

УДК 532.529

**Кулінченко В.Р. доктор техн. наук**  
**Зав'ялов В.Л. кад. техн. наук, Національний університет харчових технологій**  
**Kulintchenko V.R doctor of science**  
**Zavialov V.L. cand. of science, National university of food technology**

**Mathematical model of dynamics of growth of steam phase**  
**(Part III. Transference of warmth in a liquid, change of external pressure, influence of**  
**thermophysical parameters, field of speeds and pressure near a bubble)**

*Продовжений аналіз рівнянь для отримання математичної моделі динаміки парогазової бульбашки під час її росту і захопування. Розглянуті рівняння перенесення теплоти в рідкій фазі і прихованої теплоти пароутворення (конденсації). Отримані рівняння для визначення теплофізичних параметрів системи таких як: тиску і густини насиченої пари і рідини; коефіцієнта поверхневого натягу; коефіцієнта динамічної в'язкості рідини. Отриманні рівняння полів швидкостей і тиску в рідині біля бульбашки.*

**Ключові слова:** перенесення теплоти, прихована теплота, густина, поверхневий натяг, тиск, температура, динамічна в'язкість, поля швидкості і тиску.

*The analysis of equalizations is prolonged for the receipt of mathematical model of dynamics of vapor-gas bubble during its growth and slamming. Equalizations of transference of warmth in a liquid phase and hidden warmth of vaporization are considered (condensations). Equalizations are got for determination of thermo physical parameters of the system of such as: pressure and closeness of the saturated pair and liquid; coefficient of superficial affected; coefficient of dynamic viscosity of liquid. Receipt of equalization of the fields of speeds and pressure in a liquid near a bubble.*

**Keywords:** transference of warmth, a warmth, closeness, superficial affected, pressure, temperature, dynamic viscosity, fields of speed and pressure, is hidden.

*Продлен анализ уравнений для получения математической модели динамики парогазового пузырька во время ее роста и схлопывания. Рассмотрены уравнения теплопереноса в жидкой фазе и скрытой теплоты парообразования (конденсации). Получены уравнения для определения теплофизических параметров таких как: давления и плотности насыщенного пара и жидкости; коэффициента поверхностного натяжения, коэффициента динамической вязкости жидкости. Получены уравнения полей скоростей и давления в жидкости возле пузырька.*

**Ключевые слова:** теплоперенос, скрытая теплота, плотность, поверхностное натяжение, давление, температура, динамическая вязкость, поля скоростей и давления.

**Перенесення теплоти у рідкій фазі.** Теплообмін бульбашки з навколишньою рідиною є одним із основних факторів, які впливають на його динамічні характеристики. Час релаксації у процесі нестационарного перенесення теплоти в рідкій фазі значно перевищує інші супутні процеси. Тому динамічні характеристики бульбашки залежать від того, наскільки швидко підводиться теплота із об'єму рідини до міжфазної поверхні чи відводиться від неї. При дослідженні динаміки бульбашок цьому питанню надається особлива увага.

Аналітичні вирішення задачі росту чи захопування бульбашки отримані за умови, що зміна розмірів бульбашки відбувається монотонно [4, 5, 12, 18]. Таке уявлення можна прийняти при аналізі кипіння, але недопустимо у разі дослідження процесів кавітації. Деякі дослідники вводять припущення, що товщина теплового шару незначна, у порівнянні з розміром бульбашки, і тепловий пограничний шар можна вважати плоским [4, 5, 10, 13, 15]. Таке уявлення суттєво полегшує розв'язок задачі при аналізі процесів кипіння, але не відповідає дійсності при захопуванні кавітаційних бульбашок і призводить до якісно невірних результатів.

