УДК 517.5

О.В. Островська, канд. фіз.-мат. наук

НАБЛИЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИМИ СУМАМИ ЗИГМУНДА НА КЛАСАХ $C_0^\psi H_\omega$

Нехай L_p, $p\geq 1$ — простір 2π-періодичних функцій $f(\cdot)$ із скінченною нормою $\|f\|_p$, де при pI[1, ∞)

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p},$$

при $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(t)|;$$

C — множина 2π-періодичних неперервних функцій $f(\cdot)$ з нормою

$$\|f\|_C = \max |f(t)|;$$

$\omega(f, \delta), 0<\delta\leq\pi$ — модуль неперервності функції $f\in C$, а H_ω — клас 2π-періодичних неперервних функцій, що задовольняють умову $|f(t)-f(t')|\leq\omega(|t-t'|)$, де $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності.

Нехай

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f,x) \qquad (1)$$

— ряд Фур'є функції $f\in L$, $S_n = S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f,x)$ — її суми Фур'є.

А.Зигмунд [1] ввів у розгляд лінійний метод підсумовування рядів Фур'є. Цей метод визначається за допомогою трикутної матриці чисел

$$\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\} = \left\{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^s\right\}, k = 1,\ldots,n-1, \quad s>0, \lambda_0^{(n)} = 1. \qquad (2)$$

При цьому кожній функції $f\in L$ на основі її розвинення в ряд Фур'є (1) ставиться у відповідність послідовність тригонометричних поліномів вигляду

$$Z_n(f,\Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} A_k(f,x), \qquad n = 1,2,\ldots. \qquad (3)$$

Такі поліноми називаються сумами Зигмунда.

У випадку $f\in C$ послідовність $Z_n(f, \Lambda)$ рівномірно збігається. Апроксимативні властивості сум Зигмунда вивчалися багатьма математиками (див., наприклад, [1]–[6]). В роботах [7]–[9] розглянуто аналог сум Зигмунда, в якому

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{\varphi(n)}{\varphi(k)}, \qquad (4)$$

де $\varphi(k)$ — значення в точках kIN деякої неперервної спадної функції $\varphi(x)$. Такі узагальнені суми Зигмунда позначаються $Z_n^\varphi(f,x)$.

Нехай $\psi(x)$, $x\geq 1$ — неперервна опукла вниз функція, що прямує до нуля при $x\to\infty$. Множину таких функцій позначимо $\mathfrak{M}$.

О. І. Степанець [10], [11] запропонував класифікацію функцій на основі перетворення їхніх рядів Фур'є і позначив через L_β^ψ клас сумовних 2π-періодичних функцій $f(x)$, для яких ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)}\left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right), \quad \beta\in R,$$

$$\left|\int_{\mu}^{\infty}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{n}{t}\int_{1}^{\infty}\psi'(nv)\sin vt\,dv\,dt\right| = O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{14}$$

Далі з (7), (11) і (13) дістанемо:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\bar{\tau}_n(t)\,dt\right| = O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right); \tag{15}$$

$$\left|\int_{\pi}^{\mu(n)}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\bar{\tau}_n(t)\,dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_{\pi}^{\mu(n)}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\left(\psi(n)\frac{\sin t}{t} + n\psi(n)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}\right)dt\right| +$$

$$+ O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$\left|\int_{\mu(n)}^{\infty}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\bar{\tau}_n(t)\,dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_{\mu}^{\infty}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\left[\frac{\psi(n)(\cos\frac{t}{n}-1)}{t^2} - \frac{n}{t}\int_{1}^{\infty}\psi'(nv)\sin vt\,dv\right]dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_{\mu(n)}^{\infty}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\psi(n)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}dt\right| + O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{16}$$

Оскільки

$$\left|\frac{n\psi(n)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}dt\right| =$$

$$= \frac{n\psi(n)}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{2\sin^2\frac{t}{2n}}{t^2}dt\right| = O(1)\frac{\psi(n)}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

