

Самсонов, В.В.

Самсонов, В.В.

Samsonov, V.

Сильвестров, А.М.

Сильвестров, А.М.

Silvestrov, A.

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

В статье приведено ряд оригинальных методов идентификации реальных объектов, для которых характерны свойства гладкой нелинейности, зашумленности не только выходных, но и входных переменных “цветными” шумами.

Рассмотренные методы позволяют получать несмещенные эффективные оценки параметров линейной части нелинейной модели; непараметрическую оценку статистической нелинейной составляющей динамической модели с неизвестной динамической частью; структуру и параметры многомерной нелинейной модели. Эффективность методов показана на определении аэродинамических коэффициентов, на построении нелинейных балансирующих зависимостей динамики движения летательных аппаратов, на исследовании высотно-скоростных характеристик турбовинтового авиадвигателя (зависимость тяги от высоты, скорости и управляющего воздействия). Последние практически совпали с данными, полученными в аэродинамической трубе.

Ключевые слова: методы идентификации; параметры модели; нелинейность; нестационарность; адекватность; корреляция; аппроксимация.

OF CERTAIN METHODS OF IDENTIFICATION OF NON-LINEAR OBJECTS

In this article a number of original methods of identification of real objects for which properties of smooth nonlinearity, noise control not only output but also input variables by "color" noises is provided.

The considered methods allow to receive not displaced effective estimations of parameters of a linear part of nonlinear model; a nonparametric estimation of statistical nonlinear dynamic model component with an unknown dynamic part; structure and parameters of multidimensional nonlinear model. Efficiency of methods is shown on examples of definition of aerodynamic factors, on construction of nonlinear balancing dependences of dynamics of movement of aircrafts, on research of high-speed characteristics of a turbo-propeller aircraft engine (dependence of draft on height, speed and operating

influence). The last have practically coincided with the data received in a wind tunnel.

Keywords: identification methods; model parameters; nonlinearity; non-stationarity; adequacy; correlation; approximation.

ПРО ДЕЯКІ МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ОБ'ЄКТІВ

У статті наведено ряд оригінальних методів ідентифікації реальних об'єктів, для яких характерні властивості гладкою нелінійності, зашумленості не тільки вихідних, але і вхідних змінних " кольоровими " шумами .

Розглянуті методи дозволяють отримувати незсунені ефективні оцінки параметрів лінійної частини нелінійної моделі; непараметричних оцінку статистичної нелінійної складової динамічної моделі з невідомою динамічною частиною; структуру і параметри багатовимірної нелінійної моделі. Ефективність методів показана на визначенні аеродинамічних коефіцієнтів, на побудові нелінійних балансувальних залежностей динаміки руху літальних апаратів, на дослідженні висотно -швидкісних характеристик турбогвинтового авіадвигуна (залежність тяги від висоти, швидкості і керуючого впливу). Останні практично збіглися з даними, отриманими в аеродинамічній трубі.

Ключові слова: методи ідентифікації; параметри моделі; нелінійність; нестационарність; адекватність; кореляція; апроксимація .

Введение.

В теории идентификации, как и в математики можно сформулировать два вида условий [1]:

- необходимые - это задача аппроксимации с точностью до ε "поведения" объекта моделью произвольной структуры;
- достаточные, когда в дополнение к необходимым требуется выполнение условия близости структуры и параметров модели к структуре и параметрам реально существующего в объекте (в конечной пространственно-временной области) отображения входных переменных на переменные состояния и выходные переменные. Например, определение (диагностика) для заданного режима аэродинамических коэффициентов (АДК) летательных аппаратов (ЛА) по данным летных испытаний (ЛИ); определение балансирующих (статических) нелинейных зависимостей ЛА из неопределенной динамики ЛИ; определение нелинейных тарировочных зависимостей $f(x)$ первичных измерительных преобразователей, физика которых соответствует модели Гаммерштейна [2]

$$\sum \beta_i \frac{d^i y}{dt^i} = f[x(t)], \quad (1)$$

где $n, \beta_i, f(x)$ неизвестные, $x(t)$ и $y(t)$ измеряются с шумами на ограниченном нестационарностью, стоимостью и другими причинами интервале времени T .

Реальная ситуация, как правило, характеризуется недостаточной статистической представительностью выборки данных, неавтономностью, нелинейностью, нестационарностью объекта идентификации и, как следствие, приближенностью его модели. Стремление повысить адекватность локальных моделей путем сужения пространственно - временной области поведения объекта приводит к возрастанию в измерениях соотношения "шум - сигнал". Стремление учесть нелинейность и параметризовать ее резко расширяет размерность вектора β неизвестных коэффициентов [3]. В обоих случаях имеет место некорректность [4] задачи идентификации.

Не претендуя на всеобщность, далее приведено несколько новых подходов, позволяющих в определенной мере обеспечить корректность задачи идентификации для реальных условий.

