ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2001. Вип. 59. С. 57–60 *Ser. Mech-Math. 2001. Vol. 59. P. 57–60*

УДК 517.53

ПРО НАЛЕЖНІСТЬ КАНОНІЧНИХ ДОБУТКІВ ДО УЗАГАЛЬНЕНОГО КЛАСУ ЗБІЖНОСТІ

Оксана МУЛЯВА, Мирослав ШЕРЕМЕТА
Дрогобицький державний педагогічний університет
вул. Стрийська, 3, м. Дрогобич, Львівська обл. Україна
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Побудовано канонічні добутки, які належать до $\alpha\beta$-класу збіжності.
Ключові слова: канонічні добутки, класи збіжності, ряди Діріхле.

Нехай f – ціла функція з нулями z_k, $f(0) \neq 0$, $n_f(r) = \sum\limits_{|z_k|\leqslant r} 1$ – лічильна функція нулів, $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\varrho = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$ – порядок функції f, а $\tau = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\ln M_f(r)}{r^\varrho}$ – її тип. Добре відомо [1], що $\varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\ln n_f(r)}{\ln r} = \varrho$ і, якщо ϱ – неціле число, то існують додатні сталі k_1 і k_2 такі, що $k_1\tau \leqslant \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\ln n_f(r)}{r^\varrho} \leqslant k_2\tau$. У випадку, коли $\tau = 0$, Ж. Валірон [2] означив клас збіжності умовою $\int\limits_1^\infty \dfrac{\ln M_f(r)}{r^{\varrho+1}}dr < +\infty$ і довів таке: якщо f належить до класу збіжності, то $\sum\limits_{k=1}^\infty |z_k|^{-\varrho} < +\infty$. Якщо ϱ – неціле число, то остання умова є також достатньою [3] для належності f до класу збіжності (зауважимо, що для нецілого ϱ за теоремою Адамара про зображення цілої функції задача зводиться до питання належності до класу збіжності канонічних добутків).

У випадку, коли $\varrho = +\infty$, для характеристики зростання цілих функцій використовують узагальнений порядок [4] $\varrho_{\alpha\beta} = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\alpha(\ln M_f(r))}{\beta(\ln r)}$, де $\alpha \in L$, $\beta \in L$, а L – клас неперервних додатних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій. Канонічні добутки заданого узагальненого порядку побудував С.К.Балашов [5]. Ми розглянемо узагальнений $\alpha\beta$-клас збіжності, який означимо умовою

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln M_f(r))}{r\beta(\ln r)}dr < +\infty, \tag{1}$$

і за певних обмежень на функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ побудуємо канонічний добуток, який належатиме до $\alpha\beta$-класу збіжності (зауважимо, що належність цілої функції f до $\alpha\beta$-класу збіжності в термінах її тейлорових коефіцієнтів описана в [6]).

Отже, нехай (z_k) – довільна занумерована у порядку неспадання модулів послідовність відмінних від 0 комплексних чисел з єдиною точкою скупчення у ∞, а $n(r)$ – її лічильна функція. Вважатимемо, що функція $n(r)$ має не тільки нескінченний порядок, а й задовольняє умову $\ln n(r) \sim \omega(r)\ln r$, $r \to +\infty$, де $\omega \in L$, і розглянемо канонічний добуток

$$\pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E(z/z_k, 2[\omega(|z_k|)]), \tag{2}$$

де $E(z,p)$ – первинний множник Вейєрштрасса. Оскільки для кожного $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{|z_k|}\right)^{2[\omega(|z_k|)]+1} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \exp\{-2(1+o(1))\omega(|z_k|)\ln|z_k|\} =$$
$$= \sum_{k=k_0}^{\infty} \exp\{-2(1+o(1))\ln n(|z_k|)\} \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} \exp\{-2(1+o(1))\ln k\} < +\infty,$$

то [1, с. 16] канонічний добуток (2) абсолютно і рівномірно збігається на кожному компакті з $\mathbb{C}$ й зображає цілу функцію.

Теорема. *Нехай функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ такі, що $\alpha(x^2) = O(\alpha(x))$, $\beta(2x) = O(\beta(x))$ при $x \to +\infty$ і $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\beta(x)} < +\infty$. Припустимо, що послідовність (z_n) задовольняє умову $\ln n(r) \sim \omega(r)\ln r$, $r \to +\infty$, де $\omega \in L$. Для того щоб канонічний добуток (2) належав до $\alpha\beta$-класу збіжності, необхідно і достатньо, щоб*

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (\alpha(k) - \alpha(k-1))B(\ln|z_k|) < +\infty, \quad B(x) = \int_x^{\infty} \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)}. \tag{3}$$

Доведення. Оскільки [1, с. 21] $\ln|E(z,p)| \leqslant 3e(2+\ln p)\frac{|z|^{p+1}}{1+|z|}$, $p \geqslant 1$, то

$$\ln M_\pi(r) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 3e(2+\ln(2[\omega(|z_n|)]))\frac{(r/|z_n|)^{2[\omega(|z_n|)]+1}}{1+r/|z_n|} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(K_1 r)^{2[\omega(|z_n|)]+1}}{|z_n|^{2[\omega(|z_n|)]+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\lambda_n}} \exp\{(\ln r + \ln K_1)\lambda_n\}, \tag{4}$$

де $\lambda_n = 2[\omega(|z_n|)] + 1$, а через K_j тут і надалі позначені додатні сталі.