то

$$\frac{n\psi(n)}{\pi}\int_{\pi\le|t|\le\mu(n)}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}dt +$$

$$+ \frac{n\psi(n)}{\pi}\int_{|t|\ge\mu(n)}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}dt =$$

$$= \frac{n\psi(n)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}dt + O(1)\frac{\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n} =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos t-1}{t^2}dt + O(1)\frac{\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n}. \tag{17}$$

Згідно з лемою 1.1 роботи [11, с.43]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)\frac{\cos t-1}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(t)\,dt,$$

тому з (17) дістанемо

$$\frac{n\psi(n)}{\pi}\left(\int_{\pi\le|t|\le\mu(n)}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}dt + \right.$$

$$\left. + \int_{|t|\ge\mu(n)}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}dt\right) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(t)\,dt + O(1)\frac{\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n} =$$

$$= \psi(n)f_0^{\psi}(0) + O(1)\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)\psi(n)}{n}. \tag{18}$$

Отже, з (11)–(18) маємо

$$\rho_n(f,0) = \frac{\psi(n)}{\pi}\int_{\pi\le|t|\le\mu(n)}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin t}{t}dt +$$

$$+ \psi(n)f_0^{\psi}(0) + O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{19}$$

Нехай спочатку $\mu(n)\le n$ і виконується умова

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln\mu(n) = o(1). \tag{20}$$

Із результатів О.І.Степанця [11, с.112] випливає, що

$$\sup_{f\in C_0^{\psi}H_{\omega}}\left|\frac{\psi(n)}{\pi}\int_{\pi\le|t|\le\mu(n)}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin t}{t}dt\right| =$$

$$= \frac{2\theta}{\pi^2}\left|\psi(n)\ln\mu(n)\int_{0}^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt\right| +$$

$$+ O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\psi(n), \quad \frac{2}{3}\le\theta\le 1. \tag{21}$$

Тому з (19) і умови (20) маємо

$$|\rho_n(f,0)| = \psi(n)|\,f_0^{\psi}(0)\,| + o(1)\psi(n), \tag{22}$$

$$\varepsilon_n(C_0^{\psi}H_{\omega}, Z_n^{\psi}) = \psi(n)\sup_{f\in C_0^{\psi}H_{\omega}}|\,f_0^{\psi}(0)\,| + o(1)\psi(n). \tag{23}$$

Якщо модуль неперервності $\omega(t)$ є опуклою функцією, то згідно з теоремою 1 роботи [13]

$$\sup_{f_0^{\psi}\in H_{\omega}}|\,f_0^{\psi}(0)| = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\omega(2t)\,dt.$$

Тому із (23) маємо

$$\varepsilon_n(C_0^{\psi}, Z_n^{\psi}) = \frac{2}{\pi}\psi(n)\int_{0}^{\pi/2}\omega(2t)\,dt + o(\psi(n)). \tag{24}$$

Якщо ж $\omega(t)$ — загальний модуль неперервності, то (див, наприклад, [14, с.58,74], [13])

$$\sup_{f_0^{\psi}\in H_{\omega}}|\,f_0^{\psi}(0)| = \frac{2\theta}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\omega(2t)\,dt, \quad \frac{2}{3}\le\theta\le 1, \tag{25}$$

і

$$\varepsilon_n(C_0^{\psi}H_{\omega}, Z_n^{\psi}) = \frac{2\theta\psi(n)}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\omega(2t)\,dt + o(\psi(n)). \tag{26}$$

є рядом Фур'є деякої функції з L, яку він позначив f_β^ψ і назвав (ψ, β)-похідною функції f(x). Якщо $f\in C$, а $f_\beta^\psi \in L_\infty$ і при цьому $\|f\|_\infty \le 1$, то клас таких функцій позначимо $C^\psi_{\beta,\infty}$. Якщо ж $f^\psi_\beta \in H_\omega$, то позначимо його $C^\psi_\beta H_\omega$.