1. Оценивание параметров модели неточных измерениях входных и выходных переменных

В ограниченной пространственно-временной области G нелинейная нестационарная динамика реального объекта

$$\dot{\mathbf{x}}^* = f^*(\mathbf{x}^*, t^*), \quad (2)$$

где звездочкой (*) обозначены точные значения, вектор-функция f представлена (с точностью до ε^*) линейной моделью

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{x}^* \cdot \beta^* + \varepsilon^*, \quad (3)$$

где $\mathbf{y}^* = \dot{\mathbf{x}}^*$, β^* - искомые коэффициенты.

Чем уже область G , тем точнее модель (3), но и тем больше соотношение "шум - сигнал" в измерениях

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^* + N_y; \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^* + N_x.$$

Известны методы конфлюэнтного анализа [5], статистически оптимального нелинейного оценивания (расширенный фильтр Кальмана, квазилинеаризация и инвариантное погружение [6]). Однако этим методам необходима информация о вероятностных характеристиках помех и/или они не гарантируют сходимости релаксационного процесса приближения оценок β к β^* .

Простой способ несмещенного оценивания состоит в замене МНК - оценок

$$\hat{\beta} = (x^T x)^{-1} x^T y = A_1^{-1} B_1, \quad (4)$$

которые имеют смещение

$$\Delta \hat{\beta} = \hat{\beta} - \beta^* = -(A^* + \Delta A_1)^{-1} \Delta A_1 \cdot \beta^*, \quad (5)$$

где $A^* = \mathbf{x}^{*T} \mathbf{x}^*$, $\Delta A_1 = A_1 - A^*$, СМНК - оценками [7]

$$\hat{\beta}_m = A_2^{-1} B_2, \quad (6)$$

полученными из условия минимума функционала

$$J(\varepsilon) = \varepsilon_0^T (\varepsilon_m + \varepsilon_{-m}) + (\varepsilon_m + \varepsilon_{-m})^T \varepsilon_0, \quad (7)$$

где $\varepsilon_0 = y_0 - x_0 \hat{\beta}_m$, $\varepsilon_{\pm m} = y_{\pm m} - x_{\pm m} \cdot \hat{\beta}_m$; индексы 0 и $\pm m$ означают нулевое или сдвинутый во времени на m отсчетов массив данных.

Если сдвиг m больше времени корреляции помех в \mathbf{x} , но меньше критического $m_{кр}$ [7, стр.105], когда матрица A_2 вырождена, то оценка (6) будет несмещенной. Чем более гладкой является $\mathbf{x}^*(t)$ и $N_x(t)$ ближе к "белому шуму", тем лучше оценка (6). Если множество сдвигов m в пределах от 1 до $m_{кр}$ не единично, то с целью улучшения эффективных оценок можно использовать усредненную по m оптимально взвешенную функцией $\eta(m)$ оценку $\hat{\beta}$ интегрального СМНК:

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{-m_{кр}}^{m_{кр}} \eta(m) \right)^{-1} \cdot \sum \eta(m) \cdot \hat{\beta}_m, \quad (8)$$

где выбором $\eta(m)$ достигается компромисс между смещением и дисперсией оценки (8). В условиях неопределенности характеристик помех вес $\eta(m)$ оптимизируется по внешнему (проверочному, главному [8]) критерию I .

Задачу синтеза можно параметризовать, задав симметричной относительно $m=0$ финитной функцией такой, что $\eta(0) = \eta(\pm m_{кр}) = 0$. Например,

$$\eta(m) = (1 + |m|)^\theta \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi m}{m_{кр}} \right)^\gamma, \quad (9)$$

где θ и γ - оптимизируемые по I параметры

$$(\theta^*, \gamma^*) = \arg \underset{\theta, \gamma}{extr} I(\theta, \gamma). \quad (10)$$

Параметр γ влияет на ширину импульсов $\eta(\pm m)$, θ - на несимметрию (рис. 1).

