos(t\cdot s^3)\,ds+t^2-\frac{1}{3}tg\,t^4$

$x^T =$

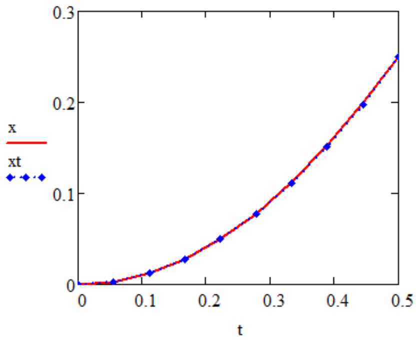
	0	1	2	3	4	5	6
0	0	$3.093\cdot10^{-3}$	0.012	0.028	0.05	0.078	...

Рис.:7. Точне рішення інтегрального рівняння $x(t)=\int_0^t t\cos(t\cdot s^3)\,ds+t^2-\frac{1}{3}tg\,t^4$

$xt^T =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	$3.086\cdot10^{-3}$	0.012	0.028	0.049	0.077	...

Рис.:4. Візуалізація рішення інтегрального рівняння $x(t)=\int_0^t t\cos(t\cdot s^3)\,ds+t^2-\frac{1}{3}tg\,t^4$



Висновки. Таким чином, в даній роботі отримані алгоритми чисельного рішення інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтерри другого роду, які основані на застосуванні методу квадратур. Для обґрунтування застосування даних алгоритмів розв’язані контрольні приклади в математичному пакеті MathCAD, які мають точні рішення. Приклади показують зручність, наочність, компактність, природність записів команд MathCAD в математичній нотації. У будь-якому місці алгоритму можна вивести значення будь-якої змінної на екран для контролю, що дозволяє вчасно виправити помилки.

Література:

1. Вержбицкий В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / В. М. Вержбицкий – М.: ООО Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005. – 400 с.

2. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы [Текст] / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков – Киев: Наукова думка, 1986. – 543 с.

3. Охорзин В. А. Прикладная математика в системе MathCAD [Текст] / В. А. Охорзин – СПб.: Лань, 2008. – 352 с.

4.Тарасевич Ю. Ю. Численные методы на MathCAD’е [Текст] / Ю. Ю. Тарасевич – Астрахань, 2000. – 70 с.