Для оцінки теплообміну між рідиною і бульбашкою необхідно знати температуру рідини  $T_s$  безпосередньо на між фазній поверхні. (**Примітка.** Тут і далі в тексті даються пояснення умовних позначень і індексів тільки тих величин які не названі в частині I і II цієї публікації, нумерація формул і списку літератури продовжує розпочату у частині I і продовжену у частині II), Ця температура є визначальною при розрахунках швидкості перенесення маси і теплоти згідно рівнянь (34)...(38) і входить в ці рівняння як невідомий параметр. Зазвичай використовуване припущення  $T_s = T_b$ , виправдане для випадків квазістаціонарного кипіння, повністю несприйнятлива при аналізі захопування осцилюючих бульбашок. Виходячи з цього необхідно включити в систему незалежне рівняння для визначення  $T_s$ . Для опису температурного поля в околиці бульбашки і визначення біжучого значення  $T_s$  використано інтегральний метод вирішення нестационарних задач теплопровідності [19].

Рівняння теплопровідності у сферичних координатах для нестислої рідини навколо одиничної бульбашки має вигляд:

$$\frac{\partial(\rho_\ell \tilde{n}_\ell T_\ell)}{\partial \tau} + W(r) \frac{\partial(\rho_\ell \tilde{n}_\ell T_\ell)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_\ell r^2 \frac{\partial T_\ell}{\partial r} \right). \quad (39)$$

У цьому рівнянні  $c_\ell$  – питома теплоємність рідини, яка приймається сталою величиною. Із умови нерозривності потоку для рідини слідує  $\rho_\ell W(r)r^2 = \rho_\ell W_R R^2 = \text{const}$ , що дає можливість рівняння (39) привести до вигляду:

$$\frac{\partial T_\ell}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( a_T r^2 \frac{\partial T_\ell}{\partial r} + W_R R^2 T_\ell \right), \quad (40)$$

де  $a_T = \lambda_\ell / (\rho_\ell c_\ell)$  – коефіцієнт температуропровідності рідини.

Для вирішення цього рівняння використаємо стандартний інтегральний метод розв'язку задач нестационарної теплопровідності [19]. Введемо параметр глибини проникнення  $\delta(\tau)$ , який характеризує змінну в часі товщину прилеглого до бульбашки шару рідини, де градієнт температури відмінний від нуля, і який можна, в певній мірі, ототожнити з товщиною нестационарного температурного шару. На зовнішній границі цього шару ( $r = R + \delta$ ) температура  $T_\ell$  дорівнює температурі рідини на безмежності від бульбашки  $T_{\ell 0}$ , а  $dT_\ell/d\tau = 0$ . На межі шару  $r = R$ , прилеглого до поверхні бульбашки, температура  $T_\ell = T_s$ . Помножимо обидві частини рівняння (40) на  $r^2 dr$  і проінтегруємо в межах від  $R$  до  $R + \delta$ , отримаємо інтегральне рівняння теплового балансу.

$$\int_R^{R+\delta} \frac{\partial T_\ell}{\partial \tau} r^2 dr = \int_R^{R+\delta} \frac{\partial}{\partial r} \left( a_T r^2 \frac{\partial T_\ell}{\partial r} \right) dr. \quad (41)$$

Рішення цього рівняння будемо шукати так, щоб воно задовольняло рівняння теплового балансу у формі (41). Виконаємо інтегрування обох частин (41) з урахуванням правила диференціювання інтегралів, які залежать від параметра:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \int_R^{R+\delta} T_\ell r^2 dr \right) - T_0 \frac{d(R+\delta)}{d\tau} + T_s \frac{dR^3}{d\tau} = \left( a_T r^2 \frac{dT_\ell}{dr} + W_R R^2 T_\ell \right) \Big|_R^{R+\delta}. \quad (42)$$

Величина в дужках лівої частини цього рівняння не залежить від координати  $r$ , що робить можливим перехід від частинного диференціювання в часі до повного. Епюру температури біля бульбашки будемо шукати в наближенні параболічної інтерполяції:

$$T_\ell(r, \tau) = T_0 + (T_s - T_0) \frac{R(\tau)}{r} \left[ \frac{R(\tau) + \delta(\tau) - r}{\delta(\tau)} \right]^2. \quad (43)$$