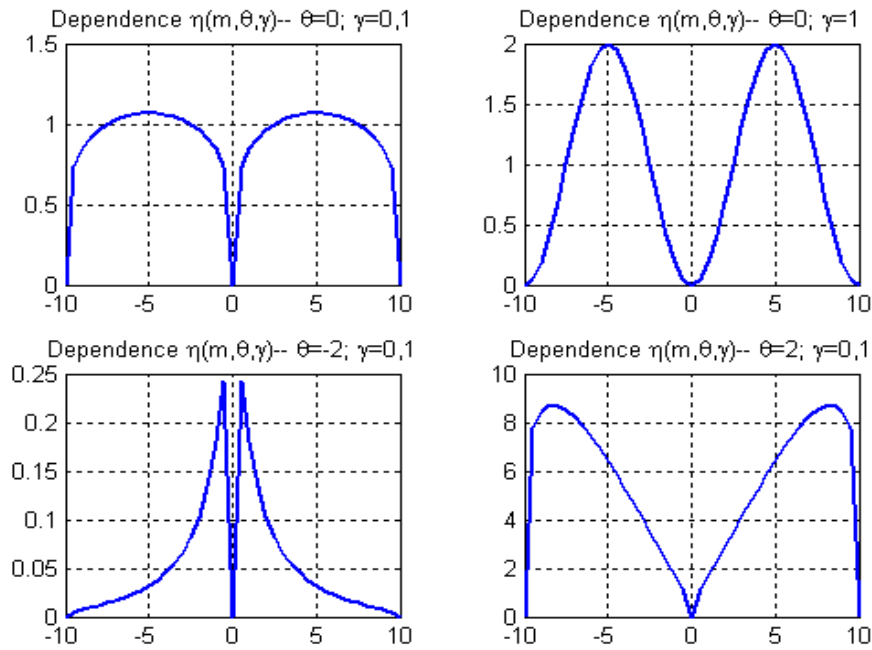


Рис. 1. Зависимость $\eta(m, \theta, \gamma)$.

В частности, при $\theta \rightarrow \infty$ оценка (8) равна (4), при $\gamma \rightarrow \infty$ оценка (8) равна (6).

Тестовый пример. Модель:

$$y^*(t) = \beta_1^* x_1^*(t) + \beta_2^* x_2^*(t) + \varepsilon^*(t), \quad \beta_1^* = \beta_2^* = 1;$$

$$R_{x_i^* x_j^*}(\tau) = e^{-k\tau}, \quad k = 0, 1; \quad i = 0, 1; \quad R_{x_1^* x_2^*}(\tau) = 0, 5,$$

$\varepsilon^*(t)$ - белый шум с единичной дисперсией. Измерения $x_i(t) = x_i^*(t) + N_{x_i}(t)$, $i = 1, 2$; $y(t) = y^*(t) + N_y(t)$, где помехи $N_{x_i}(t)$ и $N_y(t)$ - взаимно некоррелированные шумы с соответствующими автокорреляциями $R_{x_i}(\tau) = e^{-\tau}$.

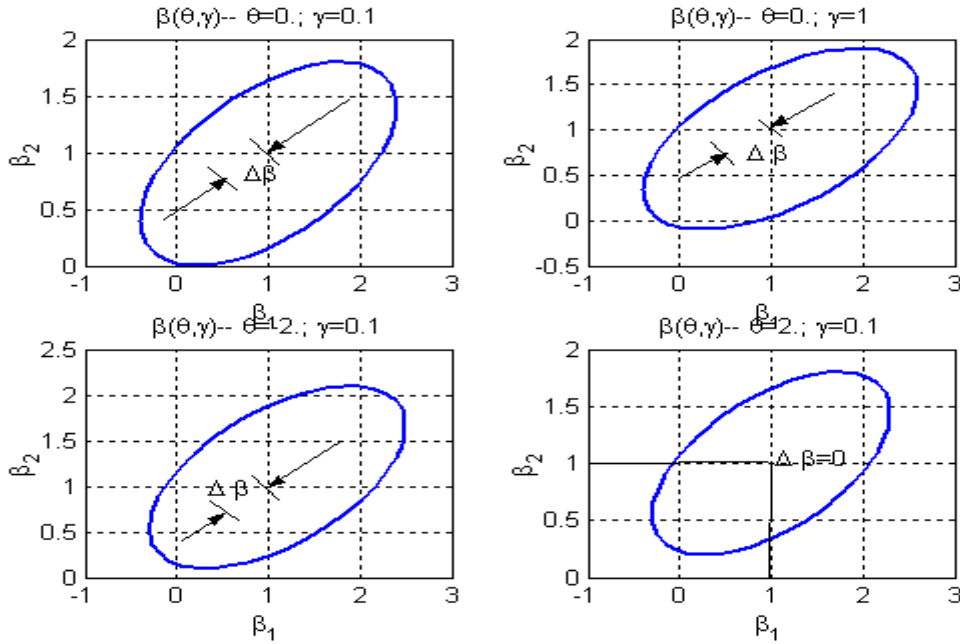


Рис. 2. Зависимость $\hat{\beta}(\theta, \gamma)$.

На рис. 2 приведены эллипсы рассеивания оценок (8) $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$, полученные для 100 выборок по 100 точек и соответствующих рис. 1 значениям θ и γ .

На рис. 2а значения $\sigma_{\hat{\beta}}$ и $\Delta\hat{\beta}$ меньше средних, на рис.2б – средние значения $\sigma_{\hat{\beta}}$ и $\Delta\hat{\beta}$; на рис.2в - $\min \sigma_{\hat{\beta}}$ и $\max \Delta\hat{\beta}$; на рис.2г - $\max \sigma_{\hat{\beta}}$ и $\min \Delta\hat{\beta}$. Параметр $m_{кр}$ практически определяется из условия вырожденности матрицы A_2 для сглаженных простейшим фильтром значений $x_i(t)$.

2. Оценивание линейной составляющей (3) нелинейной модели (2).

