Індивідуальна траєкторія підготовки до ЗНО. Показникові рівняння

Олег Мазур – старший викладач кафедри вищої математики Національного університету харчових технологій

Розглядаються показникові та показниково-степеневі рівняння і способи їх розв’язання.

Рівняння, яке містить змінну тільки у показнику степеня при сталій основі, називається показниковим.

Розвязання показникових рівнянь базується на властивості степенів: два степені з однією і тією ж додатною і відмінною від одиниці основою рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх показники.

1.Найпростішим прикладом показникового рівняння є рівняння $\grave{a}^{\tilde{o}} = b$ (1), де $a > 0$ і $a \neq 1$. Воно має розв’язок і притому єдиний $x = \log_a b$ тільки при $b > 0$.

Приклад 1. Розв’язати рівняння $25^x = 6$.

Розв’язання. Маємо $x = \log_{25} 6$.

Якщо праву частину рівняння (1) можна представити у вигляді a^k де $k \in R$, то дістанемо $a^x = a^k$, звідки, за властивістю степенів, $x = k$.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $49^x = \frac{1}{117649}$.

Розв’язання. Маємо $49^x = 49^{-3}$, звідки $x = -3$.

Інколи праву частину рівняння (1), згідно основній логарифмічній тотожності, можна представити у вигляді $a^{\log_a b}$. Тоді $a^x = a^{\log_a b}$, звідки $x = \log_a b$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння $113^x = 17$.

Розв’язання. Маємо $113^x = 113^{\log_{113} 17}$, звідки $x = \log_{113} 17$.

Застосування основної логарифмічної тотожності $a^{\log_a b} = b, b > 0, a > 0, a \neq 1,$ може призвести до появи сторонніх коренів, якщо не слідкувати за умовами її застосовності.

Приклад 4. Розв’язати рівняння $x^{\log_x (x+3)^2 = 16}$ (2).

Розв’язання. ОДЗ даного рівняння визначається системою нерівностей $x > 0$ і $x \neq 1$. Рівняння (2) на ОДЗ рівносильне рівнянню $(x+3)^2 = 16$ (3).

Рівняння (3) має два корені: $x_1 = -7, x_2 = 1$, які не входять в ОДЗ рівняння (2). Виходить, рівняння (2) не має коренів.

Застосування сновної логарифмічної тотожності без врахування обмеження, що задається системою нерівностей $x > 0, x \neq 1$, приводить до рівняння (3), яке має два корені, які для рівняння (2) є сторонніми.

Багато показникових рівнянь розв’язуються методом зведення обох частин рівняння до однієї основи.

Приклад 5. Розв’язати рівняння $(0{,}4)^{x-1} = (6{,}25)^{6x-5}$.

Розв’язання. Оскільки $(0{,}4)^{x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}$, а $(6{,}25)^{6x-5} = \left(\frac{25}{4}\right)^{6x-5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{12x-10} = \left(\frac{2}{5}\right)^{10-12x}$, то $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{10-12x}$, звідки $x - 1 = 10 - 12x$, або $x = \frac{11}{13}$.

При роз’язуванні деяких найпростіших показникових рівнянь використовується перетворення, що полягає у винесенні спільного множника за дужки.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $5^{2x+1}-3\cdot 5^{2x-1}=550$.

Розв'язання. Виносячи у лівій частині рівняння вираз 5^{2x-1} за дужки, отримуємо $5^{2x-1}\left(5^2-3\right)=550, 5^{2x-1}=5^2, 2x-1=2, x=\frac{3}{2}$.

Рівняння виду $a^{f(x)}=1$, де $a>0$ і $a\neq 1$, рівносильне рівнянню $f(x)=0$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $10^{x^2+x-2}=1$.

Розв'язання. Маємо $x^2+x-2=0$, звідки $x_1=-2, x_2=1$.

2. Показникове рівняння $a^{f(x)}=b$ (4), де $a>0$ і $a\neq 1$, $b>0$, заміною $f(x)=t$ можна звести до найпростішого.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=\sqrt[7]{9}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x^2-\frac{5}{7}x=t$. Дістанемо рівняння $3^t=\sqrt[7]{9}$, або $3^t=3^{\frac{2}{7}}$. Тоді $t=\frac{2}{7}$. Повертаючись до змінної x, маємо $x^2-\frac{5}{7}x=\frac{2}{7}$, $7x^2-5x-2=0$, звідки $x_1=-\frac{2}{7}$, $x_2=1$.

Рівняння виду (4) може бути розв'язане також за допомогою логарифмування обох його частин (це можливо, оскільки обидві частини рівняння додатні). Логарифмуючи, дістанемо рівняння $f(x)=\log_a b$, рівносильне даному.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}=10$.

Розв'язання. Логарифмуємо обидві частини заданого рівняння за основою $2+\sqrt{3}$. Дістанемо рівносильне рівняння $x^2-2x=\log_{2+\sqrt{3}}10$, або $x^2-2x-\log_{2+\sqrt{3}}10=0$, звідки $x_1=1+\sqrt{1+\log_{2+\sqrt{3}}10}$, $x_2=1-\sqrt{1+\log_{2+\sqrt{3}}10}$.

3. Показникове рівняння $a^{f(x)}=b^{g(x)}$ (5), де $a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1$, а $f(x)$ і $g(x)$ – задані елементарні функції, рівносильне рівнянню $f(x)\log_c a=g(x)\log_c b$, яке виходить логарифмуванням обох частин рівняння (5) при довільній основі $c>0, c\neq 1$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $13^{x+7}=7^{x+13}$.