Підставимо  $T_\ell(r, \tau)$  у формі (43) в рівняння (42) і виконаємо інтегрування в обох частинах. В результаті чого отримаємо звичайне диференціальне рівняння, яке можна привести до вигляду:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \frac{4\pi(T_0 - T_s)}{12} (4R^2 + R\delta^2) \right] = 4\pi(T_0 - T_s) a_r R^2 \left( \frac{2}{\delta} + \frac{1}{R} \right). \quad (44)$$

Під час виводу цього рівняння було використано таке наближення  $W_R R^2 \approx 1/3 dR^3/d\tau$ .

Ліва частина рівняння (44) представляє зміну кількості теплоти в рідині у межах шару товщиною  $\delta$  внаслідок перенесення теплоти через міжфазну поверхню, а права – характеризує величину теплового потоку, який надходить до рідини. Оскільки нагрівання чи охолодження рідини обумовлене як її теплообміном з газовою фазою, так і передачею прихованої теплоти  $L$  при конденсації чи випаровуванні, то кожна із частин рівняння (44) дорівнюють величині  $[-4\pi R^2(jL + q)]$ , де  $j = f(T_s)$  і  $q = f(T_s)$  визначаються виразами (34) і (36), відповідно. Виходячи з цього, можна записати:

$$(T_0 - T_s) \lambda_\ell \left( \frac{2}{\delta} + \frac{1}{R} \right) = -jL(T_s) - q. \quad (45)$$

Розв'язок цього рівняння дозволяє визначити невідому функцію  $T_s(\tau)$ , для чого необхідно знати залежність від часу параметра  $\delta$ . Підставимо замість правої частини (44) її значення із (45), отримаємо диференціальне рівняння наступного вигляду:

$$\frac{dH_\ell}{d\tau} = -4\pi R^2 [jL(T_s) - q], \quad (46)$$

де величина  $H_\ell(\tau)$  характеризує надлишкову кількість теплоти у тепловому шарі товщиною  $\delta$  біля бульбашки, отримане внаслідок тепло і масообміну рідини з газовою фазою. Залежність  $H_\ell = f(\delta)$  має вигляд:

$$H_\ell(\tau) = \frac{4\pi \rho_\ell c_\ell (T_s - T_0)}{12} (4R^2 \delta + R\delta^2). \quad (47)$$

Розв'язуючи (46) і визначивши функцію  $H_\ell(\tau)$ , можна далі із (47) знайти значення глибини проникнення теплоти  $\delta$  для кожного моменту часу

$$\delta = 2R \left( \sqrt{1 + \frac{3H_\ell}{4\pi R^3 \rho_\ell c_\ell (T_s - T_\ell)}} - 1 \right). \quad (48)$$

Введення в систему рівнянь (45), (46) і (48) дозволяє визначити температуру міжфазної поверхні  $T_s(\tau)$ , кількість переданої рідиною теплоти  $H_\ell(\tau)$  і параметр, який характеризує товщину теплового шару  $\delta(\tau)$ .

**Вплив зміни зовнішнього тиску.** Інтенсивність розвитку бульбашок визначається швидкістю зміни тиску в системі  $p_\ell$  від початкового значення  $p_{\ell 0} = p_{b0} - 2\sigma/R$  до кінцевого значення  $p_{\ell f}$ . Тиск  $p_\ell$  тут тотожний параметру  $p_\infty$  в рівнянні (25) – тиску в рідині на великій відстані від бульбашки.

У більшості робіт поведінка бульбашки моделюється у припущенні ступінчастого (стрибкового) профілю зміни тиску в рідині [2,10,20]. Деякі дослідники довільно задають вид функції  $p_\ell = f(\tau)$ , апроксимуючи її параболою, експонентою чи прямою лінією. Приймати прямолінійний профіль зміни тиску на протязі проміжку часу  $\Delta\tau$  не коректно, тому що на початку і в кінці цього часового інтервалу вводиться значна похибка – стрибком змінюється величина  $dp_\ell/d\tau$ , що вносить велику помилку в результати досліджень.