Естественная (вследствие конечной мощности реальных процессов) гладкость отображения (2) позволяет представить его рядом Тейлора. Для i -й компоненты вектор-функции $y^*(t)$ в отклонениях от центра x_H^* области G , имеем:

$$\Delta y_i^*(k) = \left. \frac{\partial f_i^*}{\partial \mathbf{x}^*} \right|_{\mathbf{x}_H^*} \Delta \mathbf{x}^*(k) + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^*(k) \left. \frac{\partial^2 f_i^*}{\partial \mathbf{x}^* \partial \mathbf{x}^{*T}} \right|_{\mathbf{x}_H^*} \Delta \mathbf{x}^{*T}(k) + \dots \quad (11)$$

где k – дискретны времени t : $t_k = k\Delta t$. В векторно-матричном виде имеем:

$$\Delta \mathbf{y}_i^* = \Delta \mathbf{x}^* \beta_i + \Delta \mathbf{x}^* B_i \Delta \mathbf{y}^{*T} + \dots \quad (12)$$

$$\beta_i = [\beta_{i1}, \dots, \beta_{in}]^T; i = \overline{1, n}, k = \overline{1, M};$$

$$\Delta \mathbf{y}_i^* = \begin{bmatrix} \Delta y_i^*(1) \\ \dots \\ \Delta y_i^*(M) \end{bmatrix}; \quad \Delta \mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} \Delta x_1^*(1) \dots \Delta x_n^*(1) \\ \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ \Delta x_1^*(M) \dots \Delta x_n^*(M) \end{bmatrix}; \quad B_i = \begin{bmatrix} b_{i11} \dots b_{i1n} \\ \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ b_{im1} \dots b_{imn} \end{bmatrix}.$$

Цель идентификации в данном случае состоит в получении достаточно точных оценок вектора β_i в (2) по зашумленным (как и в предыдущем методе) выборкам данных $Y(k)$, $X(k)$. Если область G сузить, растет отношение "шум - сигнал", если расширить ее, растет размерность задачи (от n для линейной модели (3) до $n+n^2$ для квадратичной (12) и т.д.). И в первом и во втором случаях задача оценивания некорректна .

Основываясь на фундаментальном свойстве гладкости процессов, можно показать, что смещение $\Delta\beta_i$ вследствие приближенности модели (3) относительно точной модели (2) будет также гладкой (а для квадратичной модели – линейной) функцией показателя величины области G . Так как МНК-оценка $\hat{\beta}_i$ при условии квадратичной нелинейности (12) равняется

$$\hat{\beta}_i = Q\Delta Y_i = Q\Delta X\beta_i + Q(\Delta X \cdot B_i\Delta X^T) + \dots \quad (13)$$

где $Q = (\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T$.

Смещение

$$\Delta\beta_i = (\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T \cdot (\Delta X \cdot B_i\Delta X^T) \quad (14)$$

является (вследствие усреднения произведений мгновенных значений нормы переменных) гладкой функцией отклонений $\|\Delta X\|$. При $\|\Delta X\| \rightarrow 0$ $\hat{\beta}_i \rightarrow \beta_i$, $\Delta\beta_i \rightarrow 0$.

Тестовый пример. Точная модель

$$y(k) = \sum_{j=1}^3 x_j(k) + \sum_{j,q=1, j \geq q}^3 x_j(k)x_q(k) \quad (15)$$

с единичными коэффициентами для четырех выборок аппроксимировалась ее линейной частью при

$$x_1(k) = x_{\max}(l) \sin\left(\pi \frac{k-1}{M-1}\right), \quad x_2(k) = x_{\max}(l) \sin\left(2\pi \frac{k-1}{M-1}\right),$$

$$x_3(k) = x_{\max}(l) \cos\left(2\pi \frac{k-1}{M-1}\right), \quad k = \overline{1, M}, \quad M = 100, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Сигналы зашумлены 10% помехой типа "белого шума". Оценки $\hat{\beta}_j$ ($j = 1, 2, 3$) вычислялись по алгоритму (6) при $m=1$.

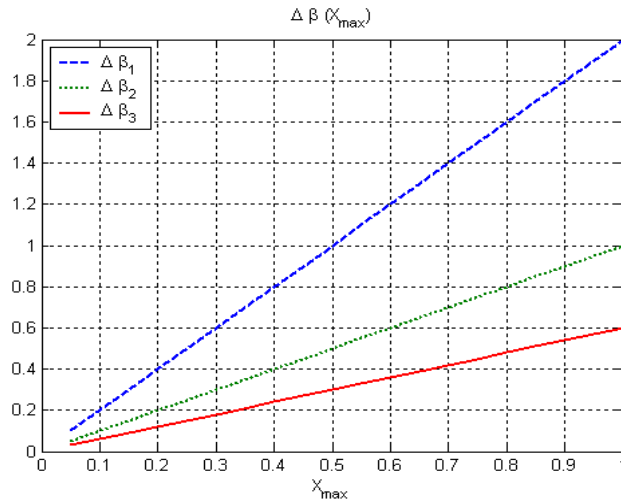


Рис. 3. Зависимость $\Delta\beta(x_{\max})$.