Розв'язання. Логарифмуємо ліву і праву частину заданого рівняння при основі, наприклад, 10. Будемо мати $(x+7)\lg 13=(x+13)\lg 7$, $x\lg 13-x\lg 7=13\lg 7-7\lg 13$, $x(\lg 13-\lg 7)=13\lg 7-7\lg 13$, звідки $x=\frac{13\lg 7-7\lg 13}{\lg 13-\lg 7}$.

Інколи доцільно логарифмувати обидві частини рівняння змішаного типу, яке містить як показникову, так і логарифмічну функцію.

Приклад 11. Розв'язати рівняння $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x}=2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$.

Розв'язання. За визначенням показникового рівняння маємо $x>0$ і $x\neq 1$. При таких x обидві частини заданого рівняння додатні; тому, логарифмуючи їх за основою 2, отримуємо рівняння $\log_2\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log_2^2 x=\frac{1}{4}\log_2^2 x$, рівносильне початковому. Після спрощень маємо $\log_2^2 x=8$, звідки знаходимо $x_1=4^{-\sqrt{2}}$ і $x_2=4^{\sqrt{2}}$ – корені заданого рівняння.

4. Показникове рівняння $F\left(a^{f(x)}\right)=0$ (6), де $F\left(a^{f(x)}\right)$ і $f(x)$ – задані алгебраїчні функції відносно змінних $a^{f(x)}$ і x, заміною $a^{f(x)}=t$ спочатку зводиться до рівняння $F(t)=0$, а далі до сукупності рівнянь $a^{f(x)}=t_1,\ a^{f(x)}=t_2,\dots,\ a^{f(x)}=t_n$, де $t_1, t_2,\dots, t_n$ – корені рівняння $F(t)=0$. Так, наприклад, рівняння $Aa^{2x}+Ba^x+C=0$, де A, B, C —деякі числа, $a>0, a\neq 1$ зводиться до розв’язання рівносильної йому сукупності рівнянь $a^x=t_1,\ a^x=t_2$, де t_1 і t_2 —корені рівняння $At^2+Bt+C=0$.

Приклад 12. Розв’язати рівняння $2^{2x+2\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1}=6$.

Розв’язання. Запишемо задане рівняння у вигляді $2^{2\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)}-\frac{5}{2}\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}}-6=0$, або $2\cdot\left(2^{x+\sqrt{x^2-2}}\right)^2-5\left(2^{x+\sqrt{x^2-2}}\right)-12=0$ і зробимо заміну $2^{x+\sqrt{x^2-2}}=t$, де $x^2-2\geq 0$, або $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$ і $t>0$. Отримаємо $2t^2-5t-12=0$, звідки $t_1=-\frac{3}{2}$, що не задовольняє умові $t>0$, і $t_2=4$. Повертаючись до змінної x, маємо $2^{x+\sqrt{x^2-2}}=4$, або $2^{x+\sqrt{x^2-2}}=2^2$. Тоді $x+\sqrt{x^2-2}=2$, або $\sqrt{x^2-2}=2-x$, де $2-x\geq 0$, або $x\leq 2$. Далі піднесемо обидві частини останнього рівняння до квадрату. Дістанемо $x^2-2=4-4x+x^2$, звідки $x=\frac{3}{2}$.

Приклад 13. Розв’язати рівняння $2^x+(0,5)^{2x-3}-6\cdot(0,5)^x=1$.

Розв’язання. Оскільки $(0,5)^{2x-3}=2^{3-2x}=\frac{8}{2^{2x}}$, а $6\cdot(0,5)^x=\frac{6}{2^x}$, то задане рівняння набере вигляду $2^x+\frac{8}{2^{2x}}-\frac{6}{2^x}-1=0$.

Зробимо заміну $2^x=t$, де $t>0$. Дістанемо $t+\frac{8}{t^2}-\frac{6}{t}-1=0$, або $t^3-t^2-6t+8=0$, $\left(t^2-2\right)\left(t^2+t-4\right)=0$. Звідси або $t-2=0$, або $t^2+t-4=0$. Тоді або $t=2$, або $t=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, що не задовольняє умові $t>0$, або $t=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

Повертаючись до змінної x, матимемо $2^x=2$, або $2^x=2^{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$, звідси $x=1$, або $x=\log_2\frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

Розв’язання показникових рівнянь, в яких є три степені з різними основами, що є послідовними членами геометричної прогресії, причому ці основи підносяться до одного і того ж не залежного від x степеня, зводиться до розв’язання квадратних рівнянь. Так і рівняння мають вигляд $\alpha a^{f(x)}+\beta b^{f(x)}+\gamma c^{f(x)}=0$ (7), де $\alpha\neq 0, \beta, \gamma$ – дійсні числа, $f(x)$ —деяка функція, а основи a, b і c задовольняють умові $b^2=ac$.

Рівняння такого типу зводяться до розв’язання сукупності показникових рівнянь $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=t_1,\ \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=t_2$, де t_1 і t_2 – корені квадратного рівняння $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$.

Приклад 14. Розв’язати рівняння $3\cdot 16^x+37\cdot 36^x=26\cdot 81^x$ (8).

Розв'язання. У цьому рівнянні числа 16, 36 і 81 утворюють три послідовних члени геометричної прогресії (зі знаменником $\frac{9}{4}$).

Поділимо обидві частини рівняння (8) на 81^{x}. Дістанемо $3\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}+37\left(\frac{4}{9}\right)^{x}-26=0$ (9). Нехай $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}=t,$ де $t>0.$ Тоді рівняння (9) набере вигляду $3t^2+37t-26=0,$ звідки знаходимо $t_1=-13,$ що не задовольняє умові $t>0,$ і $t_2=\frac{2}{3}.$

З рівняння $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}=\frac{2}{3},$ тобто рівняння $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{2}{3},$ знаходимо єдиний корінь початкового рівняння (8): $x=\frac{1}{2}.$

Приклад 15. Розв'язати рівняння $27^x+12^x=2\cdot 8^x$ (10).