Відомо [7, с. 23] таке: якщо невід'ємні коефіцієнти a_n ряду Діріхле $F(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{\sigma\lambda_n\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, задовольняють умову $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{-\ln|a_n|} = h < 1$, то $F(\sigma) \leqslant \mu(\sigma/(1-h-\varepsilon))$ для кожного $\varepsilon \in (0, 1-h)$ і всіх $\sigma \geqslant \sigma_0(\varepsilon)$, де $\mu(\sigma) = \max\{a_n\exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geqslant 1\}$. Оскільки $\ln n(r) \sim \omega(r)\ln r$, $r \to +\infty$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \ln|z_n|} = 1/2$, і тому з (4) одержуємо $\ln M_\pi(e^\sigma) \leqslant \mu\left(\frac{\sigma + \ln K_1}{1/2 - \varepsilon}\right)$, де $\mu(\sigma) = \max\left\{\left(\frac{e^\sigma}{|z_n|}\right)^{\lambda_n} : n \geqslant 1\right\}$. Нехай $\nu(\sigma) = \max\left\{n : \left(\frac{e^\sigma}{|z_n|}\right)^{\lambda_n} = \mu(\sigma)\right\}$.

Очевидно, що $\nu(\sigma) \leqslant n(e^\sigma)$. Тому [10, с. 17]

$$\ln \mu(\sigma) = \ln \mu(0) + \int\limits_0^\sigma \lambda_{\nu(t)} dt \leqslant \ln \mu(0) + \sigma\lambda_{\nu(\sigma)} \leqslant \ln \mu(0) + \sigma\lambda_{n(e^\sigma)} \leqslant$$

$$\leqslant \ln \mu(0) + 2\sigma\omega(|z_{n(e^\sigma)}|) + 1 \leqslant \ln \mu(0) + 2\sigma\omega(e^\sigma) + 1 \leqslant 3\ln n(e^\sigma)$$

і

$$\ln M_\pi(e^\sigma) \leqslant \exp\left\{3\ln n\left(\exp\left\{\frac{\sigma + \ln K_1}{1/2 - \varepsilon}\right\}\right)\right\} \leqslant \exp\left\{3\ln n\left(e^{K_2\sigma}\right)\right\} \qquad (5)$$

для всіх досить великих σ. З умови $\alpha(x^2) = O(\alpha(x))$, $x \to +\infty$ випливає, що $\alpha(e^{3x}) \leqslant K_3\alpha(e^x)$, а з умови $\beta(2x) = O(\beta(x))$, $x \to +\infty$ маємо $\beta(\sigma/K_2) \geqslant \beta(\sigma)/K_4$. Тому з (5) отримуємо $\int\limits_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln M_\pi(e^\sigma))}{\beta(\sigma)} d\sigma \leqslant K_5 \int\limits_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\alpha(n(e^\sigma))}{\beta(\sigma)} d\sigma$, тобто канонічний добуток (2) належить до $\alpha\beta$-класу збіжності, якщо

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(n(r))}{r\beta(\ln r)} dr < +\infty. \qquad (6)$$

Навпаки, нехай $N(r) = \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t} dt$ – неванліннова лічильна функція послідовності (z_k). Тоді $n(r) \leqslant N(er)$ і, завдяки умові $\beta(2x) = O(\beta(x))$, $x \to +\infty$, нерівність (6) правильна, якщо $\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(N(r))}{r\beta(\ln r)} dr < +\infty$. Якщо π належить до $\alpha\beta$-класу збіжності, то за нерівністю Йєнсена ($N(r) \leqslant \ln M_\pi(r)$) останнє співвідношення правильне.

Отже, канонічний добуток (2) належить до $\alpha\beta$-класу збіжності тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність (6).

Але

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(n(r))}{r\beta(\ln r)} dr = \sum_{n=n_0}^{\infty} \int\limits_{|z_n|}^{|z_{n+1}|} \frac{\alpha(n(r))}{r\beta(\ln r)} dr + K_6 = \sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha(n) \int\limits_{|z_n|}^{|z_{n+1}|} \frac{dr}{r\beta(\ln r)} + K_6 =$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha(n)(B(\ln |z_n|) - B(\ln |z_{n+1}|)) + K_6 = \sum_{n=n_0}^{\infty} (\alpha(n) - \alpha(n-1))B(\ln |z_n|) + K_7.$$

Тому співвідношення (6) і (3) рівносильні. Теорему доведено.

1. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. - М., 1956.
2. *Valiron G.* General theory of integral functions. - Toulouse, 1923.
3. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. - М., 1941.
4. *Шеремета М.Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Известия вузов. Матем. - 1967. - №2. - С.100-108.
5. *Балашов С.К.* О связи роста целой функции обобщенного порядка с коэффициентами ее степенного разложения и распределением корней // Известия вузов. Матем. - 1972. - №8. - С.10-18.

6. *Мулява О.М.* Класи збіжності в теорії рядів Діріхле // Доп. НАН України, сер. А. – 1999. – №3. – С.35-39.

7. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. – К., 1993.

ON THE BELONGING OF CANONICAL PRODUCTS TO GENERALIZED CONVERGENCE CLASS

O. Muliava, M. Sheremeta

Drogobych State Pedagogical University, 3 Stryiska Str., Drogobych, Lvivska obl, Ukrair
Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Canonical products belonging to convergence $\alpha\beta$-class are constructed.

Key words: canonical products, convergence class, Dirichlet series.

Стаття надійшла до редколегії 28.05.2001
Прийнята до друку 03.07.2001