Кожній функції $\psi\in\mathfrak{M}$ поставимо у відповідність пару функцій $\eta(t)=\eta(\psi,t)$ і $\mu(t)=\mu(\psi,t)$, покладаючи [11, с. 94]

$$\eta(t)=\psi^{-1}(\psi(t)/2),\quad \mu(t)=\frac{t}{\eta(t)-t},$$

і за їх допомогою з $\mathfrak{M}$ виділимо три підмножини: $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$. До множини $\mathfrak{M}_C$ віднесемо всі функції $\psi\in\mathfrak{M}$, для яких знайдуться такі сталі числа K_1 і K_2 (взагалі кажучи, залежні від $\psi(\cdot)$), що $0<K_1<\mu(\psi,t)\le K_2<\infty$; до множини $\mathfrak{M}_0$ — функції $\psi\in\mathfrak{M}$, для яких $0<\mu(\psi,t)<K$. Через $\mathfrak{M}_\infty$ позначимо підмножину функцій $\psi\in\mathfrak{M}$, для яких $\mu(\psi,t)$ при $t\to\infty$ монотонно зростає і не обмежена зверху.

У випадку $\lambda_k = 1-\left(\frac{k}{n}\right)^s$ поведінка верхніх меж відхилень

$$\varepsilon_n(C^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_n) = \sup_{f\in C^\psi_{\beta,\infty}} \left|f - Z^\psi_n(f)\right|$$

достатньо повно вивчена в роботі [6]. У випадку узагальнених сум Зигмунда, побудованих за допомогою матриці $\Lambda=\{\lambda_k^{(n)}\}=1-\frac{\psi(n)}{\psi(k)}$, в [7], [8] встановлено, що при $\psi\in\mathfrak{M}_C$ порядок наближення такими сумами на класах $C^\psi_{0,\infty}$ збігається з порядком найкращого наближення. У випадку $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$ показано, що

$$\varepsilon_n(C^\psi_{0,\infty},Z^\psi_n)=\sup_{f\in C^\psi_{0,\infty}}|\rho_n(f,x)|=O(1)\psi(n)\ln(\min(\mu(n),n)).$$

У роботі [9] вивчено поведінку $\varepsilon_n(C^\psi_{0,\infty},Z^\psi_n)$ в разі виконання умов опуклості (вгору, вниз) функції $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, якщо $\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=C$ або ∞ та $\psi\in\mathfrak{M}_C$. Зокрема, за умов $\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=C$, $\psi\in\mathfrak{M}_C$,

$$\varepsilon_n(C^\psi_{\beta,\infty},Z^\psi_n)=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\varphi(n)\int_1^n\frac{\psi(x)}{\varphi(x)x}dx+O(1)\psi(n).$$

Звідси випливає, що при $\varphi(x)=\psi(x)$

$$\varepsilon_n(C^\psi_{\beta,\infty},Z^\psi_n)=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\ln n+O(1)\psi(n).$$

Якщо $\psi(t)=t^{-r}$, $t\ge 1$, $r>0$, то таку рівність отримано в роботі [4].

У даній роботі вивчається поведінка величини $\varepsilon_n(C^\psi_\beta H_\omega, Z^\psi_n)$ у випадку $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$ та $\sin\frac{\beta\pi}{2}=0$.

Нехай $\lambda_n(\nu)$, $0\le\nu\le1$, $n=1,\dots$ — послідовність функцій таких, що

$$\lambda_n\left(\frac{k}{n}\right)=1-\frac{\psi(n)}{\psi(k)},\quad k=1,\dots,n-1,$$

$$\lambda_n(\nu)=\begin{cases}1-\frac{\psi(n)}{\psi(k)}, & \frac1n\le\nu\le1,\\ 0, & \nu\ge1\end{cases}\tag{6}$$

та

$$\tau_n(\nu,\psi)=\tau_n(\nu)=\begin{cases}n\nu\psi(n), & 0\le\nu\le\frac1n,\\ (1-\lambda_n(\nu))\psi(n\nu), & \frac1n\le\nu\le1,\\ \psi(n\nu), & \nu\ge1.\end{cases}\tag{7}$$

Оскільки перетворення Фур'є

$$\hat\tau_n(t)=\frac1n\int_0^\infty\tau_n(\nu)\cos\left(\nu t+\frac{\beta\pi}{2}\right)d\nu\tag{8}$$