Розв'язання. Це рівняння близьке за виглядом до рівняння (7): показник степеня в основі один і той же, проте основи 27, 12 і 8 трьох послідовних членів геометричної прогресії не утворюють.

Послідовними (але чотирма) членами геометричної прогресії є числа 27, 18, 12 і 8. Тому можна вважати, що член, який містить 18^{x}, входить в дане рівняння з нульовим коефіцієнтом.

Ділимо обидві частини рівняння на 8^x і дістаємо $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=2.$ Нехай $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=t$; тоді маємо рівняння $t^3+t-2=0,$ або $(t-1)\left(t^2+t+2\right)=0,$ звідки знаходимо $t=1,$ бо $t^2+t+2\neq 0(D<0).$ Таким чином, рівняння (10) рівносильне рівнянню $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=1,$ єдиний корінь якого $x=0.$

6. Рівняння $\alpha\cdot a^{f(x)}+\beta\cdot b^{f(x)}+c=0$ (11), де α,β,c – дійсні числа, а основи a і b є взаємно оберненими додатними числами (тобто $ab=1$), можна розв'язувати наступним чином.

Ввести змінну $t=a^{f(x)}$ і, використовуючи рівність $ab=1$, перейти від рівняння (11) до рівняння $\alpha t^2+ct+\beta=0$ (12). Тоді рівняння (11) буде рівносильне сукупності двох показникових рівнянь: $a^{f(x)}=t_1,\ a^{f(x)}=t_2,$ де t_1 і t_2 – корені рівняння (12). Якщо рівняння (12) розв'язків не має, то й рівняння (11) також не має розв'язків.

Приклад 16. Розв'язати рівняння $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}=4.$

Розв'язання. Покладемо $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}=y.$ Оскільки $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1,$ то другий доданок у лівій частині рівняння дорівнює $\frac{1}{y}\cdot$ Отримуємо $y+\frac{1}{y}=4,$ або $y^2-4y+1=0,$ звідки $y_1=2+\sqrt{3},\ y_2=2-\sqrt{3}.$ Тоді $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}=\left(2+\sqrt{3}\right),\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=2+\sqrt{3},$ звідки $\frac{x}{2}=1,\ x=2,$ або $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}=2-\sqrt{3},\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(2+\sqrt{3}\right),\ \frac{x}{2}=-1,\ x=-2.$

7. Розв’язання деяких показникових рівнянь зводиться до розв’язання алгебраїчних однорідних рівнянь (нагадаємо, що рівняння виду $a_0 p^n(x) + a_1 p^{n-1}(x) q^{(x)} + ... + a_{n-1} p(x) q^{n-1}(x) + a_n q^n(x) = 0,$ де $n > 1, a_0 \neq 0, p(x)$ і $q(x)$ – деякі функції, називається однорідним).

Приклад 17. Розв’язати рівняння $3^{2x^2-6x+3} + 6^{x^2-3x+1} = 2^{2x^2-6x+3}$ (13).

Розв’язання. Рівняння (12) рівносильне рівнянню $27 \cdot 3^{2(x^2-3x)} + 6 \cdot 3^{x^2-3x} \cdot 2^{x^2-3x} - 8 \cdot 2^{2(x^2-3x)} = 0$ (14), розв’язання якого зводиться до розв’язання однорідного рівняння $27 f^2(x) + 6 f(x) g(x) - 8 g^2(x) = 0$, де $f(x) = 3^{x^2-3x}$, $g(x) = 2^{x^2-3x}$.

Оскільки $2^{x^2-3x} > 0$, то обидві частини рівняння (13) можна поділити на $2^{2(x^2-3x)}$. Тоді отримаємо рівняння $27\left(\frac{3}{2}\right)^{2(x^2-3x)} + 6\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x} - 8 = 0,$ рівносильне рівнянню (13).

Нехай $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x} = t,$ де $t > 0$; тоді з рівняння $27t^2 + 6t - 8 = 0$ знаходимо $t_1 = -\frac{2}{3},$ що не задовольняє умові $t > 0$, і $t_2 = \frac{4}{9}$.

Таким чином, рівняння (13) рівносильне рівнянню $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-2x} = \frac{4}{9}$, або $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$, звідки $x^2 - 3x = -2$ або $x^2 - 3x + 2 = 0$. Звідси знаходимо $x_1 = 1, x_2 = 2$ – корені рівняння (13).

Приклад 18. Розв’язати рівняння $6\sqrt[x]{9} - 13\sqrt[x]{6} + 6\sqrt[x]{4} = 0$.

Розв’язання. Областю допустимих значень цього рівняння є всі натуральні числа, більші ніж 1.

Задане рівняння є однорідним. Поділивши обидві його частини на $\sqrt[x]{4}$ і поклавши $\sqrt[x]{\frac{3}{2}} = t$, дістанемо рівняння $6t^2 - 13t + 6 = 0$, звідси $t_1 = \frac{3}{2}, t_2 = \frac{2}{3}$.

Отже, рівняння рівносильне сукупності рівнянь $\sqrt[x]{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$ і $\sqrt[x]{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$, які на ОДЗ розв’язків не мають. Виходить, і рівняння коренів також не має.