Аналіз різних методик проведення досліджень, зв'язаних із швидкою зміною тиску в об'ємі рідини, приводить до висновку, що не залежно від способу зміни тиску в системі характер реальної кривої  $p_\ell = f(\tau)$  добре апроксимується косинусоїдальною залежністю у вигляді такого рівняння:

$$\begin{aligned} \text{при } 0 < \tau < \Delta\tau \quad p_\ell(\tau) &= \frac{p_{\ell 0} - p_{\ell f}}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi\tau}{\Delta\tau}\right) \right]; \\ \text{при } \tau \geq \Delta\tau \quad p_\ell(\tau) &= p_{\ell f}. \end{aligned} \quad (49)$$

Величина  $p_{\ell f}$  – це сталий тиск у рідині на відстані від бульбашки, який установлюється внаслідок зміни зовнішнього тиску, а  $\Delta\tau$  – проміжок часу, за який відбувається ця зміна.

**Вплив теплофізичних параметрів.** При швидкому перетворенні енергії під час еволюційних змін бульбашки значення температури і тиску, як всередині бульбашки, так і біля неї можуть змінюватися на декілька порядків на протязі дуже короткого часу. Відповідно, сильно змінюються і теплофізичні властивості, які сильно залежать від температури і тиску. При наближенні температури рідини до критичного значення коефіцієнт поверхневого натягу  $\sigma$  і прихована теплота випаровування  $L$  прямують до нуля, а густина рідини стає спів розмірною з густиною пари.

З причини відсутності для більшості теплофізичних величин точних аналітичних залежностей від температури нами використаний пів-емпіричний підхід. Добираються по можливості прості співвідношення, які максимально наближені до точних табличних значень досліджуваного параметра в межах зміни температури рідини від потрібної точки до критичної температури. Оскільки у більшості випадків під час досліджень справу мають з водою, то доцільно розглянути емпіричні залежності теплофізичних параметрів, що стосуються води і водяної пари. (При кипінні розчинів розгляду підлягають теплофізичні параметри рідкої і легкої фаз. Легкою фазою у багатьох випадках є теж водяна пара).

• **Тиск.** Одним із найбільш важливих параметрів моделі, величина якого корінним чином впливає на поведінку системи, є тиск насиченої пари  $p_{sat}(T)$ . Залежність цього параметра від температури у термодинаміці описується відомим рівнянням Клапейрона-Клаузіуса, диференціальна форма якого має вигляд:

$$\frac{dp_{sat}}{dT} = \frac{L(T)\rho_l(T)\rho_v(T)}{\rho_l(T) - \rho_v(T)}.$$

У такому вигляді це рівняння не можна використовувати для розрахунків в широкому діапазоні температур, це викликано тим що невідомі температурні залежності величин, що входять в нього, таких як  $L(T)$ ,  $\rho_l(T)$  і  $\rho_v(T)$ .

Для визначення тиску насиченої пари у вузькому діапазоні температур  $\Delta T = T_1 - T_0$ , для якого можна прийняти  $L(T) = \text{const}$ , використовується інтегральна форма рівняння Клапейрона-Клаузіуса:

$$p_{sat}(T) = p_{sat}(T_0) \exp\left(\frac{LM\Delta T}{T_0T}\right). \quad (50)$$

Іноколи це рівняння не оправдано використовують у широкому інтервалі зміни температур, усереднюючи  $L(T)$  у цьому інтервалі, що призводить до непогодженості теоретичних результатів з даними дослідів [21]. Часто при виконанні теоретичних досліджень автори здійснюють табулювання табличних даних  $p_{sat}(T)$  для наступних вузьких температурних інтервалів [15,22]. Це робить наближення більш точним, але сильно ускладнює розрахунок. Деякі дослідники обмежуються лінійним наближенням при розкладанні в ряд експоненти в (50), що призводить до відхилення значень тиску насичення в 5...7 разів і при аналізі динаміки бульбашок веде до принципово невірних висновків [7]. У [6] використовується, як більш точний метод, квадратичне розкладення рівняння Клапейрона-Клаузіуса у формі (50), яке зменшує розрахункову помилку до 40%.