На рис. 3 приведены линейные зависимости смещений $\Delta\beta_j$ от $x_{\max}(l)$, практически сходящиеся при нулевой амплитуде x_{\max} к нулю; соответственно оценки $\hat{\beta}_j$ сходятся к истинным β_j .

Попытка оценить все 9 коэффициентов модели (5) как по (4), так и по (6), не привела к желаемому результату вследствие вырожденности матриц A_1 и A_2 .

Реальный пример. Имеются записи семи режимов изменения руля высоты $\delta_B(t)$, угла атаки $\alpha(t)$ и угловой скорости $\omega_{z_1}(t)$ в короткопериодическом продольном движении ЛА.

Полная модель зависимости $\dot{\omega}_{z_1}(t)$ от $\delta_B(t)$, $\alpha(t)$ и $\omega_{z_1}(t)$ подобна модели (15). В каждом из семи режимов определялись смещенные оценки коэффициентов $\hat{\beta}_j$ ($j=1,2,3$) по ним рассчитывался запас $\hat{\sigma}_n$ апериодической устойчивости по вертикальной перегрузке ЛА и аппроксимировался в зависимости от $\|\Delta\alpha\|$ линейной функцией (рис. 5)

$$\hat{\sigma}(\|\Delta\alpha\|) = 0,22 - 0,075\|\Delta\alpha\|$$

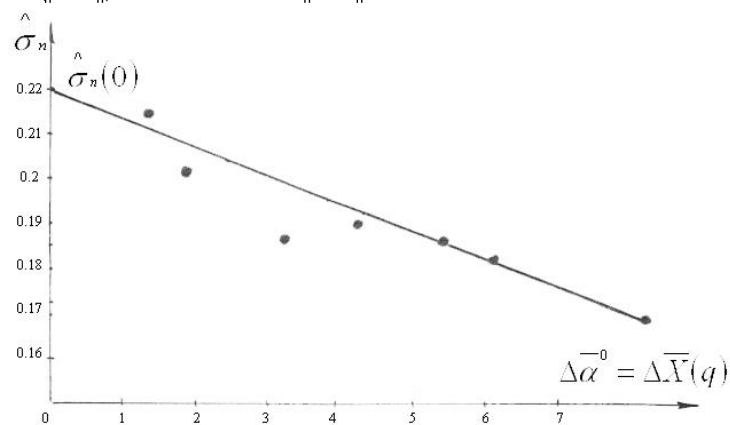


Рис. 5.

Прогнозное в $\|\Delta\alpha\|=0$ значение $\hat{\sigma}(0)$ лежит в области истинных значений σ_n . Аналогично определяются все другие показатели и АДК ЛА.

3. Непараметрическое оценивание нелинейности

В полной модели (2) выделим управляющие переменные $U^*(t)$:

$$\dot{X}^* = f^*(X^*, U^*, t). \quad (16)$$

Для реально ограниченных скоростей $\dot{X}^*(t)$ в ограниченной области G изменения $X^*(t)$ с точностью до $\varepsilon^*(t)$ модель (16) представима в виде

$$\dot{X}^*(t) = AX^*(t) + f[U^*(t)] + \varepsilon^*(t) \quad (17)$$

или, относительно i -й составляющей $x_i^*(t)$ вектор-функции $X^*(t)$ в виде модели Гаммерштейна (1):

$$a_n \frac{d^n x_i^*}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_i^*}{dt^{n-1}} + \dots + x_i^*(t) = f[U^*(t)], \quad (18)$$

где $a_j, j = \overline{1, n}$ и $f(U^*)$ неизвестны.

Задача состоит в определении статической нелинейной зависимости

$$x_i^*(t) = f(U^*) \quad (19)$$

при неизвестных a_j из произвольного динамического режима изменения $X^*(t)$ в G -области.

Произвольность режима не гарантирует линейной независимости переменных при a_j и, как следствие, невырожденности информационной матрицы A^* . Еще большая некорректность возникает в традиционном подходе при аппроксимации $f(U)$ степенным полиномом от U

$$\hat{f}(U) = \sum_{l=0}^m b_l U^l \quad (20)$$

или системой других квазиортогональных функций

$$\hat{f}(U) = \sum_{l=0}^m b_l \varphi_l(U), \quad (21)$$

когда из уравнения (18) в виде

$$\varepsilon(t) = x_i(t) - \sum_{l=0}^m b_l \varphi_l[U(t)] + \sum_{j=1}^n a_j \frac{d^j x_i(t)}{dt^j} \quad (22)$$

при неточных $x_i(t)$, $U(t)$ и их производных необходимо определить $m+n$ неизвестных, где числа m и n также неизвестны. Пусть, к примеру, в (18) линейно независимы только первая и вторая производные от $x^*(t)$. Тогда для преодоления этой проблемы воспользуемся априори известным свойством гладкости зависимости $f(U)$. Будем оценивать коэффициенты a_j уравнения (18) не из условия минимума среднего квадрата ошибки (22), а из условия гладкости зависимости $f(U)$ [9]

$$(a_1, a_2) = \arg \min_{(a_1, a_2)} \sum_{k=1}^N \left(\frac{d^r x_{\text{ск}}(t_k)}{dU^r} \right)^2,$$

(23)

где r характеризует степень гладкости $f(U)$;

$$x_{\text{ск}}(t_k) = x(t_k) - a_1 \frac{dx(t_k)}{dt} - a_2 \frac{d^2 x(t_k)}{dt^2}$$

- скомпенсированное по динамике значение $x(t_k)$.