8. Рівняння $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)}$ (14), де $f(x) \in R$, називається показниково-степеневим і при його розв’язанні можливі п’ять випадків:
1) $f(x) = -1$. Корені цього рівняння є коренями рівняння (14), якщо значення функцій $g(x)$ і $h(x)$ при цих коренях – цілі числа однакової парності або дробові нескоротні з непарними знаменниками і однакової парності чисельниками;
2) $f(x) = 0$. Корені цього рівняння є коренями рівняння (14), якщо значення функцій $g(x)$ і $h(x)$ при цих коренях додатні;
3) $f(x) = 1$. Корені цього рівняння є коренями рівняння, якщо існують функції $g(x)$ і $h(x)$ при цих коренях.
4) $g(x) = h(x)$. Корені цього рівняння є коренями рівняння (14), якщо $f(x) < 0$ і $f(x) \neq -1$.

5) $g(x)=h(x)$. Корені цього рівняння є коренями рівняння (14), якщо $f(x)>0$ і $f(x)\neq 1$.

Приклад 19. Розв’язати рівняння $\left(x^2+x-57\right)^{3x^2+3x}=\left(x^2+x-57\right)^{10x}$ (15).

Розв’язання. Маємо п’ять випадків:

1) $x^2+x-57=-1$, тобто $x^2+x-56=0$. У цьому випадку рівняння (15) набирає вигляду $(-1)^{3x^2+3}=(-1)^{10x}$ (16).

Рівнянню (16) можуть задовольняти тільки такі значення x, при яких $3x^2+3$ і $10x$ – цілі числа (оскільки від’ємне число (-1) можна піднести лише до цілого степеня) однакової парності (тобто або обидва парні, або обидва непарні).

З рівняння $x^2+x-56=0$ знаходимо $x_1=-8, x_2=7$. Значення $x_1=-8$ не задовольняє рівнянню (16), а значення $x_2=7$ задовольняє. Отже, $x=7$ корінь рівняння (15).

2) $x^2+x-57=0$. У цьому випадку рівняння (15) набирає вигляду $0^{3x^2+3}=0^{10x}$ (17).

Рівнянню (17) можуть задовольняти тільки такі значення x, при яких $3x^2+3>0$ (це справедливо при $x\in R$) та $10x>0$. У цьому випадку рівняння (17) набирає вигляду $0=0$ (нагадаємо, що вираз 0^k має зміст лише при $k>0$).

З рівняння $x^2+x-57=0$ знаходимо $x_1=\frac{-1-\sqrt{229}}{2}$ і $x_2=\frac{-1+\sqrt{229}}{2}$. Значення $x_1=\frac{-1-\sqrt{229}}{2}$ не задовольняє умові $10x>0$, а значення $x_2=\frac{-1+\sqrt{229}}{2}$ задовольняє цій умові. Отже, $x=\frac{-1+\sqrt{229}}{2}$ – корінь рівняння (15).

3) $x^2+x-57=1$, тобто $x^2+x-58=0$.

У цьому випадку рівняння (15) набирає вигляду $1^{3x^2+3}=1^{10x}$, тобто $1=1$. Виходить, корені рівняння $x^2+x-58=0$ є й коренями рівняння (15). З рівняння $x^2+x-58=0$ знаходимо $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{233}}{2}$.

4) Якщо $x^2+x-57<0$ і $x^2+x-57\neq -1$, то від рівняння (15) переходимо до рівняння-наслідку $3x^2+3=10x$ (18), звідки знаходимо $x_1=\frac{1}{3}$ і $x_2=3$. Оскільки рівняння (18) – наслідок рівняння (15), то необхідно зробити перевірку. При $x_1=\frac{1}{3}$ маємо $\left(-56\frac{5}{9}\right)^{\frac{10}{3}}=\left(-56\frac{5}{9}\right)^{\frac{10}{3}}$ – невірна рівність (бо піднесення від’ємного числа до дробового степеня не має змісту), при $x=3$ маємо $(-45)^{30}=(-45)^{30}$ – справедлива рівність. Отже, лише $x=3$ – корінь рівняння (15).

5) Якщо $x^2+x-57>0$ і $x^2+x-57\neq 1$, то з рівняння (15) резюмуємо, що $3x^2+3=10x$, або $3x^2-10x+3=0$, звідки знаходимо $x_1=\frac{1}{3}$ і $x_2=3$. Жоден з цих коренів не задовольняє нерівності $x^2+x-57>0$.

Таким чином, рівняння (15) має п’ять коренів:
$x_1=\frac{-1-\sqrt{233}}{2}, x_2=3, x_3=7, x_4=\frac{-1+\sqrt{229}}{2}, x_5=\frac{-1+\sqrt{233}}{2}$.

Приклад 20. Розв’язати рівняння $(tgx)^{\sin x}=(ctgx)^{\cos x}$.

Розв’язання. Спочатку представимо дане рівняння у вигляді $\left(tgx\right)^{\sin x}=\left(tgx\right)^{-\cos x}$ (19), а далі розглянемо п’ять випадків:

1) $tgx=-1$. Звідси маємо $\left|\sin x\right|=\left|\cos x\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, і початкове рівняння набирає вигляду $\left(-1\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left(-1\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, що не має змісту, бо від’ємне число підноситься до ірраціонального степеня.

2) $tgx=0$, тобто $x=\pi n, n\in Z.$ То і $\sin x=0$. Виходить, що ліва частина рівняння (19) набирає вигляду 0^0, що не має змісту.

$tgx=1$. Тоді рівняння (19) набере вигляду $1^{\sin x}=1^{-\cos x}$, тобто $1=1$. Отже задане рівняння зводиться до рівняння $tgx=1$, звідки знаходимо $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

4) Якщо $tgx<0$ і $tgx\neq -1$, то з рівняння (19), прирівнявши показники, дістанемо $\sin x=-\cos x$, звідки $tgx=-1$, що несумісне з умовою $tgx=-1$.