• **Густина пари.** Нами використовується отримана емпірична залежність, яка апроксимує табличні дані для густини насиченої водяної пари від температури плавлення льоду  $T_0 = 273$  К до критичної температури  $T_{cr} = 647,2$  К з похибкою до 5%:

$$\begin{aligned} \text{при } 273 < T \leq 573 \text{ К} \quad \rho_{sat}(T) &= 4,846 \cdot 10^{-3} \exp\left[\frac{(17,414 + 5,275 \cdot 10^5 |521 - T|^{1,85})(T - 273)}{T}\right]; \\ \text{при } 573 < T \leq T_{cr} \quad \rho_{sat}(T) &= 29,77 \left[1 + \frac{0,3(T - 273)(T - 548)}{3(T - 273) + (T_{cr} - T_0)\sqrt{T_{cr} - T}}\right]. \end{aligned} \quad (51)$$

З використанням залежностей (51) тиск насиченої пари для води  $p_{sat} = f(\rho_{sat})$  визначається за рівнянням Ван-дер-Ваальса (29). На рис.1 представлено порівняння з табличними даними

[23] розрахункової залежності  $p_{sat} = f(T)$  для води у всьому температурному діапазоні існування рідкої фази. З рисунка видно, що застосування рівняння Ван-дер-Ваальса дозволяє з невеликою похибкою описати залежність  $p_{sat} = f(T)$ , особливо в області високих температур. Для описання залежностей  $p_{sat} = f(T)$  з  $\rho_v$  і  $\rho_\ell$  на лінії насичення для розчинів і суспензій можна замість (51) використати більш прості і точні емпіричні вирази представлені в [24] без ущербу для структури моделі.

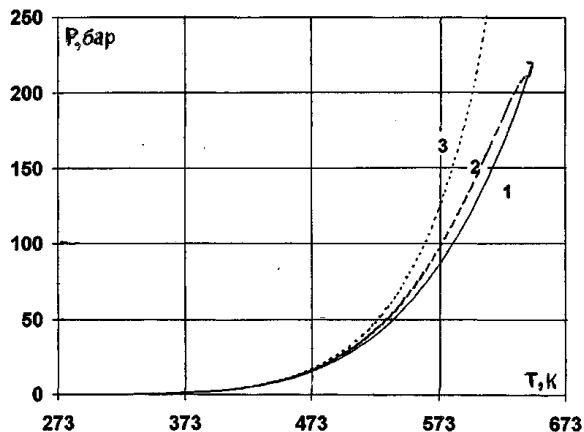


Рис.1 Залежність тиску насиченої пари від температури: 1 – табличні дані [23]; 2 – розрахунок за рівнянням стану Ван-дер-Ваальса для реальних газів(29); 3 – з використанням рівняння стану для ідеальних газів

• **Прихована теплота пароутворення (конденсації).** Залежність  $L = f(T)$  надійно апроксимується виразами:

$$\text{при } 273 < T \leq 613 \text{ K} \\ L(T) = 2501 - \frac{2,345(T - T_0)}{\left[1 - 0,56 \left(\frac{T_{cr} - T}{T_{cr} - T_0}\right)^2\right]};$$

$$\text{при } 613 < T \leq T_{cr} \quad L(T) = 247,87(T_{cr} - T)^{0,4}. \quad (52)$$

Значення  $L(T)$  розраховані за (52) практично повністю співпадають з табличними значеннями цієї величини.