функції $\tau_n(\nu)$ є сумовною функцією на числовій прямій (див. [6], [9], [11], [12]) то, як показано в [10], відхилення $\rho_n(f,x)$, $f\in C^\psi_\beta$, можна подати у вигляді

$$\rho_n(f,x)=\frac1\pi\int_{-\infty}^\infty f^\psi_\beta\left(x+\frac tn\right)\hat\tau(t)dt.\tag{9}$$

Крім того, у цьому випадку [11, с.52]

$$\tau_n(\nu)=\int_{-\infty}^\infty\hat\tau_n(t)\cos\left(\nu t+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt.\tag{10}$$

Справедлива така теорема:

Теорема. Якщо $\sin\frac{\beta\pi}{2}=0$, $\psi\in M_\infty$, то при $n\to\infty$

$$\varepsilon_n(C^\psi_0 H_\omega,Z^\psi_n)=$$

$$=\begin{cases}\frac{2\theta}{\pi}\psi(n)\int_0^{\pi/2}\omega(2t)dt+o(1)\psi(n),\ \omega\left(\frac1n\right)\ln(\min(n,\mu(n)))=o(1),\\ \frac{2\theta}{\pi^2}\psi(n)\ln(\min(n,\mu(n)))\times\\ \quad\times\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt+O(1)\psi(n),\ \omega\left(\frac1n\right)\ln(\min(n,\mu(n)))\to\infty,\end{cases}$$

$$\varepsilon_n(C^\psi_0 H_\omega,Z^\psi_n)=O(1)\psi(n),\ \omega\left(\frac1n\right)\ln(\min(n,\mu(n))=O(1),$$

де $\frac23\le\theta<1$.

Доведення. Як відомо [11, с.78], верхня межа $\varepsilon_n(C^\psi_0 H_\omega,Z^\psi_n)$ не залежить від x. Тому оцінимо відхилення $|\rho_n(f,x)|$ в точці x = 0. Оскільки $\hat\tau_n(0)=0$, то, згідно з [11, лема 3.1], $\int_{-\infty}^\infty\hat\tau(t)dt=0$, $\forall\beta\in R$. Отже, відхилення $\rho_n(f,x)$ можна зобразити у вигляді

$$\rho_n(f,x)=\frac1\pi\int_{-\infty}^\infty\Phi\left(0,\frac tn\right)\hat\tau_n(t)dt,\tag{11}$$

де $\Phi\left(0,\frac tn\right)=\Phi\left(\frac tn\right)=f_0^\psi\left(\frac tn\right)-f_0^\psi(0)$.

Використовуючи (7) та (11), маємо

$$\rho_n(f,0)=\frac1\pi\int_{-\infty}^\infty\Phi\left(\frac tn\right)\left[\psi(n)\int_0^{1/n}n\nu\cos\nu t\,d\nu+\psi(n)\int_{1/n}^1\cos\nu t\,d\nu+\int_1^\infty\psi(n\nu)\cos\nu t\,d\nu\right]dt.\tag{12}$$

Надалі будемо використовувати оцінки, встановлені в роботі [11, с.106,108,120,121]:

$$\left|\int_0^\infty\Phi\left(\frac tn\right)\int_1^\infty\psi(n\nu)\cos\nu t\,d\nu\,dt\right|=O(1)\psi(n)\omega\left(\frac1n\right),\tag{13}$$

Якщо $\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n \to \infty$, $n\to\infty$, то, враховуючи (21), з (19) випливає

$$\varepsilon_n(C_0^\psi H_\omega, Z_n^\psi) = $$
$$= \frac{2\theta}{\pi^2}\psi(n)\ln\mu(n)\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sin t\,dt + O(1)\psi(n). \qquad (27)$$

Якщо $\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln\mu(n) = O(1)$, то з (19) дістанемо

$$\varepsilon_n(C_0^\psi H_\omega, Z_n^\psi) \le \theta\frac{2}{\pi^2}\psi(n)\ln\mu(n)\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt +$$
$$+\frac{2\theta\psi(n)}{\pi}\int_0^{\pi/2}\omega(2t)\,dt + O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{t}{n}\right) = O(1)\psi(n). \qquad (28)$$