5) Якщо $tgx>0$ і $tgx\neq 1$, то з рівняння (19), прирівнявши показники, дістанемо $\sin x=-\cos x$, тобто $tgx=-1$, що протирічить умові $tgx>0$.

Отже, задане рівняння має розв’язок $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

Приклад 21. Розв’язати рівняння $\left|10\sin\frac{x}{2}-6+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|^{\sqrt{11x-x^2-10}}=1$ (20).

Розв’язання. Представимо задане рівняння у вигляді $\left|10\sin\frac{x}{2}-6+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|^{\sqrt{11x-x^2-10}}=\left|10\sin\frac{x}{2}-6+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|^{0}$ і, оскільки $\left|10\sin\frac{x}{2}-6+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|\geq 0$ завжди при $\sin\frac{x}{2}\neq 0$, то розглянемо тільки три випадки:

1) $\left|10\sin\frac{x}{2}-6+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|=0$, тобто $10\sin\frac{x}{2}-6+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}=0$, або $10\sin^2\frac{x}{2}-6\sin\frac{x}{2}+1=0$ (21) при $\sin\frac{x}{2}\neq 0$. Розв’язуючи рівняння (21) як квадратне відносно $\sin\frac{x}{2}$, дістанемо $\sin\frac{x}{2}\in\varnothing\left(D<0\right)$.

2) $\left|10\sin\frac{x}{2}-6+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|=1$, тобто $\left[\begin{array}{l}10\sin\frac{x}{2}-6+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}=-1,\\ 10\sin\frac{x}{2}-6+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}=1,\end{array}\right.$ або

$\left[\begin{array}{l}10\sin^2\frac{x}{2}-5\sin\frac{x}{2}+1=0\ (22),\\ 10\sin^2\frac{x}{2}-7\sin\frac{x}{2}+1=0\ (23).\end{array}\right.$ Рівняння (22) дійсних коренів не має, а з рівняння (23) знаходимо $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z,$ або $x=(-1)^n 2\arcsin\frac{1}{5}+2n\pi, n\in Z.$ При цих значеннях x рівняння (20) набирає вигляду $1^{\sqrt{11x-x^2-10}}=1.$ Це – вірна рівність при умові $11x-x^2-10\geq 0$ тобто при $x\in[1;10]$. Виходить, із знайдених значень x треба відібрати ті, котрі належать відрізку $[1;10]$.

Розглянемо спочатку серію $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z.$ Якщо $k=0,$ то $x=\frac{\pi}{3}\in[1;10]$. Якщо $k=1,$ то $x=\frac{5\pi}{3}\in[1;10]$. Якщо $k=2$, то $x=\frac{13\pi}{3}\notin[1;10]$. Аналогічно не належать $[1;10]$ ті значення x, які одержуються при інших значеннях k.

Далі розглянемо серію $x=(-1)^n 2\arcsin\frac{1}{5}+2n\pi, n\in Z$. Спочатку обчислимо $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{5}\right)$. Маємо

$$\sin\left(2\arcsin\frac{1}{5}\right)=2\sin\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)}=\frac{2}{5}\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{4\sqrt{6}}{25}.$$

Виходить, $2\arcsin\frac{1}{5}=\arcsin\frac{4\sqrt{6}}{25}$. Але $\frac{4\sqrt{6}}{25}<\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тому $\arcsin\frac{4\sqrt{6}}{25}<\frac{\pi}{4}<1$. Тепер, знаючи, що $2\arcsin\frac{1}{5}<1$, відберемо корені з серії $x=(-1)^n 2\arcsin\frac{1}{5}+2\pi n, n\in Z$.

Якщо $n=0$, то $x=2\arcsin\frac{1}{5}\notin[1;10]$. Якщо $n=1$, то $x=\left(2\pi-2\arcsin\frac{1}{5}\right)\in[1;10]$. Якщо $n=2$, то $\left(2\arcsin\frac{1}{5}+4\pi\right)\notin[1;10]$. При інших значеннях параметра n значення x що виходять, не належать відрізку $[1;10]$.

Отже, у випадку $\left|10\sin\frac{x}{2}-6+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|=1$ ми отримали такі корені:

$x_1=\frac{\pi}{3}, x_2=\frac{5\pi}{3}, x_3=2\pi-2\arcsin\frac{1}{5}$.

3) $\left|10\sin\frac{x}{2}-6+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|>0$ і $\left|10\sin\frac{x}{2}-6+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|\neq 1$. У цьому випадку рівняння (20) рівносильне рівнянню $\sqrt{11x-x^2-10}=0$, звідки знаходимо $x_4=1$ і $x_5=10$ — ще два корені рівняння (20).

Таким чином, коренями рівняння (20) є такі значення x:
$x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{5\pi}{3}, x_3 = 2\pi - 2\arcsin\frac{1}{5}, x_4 = 1, x_5 = 10$.

Продемонструємо ще один спосіб розв'язання показникові-степеневого рівняння (14).

Приклад 22. Розв'язати рівняння $\left(2x^2 - 3x - 1\right)^{3x^2+2x+1} = \left(2x^2 - 3x - 1\right)^{2x^2+3x+1}$ (24).

Розв'язання. Розглянемо два випадки: 1) $2x^2 - 3x - 1 = 0$ (25). Корені x_1 і x_2 цього рівняння є коренями рівняння (24), якщо $3x^2 + 2x + 1 > 0$ і $2x^2 + 3x + 1 > 0$ при значеннях x_1 і x_2. З (25) знаходимо $x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$ і $x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$. Знайдені значення x_1 і x_2 задовольняють умовам $3x^2 + 2x + 1 > 0$ і $2x^2 + 3x + 1 > 0$, отже $x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$ і $x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$ є коренями рівняння (24).