**Поверхневий натяг.** Залежність  $\sigma = f(T)$  у нашій моделі розраховується за формулою:

$$\sigma(T) = 0,131 \left(1 - \frac{T}{T_{cr}}\right). \quad (53)$$

Крім запропонованої залежності (53) існують і інші. Для прикладу приведемо деякі із них:

$$\text{при } T = (273 \dots 647,2) \text{ K} \quad \sigma(T) = 0,2358 \left(1 - \frac{T}{T_{cr}}\right)^{1,256} \left[1 - 0,625 \left(1 - \frac{T}{T_{cr}}\right)\right];$$

$$\text{при } T = (366 \dots 566) \text{ K} \quad \sigma(T) = 0,1478 \left(1 - \frac{T}{T_{cr}}\right)^{1,053},$$

похибка останньої формули у названому діапазоні температур не перевищує 1%.

• **Густина рідини.** Залежність  $\rho_\ell = f(T)$  для будь-якої рідини зазвичай розраховується на підставі правила прямолінійного діаметра [25]:

$$\rho_\ell(T) = 2\rho_{cr}(T_{cr}) \left(2 - \frac{T}{T_{cr}}\right) - \rho_{sat}(T). \quad (54) \text{ Нами для}$$

апроксимації табличних даних  $\rho_\ell = f(T)$  для води в інтервалі температур (273...647,2) K використовується отримана емпірична залежність:

$$\text{при } T < 400 \text{ K} \quad \rho_\ell(T) = 1 - 1,9 \cdot 10^{-5} |T - 278|^{1,7};$$

$$\text{при } T \geq 400 \text{ K} \quad \rho_\ell(T) = 0,652 \left(2 - \frac{T}{T_{cr}}\right) - \rho_{sat}(T). \quad (55)$$

Порівняння розрахункової залежності  $\rho_\ell = f(T)$  за рівняннями (54) і (55) з табличними даними наведено на рис.2.

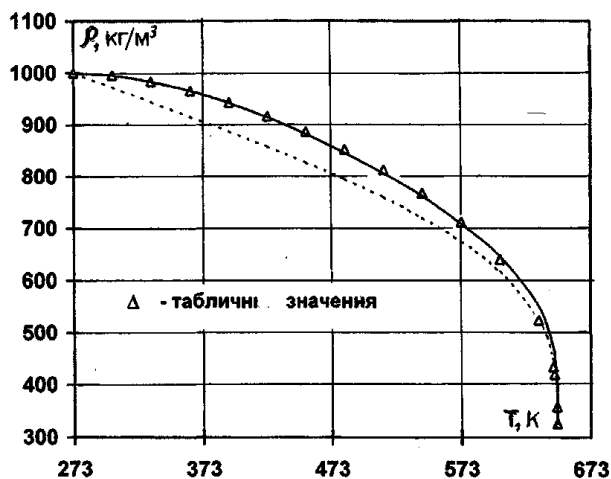


Рис.2 Залежність густини води від температури: 1 – табличні дані і розраховані за (55); 2 – за (54)

• **Динамічний коефіцієнт в'язкості.**

Температурна залежність в'язкості води  $\mu_\ell = f(T)$  у всьому температурному діапазоні апроксимується залежністю:

$$\mu_\ell = \frac{0,030}{\dot{O} - 260}. \quad (56)$$

При усіх константах теплофізичні параметри моделі, які представлені формулами (51)...(56), виражаються у системі SI.