Нехай $\mu(n)>n$. Із співвідношення (19) дістанемо

$$\rho_n(f,0) = \frac{\psi(n)}{\pi}\int_{\pi\le|t|\le n\pi}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin t}{t}dt +$$
$$+\frac{\psi(n)}{\pi}\int_{n\pi\le|t|\le\mu(n)}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin t}{t}dt +$$
$$+\psi(n)f_0^\psi(0) + O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (29)$$

із твердження 7.1 з роботи [11]–

$$\left|\int_{n\pi\le|t|\le\mu(n)}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin t}{t}dt\right| = O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отже,

$$\rho_n(f,0) = \frac{\psi(n)}{\pi}\int_{\pi\le|t|\le n\pi}\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin t}{t}dt +$$
$$+\psi(n)f_0^\psi(0) + O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (30)$$

Якщо $\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n = o(1)$, то з (30) дістанемо

$$\varepsilon_n(C_0^\psi H_\omega, Z_n^\psi) = \frac{2\theta}{\pi}\psi(n)\int_0^{\pi/2}\omega(2t)\,dt + o(1)\psi(n). \qquad (31)$$

Якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, то $\theta = 1$.

Якщо $\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n \to \infty$, то при $n\to\infty$

$$\varepsilon_n(C_0^\psi H_\omega, Z_n^\psi) = $$
$$= \frac{2\theta}{\pi^2}\psi(n)\ln n\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt + O(1)\psi(n). \qquad (32)$$

Якщо ж $\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n = O(1)$, то з (30) маємо

$$\varepsilon_n(C_0^\psi H_\omega, Z_n^\psi) \le \frac{2\theta}{\pi^2}\psi(n)\ln n\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt +$$
$$+\frac{2\theta}{\pi}\psi(n)\int_0^{\pi/2}\omega(2t)\,dt + O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right) = O(1)\psi(n). \qquad (33)$$

Таким чином, із співвідношень (24), (26), (27), (28), (30), (32), та (33) випливають твердження теореми.

Висновок. Одержані результати є новими та актуальними. Вони можуть використовуватись у наближених обчисленнях при вивченні прикладних проблем та в числових розрахунках.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Zygmund A.* The approximation of functions by typical means of their Fourier series // Duke math. J.—1945.—12, N 4,—P. 695–704.
2. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами // Тр. Мат. ин-та АН СССР.—1945.—15.—С. 1–76.
3. *Nagy B.* Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Furierschen Reihen // Mat. es Fis. Japok.—1942.—19—P. 123–138.
4. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближений дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Тр. Мат. ин-та АН СССР.—1961.—[62].—С. 61–97.
5. *Степанец А. И.* Асимптотические представления уклонений средних Зигмунда от дифференцируемых периодических функций // Методы теории приближений и их приложения.—К.: Ин-т математики АН УССР, 1962.—С. 96–116.
6. *Бушев Д. Н.* Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда.—К., 1984.—62 с.—(Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 84.56).
7. *Гаврилюк В. Т.* О характеристике класса насыщения $C_0^\psi L\infty$ // Укр. мат. журн.—1986.—38, N 4.—С. 421–427.
8. *Гаврилюк В. Т.* О классах насыщения линейных методов суммирования рядов Фурье // Укр. мат. журн.—1988.—38, N 5.—С. 569–576.
9. *Ковальская И. Б.* Приближение классов периодических функций аналогами сумм Зигмунда в метрике С.—К., 1988.—28 с.—(Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 88.14).
10. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.—К., 1983.—57 с.—(Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
11. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.—К.: Наук. думка, 1987.—287 с.
12. *Рукасов В. И.* Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье.—К., 1983.—54 с.—(Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 83.62).
13. *Корнійчук М. П.* Про екстремальні властивості періодичних функцій // Доп. АН УРСР.—1962.—N 8.—С. 993–997.
14. *Ефимов А. В.* Исследования по общим линейным методам суммирования рядов Фурье: Дисс. д-ра физ.-мат. наук.—Монино, 1962.—288 с.

Надійшла до редколегії 28.03.2000 р.