2) $2x^2 - 3x - 1 \neq 0$ (26), тобто $x \neq \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$. Піднесемо обидві частини рівняння (24) до квадрату. Дістанемо $\left(\left(2x^2 - 3x - 1\right)^2\right)^{3x^2+2x+1} = \left(\left(2x^2 - 3x - 1\right)^2\right)^{2x^2+3x+1}$ (27). Далі прологарифмуємо обидві частини рівняння (27) за основою 10. Матимемо
$\left(3x^2 + 2x + 1\right)\lg\left(2x^2 - 3x - 1\right)^2 = \left(2x^2 + 3x + 1\right)\lg\left(2x^2 - 3x - 1\right)^2$, $\left(3x^2 + 2x + 1\right)\lg\left(2x^2 - 3x - 1\right)^2 -$
$\left(2x^2 + 3x - 1\right)\lg\left(2x^2 - 3x - 1\right)^2 = 0$, $\left(3x^2 + 2x + 1 - 2x^2 - 3x - 1\right)\lg\left(2x^2 - 3x - 1\right)^2 = 0$,
$\left(x^2 - x\right)\lg\left(2x^2 - 3x - 1\right)^2 = 0\ (28)$.

Рівняння (28) еквівалентне об'єднанню двох рівнянь: $x^2 - x = 0$ (29) і $\lg\left(2x^2 - 3x - 1\right)^2 = 0$ (30). З (29) знаходимо $x_1 = 0$ і $x_2 = 1$, а з (30) маємо $\left(2x^2 - 3x - 1\right)^2 = 1$, звідки або $2x^2 - 3x - 1 = 1,\ 2x^2 - 3x - 2 = 0,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = 2$, або
$2x^2 - 3x - 1 = -1,\ 2x^2 - 3x = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = \frac{3}{2}$.

Перевірка. При $x = 0$ рівняння (24) набере вигляду $0^1 = 0^1$ – справедлива рівність. При $x_2 = 1$ маємо $(-2)^6 = (-2)^6$ – справедлива рівність. При $x = -\frac{1}{2}$ маємо $1^{\frac{3}{4}} = 1^0$ – справедлива рівність. При $x = 2$ маємо $1^{17} = 1^{15}$ – справедлива рівність. При $x = \frac{3}{2}$ маємо $(-1)^{33} = (-1)^{10}$ – невірна рівність.

Отже, коренями рівняння (24) є $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}, x_6 = 2$.

Деякі показникові рівняння містять вирази виду $\left(f(x)\right)^{g(x)}$. За визначенням вважаємо, що $\left(f(x)\right)^{g(x)} = 10^{g(x)\lg f(x)}$; тому функція $\left(f(x)\right)^{g(x)}$ має зміст лише тоді, коли визначені обидві функції: $f(x)$ і $g(x)$, і $f(x) > 0$.

Приклад 23. Розв'язати рівняння $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 36$ (31).

Розв’язання. Маємо: $3^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}} = 3^2 \cdot 2^2$, $3^{x-2} \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}-2} = 1$, $3^{x-2} \cdot 2^{\frac{x-2}{x+1}} = 1$, $\left(3 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}}\right)^{x-2} = 1$.

Таким чином, рівняння (31) рівносильне рівняння $10^{(x-2)\lg\left(3 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}}\right)} = 1$, звідки $(x-2)\lg\left(3 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}}\right) = 0$.

Отже, початкове рівняння рівносильне сукупності рівнянь $x - 2 = 0$ і $\lg\left(3 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}}\right) = 0$, розв’язуючи яку, знаходимо два корені рівняння (31): $x_1 = 2, x_2 = -1 - \lg_3 2$.

При розв’язуванні показникових рівнянь інколи використовується формула $f^{\log_a g} = g^{\log_a f}$, де $a > 0, a \neq 1, f > 0, f \neq 1, g > 0, g \neq 1$.

Приклад 24. Розв’язати рівняння $3x^{\log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64$.

Розв’язання. Згідно з визначенням показникового рівняння маємо $x > 0$ і $x \neq 1$. Оскільки при таких x маємо $x^{\log_5 2} = 2^{\log_5 x}$, то задане рівняння рівносильне рівнянню $3 \cdot 2^{\log_5 x} + 2^{\log_5 x} = 64$, тобто рівнянню $2^{\log_5 x} = 16$. Звідси одержуємо $\log_5 x = 4$, або $x = 625$.

При розв’язуванні показникових рівнянь часто користуються штучними прийомами.

Приклад 25. Розв’язати рівняння $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$ (32).

Розв’язання. Поділивши обидві частини заданого рівняння на $2^x > 0$, дістанемо рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x = 1$ (33), рівносильне рівнянню (32). Рівняння (33) можна записати у вигляді $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^x + \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^x = 1$ (34). Порівнюючи це рівняння з основною тригонометричною тотожністю, резюмуємо, що число $x = 2$ є коренем рівняння (32). Інших коренів немає, оскільки в лівій частині рівняння (33) знаходиться сума двох спадних показникових функцій $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ та $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$.

Приклад 26. Розв’язати рівняння $3^x + 4^x = 5^x$.

Розв’язання. Оскільки $3^2 + 4^2 = 5^2$, то очевидно, що $x = 2$ – корінь рівняння. Доведемо, що інших розв’язків немає. Поділимо обидві частини початкового рівняння на 5^x і представимо його у вигляді $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$.

Звідси маємо: якщо $x < 2$, то за властивістю показникової функції з основою, меншою ніж 1, $\left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2$ і $\left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^2$, так що $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$; виходить, $x < 2$ не може бути коренем рівняння. Аналогічно, при $x > 2$ будемо завжди мати нерівність $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < 1$.