**Поле швидкостей у рідині біля**

**бульбашки.** У межах зроблених припущень рух рідини, викликаний розширенням чи звуженням бульбашки, вважається потенціальним, а поле швидкостей – сферично симетричним відносно центра бульбашки. Виходячи з цього вектора швидкості рідини на відстані  $r$  від центра бульбашки можна оцінити по формулі:

$$W(r, \tau) = W_R(\tau)R^2/r^2 \quad (57)$$

Прискорення радіального руху рідини на відстані  $r$  від центра бульбашки можна представити у вигляді наступного виразу:

$$\frac{dW(r, \tau)}{d\tau} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{dW_R(\tau)}{d\tau} R^2 + 2RW_R^2 \right). \quad (58)$$

Із рівняння (58) слідує неочікуваний, на перший погляд, висновок, що навіть при усталеній швидкості росту чи стиснення бульбашки ( $dW_R/d\tau = 0$ ) прискорення руху рідини в будь-якій точці поза бульбашкою відрізняється від нуля, при цьому прискорення тим більше, чим ближче розглядувана точка до поверхні сфери.

**Поле тиску біля бульбашки.** Тиск у рідині біля бульбашки під час її радіального руху можна визначити, використовуючи рівняння (9). Підставимо в нього замість  $dW_R/d\tau$  праву частину (10) і вважаючи, що  $dR/d\tau = W_R$ , отримаємо рівняння, яке зв'язує тиск у довільній точці рідини біля бульбашки з біжучим радіусом самої бульбашки  $R(\tau)$  і швидкістю рідини на границі з бульбашкою  $W_R(\tau)$ :

$$p_\ell(r, \tau) = p_\infty + \left[ p_b - p_\infty + \frac{1}{2} \rho_\ell W_R^2 \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu W_R}{R} \right] \frac{R}{r}. \quad (59)$$

Поле тиску біля бульбашки є сферично симетричним, як і поле швидкостей, але на відмінність від швидкості  $W_r(r)$ , яка змінюється зворотно пропорційно квадрату відстані  $r$ , тиск  $p_\ell(r)$  в рідині змінюється практично зворотно пропорційно лінійному розміру. Останнє справедливо тільки для малих значень  $W_R$ , наприклад, під час росту бульбашки в термічному режимі. У дійсності, розподіл тиску біля бульбашки має максимум на певній відстані  $r_{\max} > R$ . Із (59) виходить, що максимум реалізується на відстані:

$$\frac{r_{\max}}{R} = \sqrt[3]{\frac{4\rho_\ell W_R^2}{2(p_R - p_\infty) + \rho_\ell W_R^2}} = \sqrt[3]{\frac{2W_R^2}{2W_R^2 + dW_R/d\tau}}. \quad (60)$$

Із (60) виходить, що максимум розподілу тиску в рідині ( $r_{\max}/R > 1$ ) виникає тільки за умови  $dW_R/d\tau < 0$  і, як наслідок, можливий тільки для бульбашок, що захлопуються. Підставляючи значення  $r = r_{\max}$  із (60) в (59) знайдемо:

$$p_{\ell \max} = p_\infty + \frac{3}{2} \rho_\ell W_R^2 \left( \frac{R}{r_{\max}} \right)^4. \quad (61)$$

Під час стиснення бульбашки максимум тиску зміщується з віддалених областей рідини до поверхні бульбашки і в момент часу, коли  $dW_R/dt = 0$ , найбільший тиск досягається на поверхні бульбашки  $r_{\max} = R$ , при цьому  $p_{\max} = p_R$ .

**Підсумок.** Розглянута математична модель містить у собі систему диференціальних рівнянь з відповідними початковими умовами, які замикають алгебраїчні рівняння і співвідношення, що апроксимують температурні залежності теплофізичних параметрів. При цьому вважаємо, що у всіх випадках температура рідини  $T_{\ell 0}$  відома. Початковий тиск в рідині теж є відомим параметром, подальша зміна якого за заданий проміжок часу  $\Delta t$  до заданої величини  $p_{cf}$  визначає подальшу поведінку бульбашки.