Практически в (23) вместо производных берутся конечные разности соответствующего порядка, которые вычисляются по предварительно сглаженным с помощью сплайнов и упорядоченным по возрастанию U массивам данных.

Тестовый пример. В качестве $f(U)$ взята зависимость

$$f(U) = 4U - 60 \sin(0,065U). \quad (24)$$

Входное воздействие $U(t)$ - последовательность ступенек:

$$U(t) = U_{\max} \left[-1 + \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{16} 1(t - k\Delta t) \right].$$

На $x^*(t)$ наложен 20% «белый шум». Результат совместного МНК-оценивания коэффициентов b_i и a_1, a_2 приведен на рис. 5.

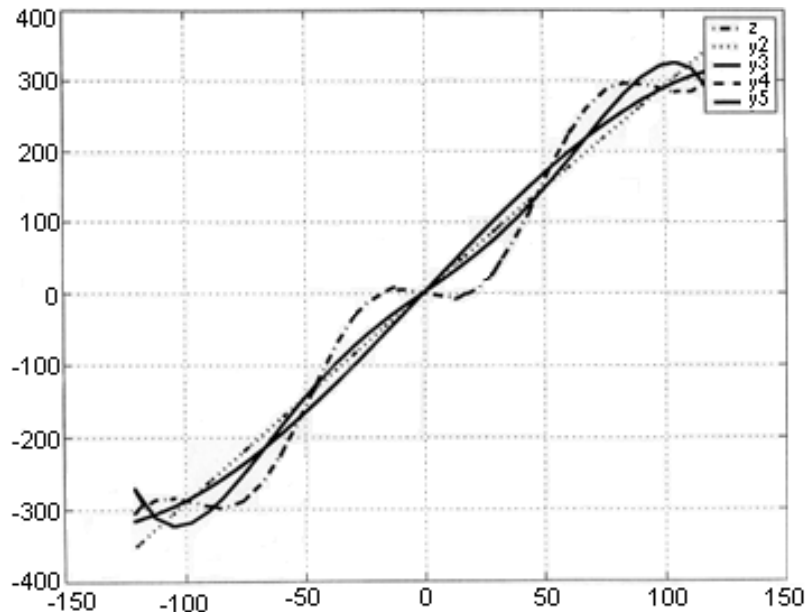


Рис. 5.

Результат непараметрического оценивания нелинейности (24) из условия (23) гладкости $f(U)$ при $r=1,2,3$ приведен на рис. 6.

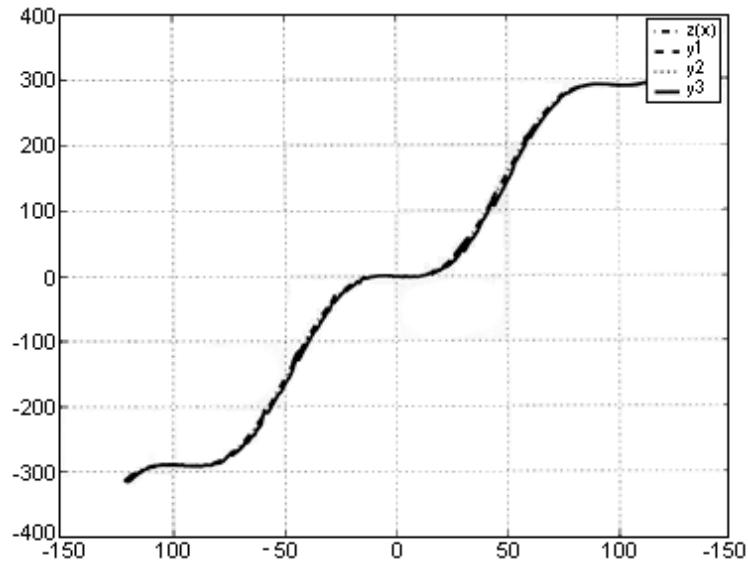


Рис. 6.

Как следует из сопоставления графиков на рисунках непараметрическая оценка $\hat{f}(U)$ с коррекцией динамики из условия (23) существенно ближе к истинной $f(U)$, чем параметрическая МНК-оценка при совместном оценивании коэффициентов линейной и нелинейной части модели Гаммерштейна (18).