Таким чином, підібраний корінь $x = 2$ – єдиний.

Приклад 27. Розв’язати рівняння $7^{6-x} = x + 2$.

Розв'язання. Корінь $x=5$ може бути знайдений підбором. Інших розв'язків рівняння не має, оскільки функція $f(x)=7^{6-x}$ монотонно спадає, а $g(x)=x+2$ монотонно зростає, і, виходить, графіки цих функцій можуть перетнутися не більше одного разу.

Таким чином, $x=2$ – єдиний корінь заданого рівняння.

Приклад 28. Розв'язати рівняння $4^x+(x-1)2^x=6-2x.$

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді $\left(2^x\right)^2+(x-1)2^x+2x-6=0$ і розв'яжемо його як квадратне відносно 2^x. Дістанемо $2^x=-2,$ що не має змісту, або $2^x=-x+3.$

Розв'яжемо останнє рівняння підбором. Очевидним коренем є $x=1.$ Інших роз'язків воно не має, бо в лівій частині знаходиться зростаюча функція, а в правій – складна і , отже, їхні графіки можуть перетнутися тільки в одній точці.

Виходить $x=1$ – корінь заданого рівняння.

Приклад 29. Розв'язати рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7}+\left(\sqrt{x-5{,}3}\right)^2+13{,}3=\frac{x^2-2x+1}{x-3}+x$ (35).

Розв'язання. ОДЗ: $x-5{,}3\geq 0, x\geq 5{,}3.$ Виконавши перетворення, дістанемо $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7}+8=\frac{(x-1)^2}{x-3}.$ Помічаємо, що це рівняння має корінь $x=7.$ Доведемо, що інших коренів немає.

Функція $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7}+8$ монотонно спадає. Якщо виявиться, що функція $y=\frac{(x-1)^2}{x-3}$ зростає на ОДЗ заданого рівняння, то можна буде зробити висновок про те, що $x=7$ – єдиний корінь рівняння (35).

Знайдемо похідну функції $y=\frac{(x-1)^2}{x-3}.$ Дістанемо $y'=\frac{2(x-1)(x-3)-(x-2)^2}{(x-3)^2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}.$ Якщо $x\geq 5{,}3,$ то $y'>0,$ тобто функція $y=\frac{(x-1)^2}{x-3}$ зростає на ОДЗ, що і вимагалося з'ясувати.

Отже, $x=7$ – єдиний корінь рівняння (35).

Варіанти тестових завдань для самостійного розв'язування.

I рівень

1. Знайти суму коренів рівняння $2^{x^2-2x}=2^{3x-6}$.

А 6, Б $\varnothing$, В 6, Г інша відповідь, Д 1.

2.Розв'язати рівняння $\frac{0{,}2^x-0{,}5}{\sqrt{5}}=5\cdot 0{,}04^{x-1}.$

А 1, Б 2, В $\varnothing$, Г 3, Д інша відповідь.

3. Розв'язати рівняння $3^{x^2-4}=5^{2x}.$

А $\log_3 5$, Б $\log_3 5-\sqrt{\log_3^2 5+4},$ В $\log_3 5+\sqrt{\log_3 5+4},$ Г $\log_5 3,$ Д інша відповідь.

4. Розв'язати рівняння $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=5^x+5^{x+2}.$

А $\log_3 5$, Б $\log_{\frac{5}{3}} 2$, В $\varnothing$, Г $\log_{\frac{3}{5}} 2$, Д інша відповідь.

5. Розв'язати рівняння $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

А 1, Б 2, В 3, Г $\varnothing$, Д інша відповідь.

6. Знайти добуток коренів рівняння $6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0$.

А 1, Б 2, В -1, Г -2, Д інша відповідь.

7. Розв'язати рівняння $\left(\sqrt{35}+6\right)^x + \left(\sqrt{35}-6\right)^x = 142$.

А 2, Б 1, В -1, Г $\varnothing$, Д інша відповідь.

8. Розв'язати рівняння $\sqrt{3^{x-54}} - 7\sqrt{3^{x-58}} = 168$.

А 54, Б 58, В 166, Г 66, Д інша відповідь.

9. Розв'язати рівняння $5^{\log_2 x} + 2x^{\log_2 5} = 15$.

А 2, Б 5, В 15, Г $\varnothing$, інша відповідь.

10. Скільки коренів має рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = 4^{x-\frac{1}{2}}$.

А 1, Б 2, В 3, Г безліч, Д інша відповідь.

11. Розв'язати рівняння $7^{1-|x|} = 49$.

А $\varnothing$, Б 7, В 1, Г 49, Д інша відповідь.

12. Скільки коренів має рівняння $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{\log_{\sqrt{2}} \cos x} = 1$.

А 1, Б 2, В 5, Г безліч, Д інша відповідь.

13. Розв'язати рівняння $5^{\log_5 2x} = 2^{\log_2 32}$.

А 5, Б 2, В 32, Г 16, Д інша відповідь.

14. Розв'язати рівняння $\pi^{\log_\pi 4x} = 2^{3+\log_2 3}$.

А 6, Б 3, В 2, Г π, Д інша відповідь.

15. Розв'язати рівняння $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

А 3, Б 7, В $\frac{3}{7}$, Г 1, Д інша відповідь.

16. Розв'язати рівняння $3^x\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$.

А 1, Б -1, В 3, Г $\varnothing$, Д інша відповідь.

17. Розв'язати рівняння $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$.

А 1, Б 2, В 3, Г $\varnothing$, Д інша відповідь.

18. Знайти добуток коренів рівняння $\left(15^{x^2+x-2}\right)^{x-4} = 1$.