За умови термодинамічної рівноваги значення  $p_{\ell 0}$  і  $T_{\ell 0}$  визначають початкові умови для температури, густини і тиску пари і газу всередині бульбашки. Якщо у бульбашці існує тільки пара, то початковий її радіус  $R_0$  однозначно визначається з умови  $p_v = p_{\text{sat}}(T_{\ell 0}) = p_{\ell 0} + 2\sigma/R_0$ . При наявності у бульбашці відомої кількості неконденсованого газу  $m_g$  початковий радіус рівноважної бульбашки буде залежати тільки від парціального тиску  $p_g = 3m_g B T_{\ell 0} / (4\pi R_0^3 M_g)$ , так що значенням  $R_0$  можна варіювати у певних межах, задаючись значенням  $m_g$  (чи  $p_{g0}$ ). Тоді  $R_0$  визначається із умови  $p_g = p_{\text{sat}}(T_{\ell 0}) = p_{\ell 0} + 2\sigma/R_0$ .

Аналіз процесу росту парових зародків показує, що початковий вміст газу практично не впливає на подальшу поведінку росту бульбашки. Для бульбашок, що захоплюються, вміст в них газу стає основним фактором, і навіть невелика кількість газу в бульбашці початкового розміру докорінно впливає на ефект захоплення.

До замкненої системи рівнянь, розглядуваної моделі, входять такі диференціальні залежності, які характеризують наступні теплофізичні величини: зміну швидкості радіального руху рідини біля бульбашки (25); зміну радіуса бульбашки (27); тиск газу в бульбашці (28); тиск пари в бульбашці (29); зміну густини пари в бульбашці (30); зміну густини неконденсованого газу в бульбашці (31); зміну температури парогазового середовища в бульбашці (33); тиск парогазового середовища в бульбашці; швидкість міжфазного переносу маси (34); швидкість міжфазного переносу теплоти (36); швидкість молекулярно-кінетичного руху молекул пари і газу; баланс теплоти (45); зміну кількості теплоти, що передається бульбашці (46); зміну вмісту теплоти у пограничному шарі (48); густину насиченої пари (50); приховану теплоту випаровування (конденсації) (52); коефіцієнт поверхневого натягу (53); густину рідини (55); динамічний коефіцієнт в'язкості (56).

### Висновок

1. Математична модель завбачає поведінку бульбашки в будь-якій рідині, якщо існують чи можуть бути отриманими співвідношення, які адекватно описують залежність теплофізичних параметрів цієї рідини і її пари у всьому діапазоні існування рідкої фази.

2. Розглянута модель характеризується відносною простотою, фізично обґрунтована і дає можливість без порушення структури до подальшого удосконалення.

### Література

18. Prosperetti A., Lezzi A. Bubble dynamics in a compressible liquid. Part I. First-order theory //J. Fluid Mech.- 1986.- Vol.168.- P.457-478.

19. Гудмен Е. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена //Проблемы теплообмена. -М.: Атомиздат, 1967.-С.41-96.

20. Fujikawa S., Akamatsu T. Effects of the no equilibrium condensation of vapors on the pressure produced by the collapse of bubble in a liquid //J. Fluid Mech.- 1980.- Vol.97, №3.-P. 481-512.

21. Cho S.M., Seban R.A. On some aspects of steam bubble collapse //J. Heat Transfer.- 1969.- Vol. 91, №4.- P. 537-542.

22. Abdel Aziz N.M.H. Behavior of vapor bubbles in solutions //Proc. Indian Nat. Sci. Acad. Ser.A.-1988.- Vol.53, №6,- P.752-759.

23. Handbook of Heat Exchange Design. (Ed. E.U.Schlunder & G.F.Hewitt).- N.-Y.,USA – Walligford (U.K.), Begell House, Inc.1992.- 478 p.
24. Скрипов В.П., Файзуллин М.З. Универсальное соотношение между равновесным давлением и плотностями пара и жидкости на пограничной кривой //ТВТ.-1999.- Т.37, №1.- С.152-155.
25. Скрипов В.П. Метастабильная жидкость. – М.: Наука, 1972.-312 с.