Как пример практического применения на рис. 7 приведена одна из балансировочных зависимостей для ЛА, полученная из условия (23) для (1) и аппроксимированная прямой (2), а также (3), упорядоченная по N_y зависимость, построенная без компенсации динамики.

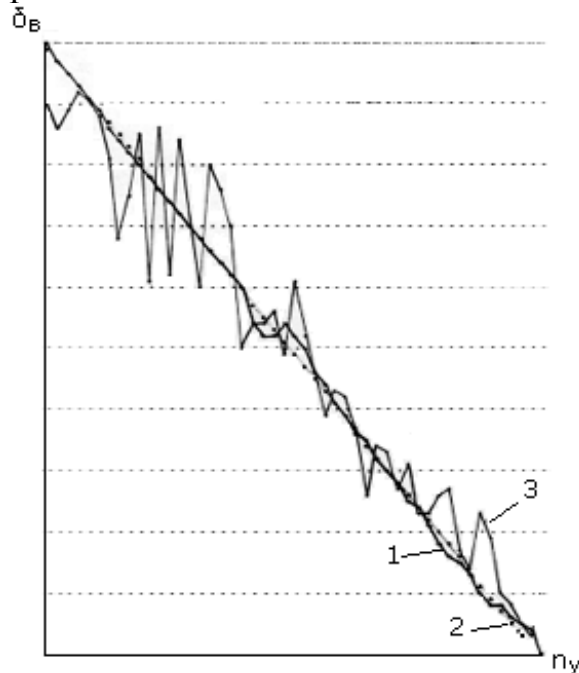


Рис. 7.

4. Восстановление полной нелинейной модели по частым моделям

Отсутствие информации о структуре нелинейной многомерной зависимости $y(x_1, \dots, x_n)$ не дает возможности применить методику оптимального планирования эксперимента. Как правило, снимаются частные сечения $y(x_i)$ при постоянных x_j ($j = \overline{1, n-1}, j \neq i$). Воспользовавшись свойством гладкости $y(\mathbf{x})$, представим эту зависимость кратным рядом Тейлора или его степенным эквивалентом:

$$y(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j + \dots \quad (25)$$

Для частного k -го сечения $y(x_k)$ при $x_i = \text{const}$, $i = \overline{1, n-1}, i \neq k$, из (25) получим одномерную зависимость

$$y(x_k) = \beta_{0k} + \beta_{1k} x_k + \beta_{2k} x_k^2 + \dots \quad (26)$$

Структура зависимости и параметры $\beta_{0k}, \beta_{1k}, \dots$ находится по МНК для (25) при различных, но фиксированных значениях остальных переменных. Далее коэффициенты частных моделей последовательно аппроксимируются как функции этих переменных.

Реальные примеры. В качестве примера исследовались высотно-скоростные характеристики турбовинтового авиадвигателя ЛА (зависимость тяги y от высоты x_1 , скорости x_2 и управляющего воздействия x_3).

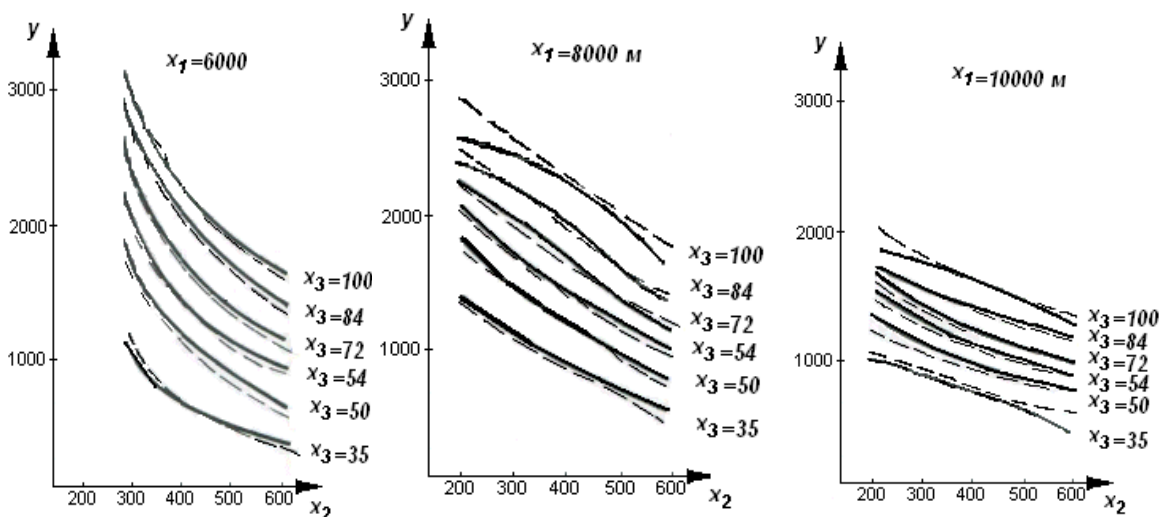


Рис. 8.

Математическая модель (сплошные линии) получена из локальных моделей сечений $y(x_k)$ при $x_1 = c_i, x_2 = c_j$:

$$y(x_3) = \beta_0^* + \beta_1^* x_3 \quad (27)$$

путем МНК-аппроксимации ее коэффициентов квадратичной моделью по x_1 :

$$\beta_0^i = \beta_{01}^i x_2 + \beta_{02}^i, \quad \beta_1^i = \beta_{11}^i x_2 + \beta_{12}^i. \quad (28)$$

и последующей аппроксимации статически значимых коэффициентов моделей (28) квадратичной моделью по x_1 :

$$\beta_i^i = \beta_{i0} + \beta_{i1} x_1 + \beta_{i2} x_2, \quad i = 0, 1.$$

В результате, полная модель приобретает вид

$$y = (\beta_0 + \beta_{01} x_1 + \beta_{02} x_1^2) + (\beta_1 + \beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_1^2) x_2 + (\beta_2 + \beta_{21} x_1 + \beta_{22} x_1^2) x_3 + \\ + (\beta_3 + \beta_{31} x_1 + \beta_{32} x_1^2) x_2 x_3 + (\beta_4 + \beta_{41} x_1 + \beta_{42} x_1^2) x_2^2.$$

Практически совпали (рис. 9) продувочные в аэродинамической трубе данные с моделью для аэродинамической поправки y в функции угла атаки x_1 и положения закрылок x_2 ЛА.

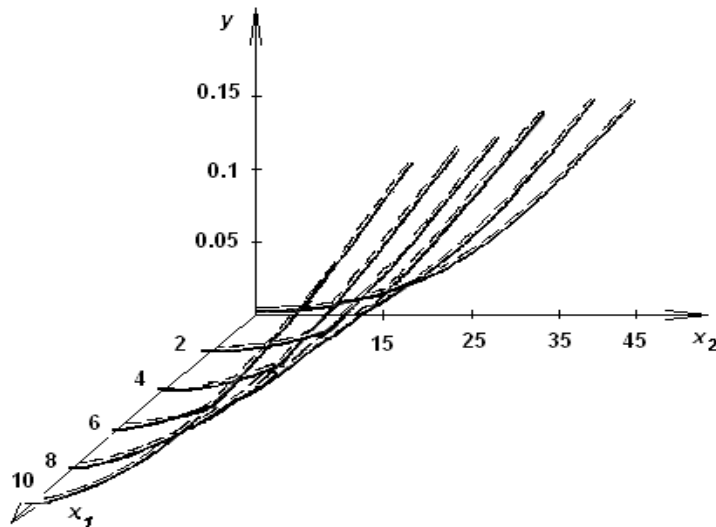


Рис. 9.

Здесь из локальных моделей

$$y(x_2) = \beta_{i1}^i x_2 + \beta_{i2}^i x_2^2, \quad x_1 = \text{const}, \quad i = \overline{1, 6} \quad (29)$$

линейной по x_1 аппроксимацией коэффициентов модели (29)

$$\beta_{i1}^i(x_1) = \beta_1 + \beta_2 x_1; \quad \beta_{i2}^i(x_1) = \beta_3 + \beta_4 x_1$$

получена полная модель

$$y = \beta_1 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \beta_4 x_1 x_2^2.$$

Максимальная ошибка аппроксимации составила 2% от y_{\max} .

Заключение.

В статье на конкретных примерах показана эффективность:

- определения аэродинамических коэффициентов ЛА;
- построения нелинейных балансировочных зависимостей из динамики движения ЛА;
- аналитического описания многомерных нелинейных зависимостей, представленных таблично (результатов продувки в аэродинамической трубе).

Литература

1. **Статья:** Сильвестров А.Н. Два альтернативных подхода к идентификации реальных объектов // Проблемы управления и информатики. -1996, №6.- С.54-65.
2. **Книга:** K.S. Narendra, P.G. Gallman. An iterative method for identification of nonlinear systems using a Hammerstein model. IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-11, p. 546, 1966.
3. **Статья:** Самсонов В.В., Сильвестров А.Н., Зименков Д.К. Две стратегии идентификации реальных объектов // Сучасні методи, інформаційне, програмне та технічне забезпечення систем управління організаційно-технологічними комплексами. – К.: НУХТ, 2009. – с.93-94.
4. **Книга:** Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М: Наука, 1979.- 286 с.
5. **Книга:** Шеффе Г. Дисперсионный анализ. М: Физматгиз, 1963. - 625 с.
6. **Книга:** Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. - М: Наука, 1991. - 432 с.
7. **Книга:** Сильвестров А.Н., Чинаев П.И. Идентификация и оптимизация автоматических систем. - М: Энергия, 1983. - 200 с.
8. **Книга:** Ивахненко А.Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. - К: Техніка, 1975. - 312 с.
9. **Книга:** Пухов Г.Е., Хатиашвили Ц.С. Модели технологических процессов. - К: Техніка, 1974. - 223 с.

An International journal “Mathematics and Computer Science”, Journal of Qafqaz University. - 2011, № 32, с. 12-23