А -2, Б -1, В -4, Г -8, Д інша відповідь.

19. Розв'язати рівняння $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$.

А 1, Б 2, В 3, Г 9, Д інша відповідь.

20. Знайти суму коренів рівняння $(x-2)^{x^2-x} = (x-2)^{12}$.

А 12, Б 10, В 7, Г 5, Д інша відповідь.

II рівень

Розв'язати рівняння:

1) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^{\sqrt{x}}}$; 2) $\left(\sqrt{3}+2\right)^{x^2-2x+1} + \left(\sqrt{3}-2\right)^{x^2-2x+1} = \frac{4}{\sqrt{3}-2}$;

3) $(3x-4)^{2x^2+2}=(3x-4)^{5x}$; 4) $|x|^{x^2-2x}=1$;

5) $\sqrt[x]{64}-\sqrt[x]{2^{3x+3}}+12=0$; 6) $(8-x)^{\log_2^2(8-x)}=2^{3x-4}$;

7) $3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}=5+4\sin 2\pi x$; 8) $x^2-2x+2=2\cdot 2^{x-1}-4^{x-1}$;

9) $2^{\sqrt{\log_2 x}}-2=2-x^{\sqrt{\log_x 2}}$; 10) $8(4^x+4^{-x})-54(2^x+2^{-x})+101=0$;

11) $\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^{2x}+2^{2x+1}=144$; 12) $|x-1|^{\frac{16}{7}}+95|x-1|^{\frac{8}{7}}-96=0$;

13) $2\cdot 27^{x^2-x}-3^{2x^2-2x+1}+3^{x^2-x+1}-2=0$;

14) $\left(\dfrac{4^{x^2}}{2^{2x}}+2^{x^2-x}-2\right)\left(2^{2x^2-2x}+\dfrac{2^{x^2}}{2^x}-3\right)=12$;

15) $\left(3\cdot 2^{-x^2+2}-1\right)\left(3\cdot 2^{1-x^2}-1\right)\left(2^{2-x^2}-1\right)\left(3\cdot 2^{-x^2}-1\right)=5$;

16) $2^{2x^2}-2^{x^2+2x+2}=2^{5+4x}$; 17) $\sqrt{2^x\cdot\sqrt[3]{4^x(0{,}125)^{\frac{1}{x}}}}=4\sqrt[3]{2}$;

18) $3^{2x^2}-2\cdot 3^{x^2+x+6}+3^{2(x+6)}=0$; 19) $\left(\left(\sqrt[5]{27}\right)^{\frac{x}{4}-\sqrt{\frac{x}{3}}}\right)^{\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}}=\sqrt[4]{3^7}$;

20) $x^2\cdot 2^{\sqrt{2x+1}-1}+2^x=2^{\sqrt{2x+1}+1}+x^2\cdot 2^{x-2}$.

III рівень

1) $4^{\log_{16}x}-3^{\log_{16}x-0{,}5}=3^{\log_{16}x+0{,}5}-2^{2\log_{16}x-1}$; 2) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=\left(2\sqrt{2}\right)^x$;

3) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{6}{x}}}-\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{6}{x}}}-\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}}=3$; 4) $x^2\cdot 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2\cdot 2^{|x-3|+4}+2^{x-1}$;

5) $10^{\sqrt{\lg x}}+x^{\sqrt{\log_x 10}}=200$; 6) $2^{1-|4x-1|}=\mathrm{tg}\,\pi x+\mathrm{ctg}\,\pi x$; 7) $\left|\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}-\dfrac{2}{\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}}\right|^{\sqrt{8x-x^2-12}}=1$;

8) $2\sqrt{x}\cdot 4^x+5\cdot 2^{x+1}+2\sqrt{x}=2^{2x+2}+5\sqrt{x}\cdot 2^x+4$;

9) $\left(2x^2+5x+1\right)^{24x^3-2x^2-3x+5}=\left(2x^2+5x+1\right)^{20x^2+2x-1}$;

10) $\dfrac{x^2-4x+4}{x-5}-(x-8{,}1)^{\log_{x-8,1}\frac{97}{8}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-6}$;

11) $81\cdot 3^{4x^2+8x}-54\cdot 3^{3(x^2+2x)}-3^{2x^2+4x+2}-6\cdot 3^{x^2+2x}+1=0$;

12) $\left(8\dfrac{256^{x^2}}{16^x}-12\dfrac{16^{x^2}}{4^x}+1\right)\left(2\cdot 16^{2x^2-x+\frac{1}{2}}+\dfrac{5}{2}\cdot 16^{x^2-\frac{1}{2}x}+1\right)=9\cdot 256^{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}$;

13) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}\cdot 2^{x^2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^x}+2\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}\cdot 2^{x^2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^x}+3\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}\cdot 2^{x^2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^x}+8\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}\cdot 2^{x^2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^x}+12\right)=$
$\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot 4^{x^2}\cdot 2^x}$;

14) $\left(6-\dfrac{\sqrt[9]{9}\cdot 3^{2x}}{\sqrt[3]{81^x}}\right)^4+\left(8-\sqrt[9]{9^{(3x-1)}}\right)^4=16$;

15) $\dfrac{256^{x^2}}{128}-\dfrac{9}{128}\cdot 128^{x^2}+\dfrac{5}{16}\cdot 64^{x^2}-\dfrac{33}{32}\cdot 32^{x^2}+\dfrac{23}{8}\cdot 16^{x^2}-\dfrac{33}{4}\cdot 8^{x^2}+20\cdot 4^{x^2}-36\cdot 2^{x^2}+32=0$;

16) $\left(49-20\sqrt{6}\right)^{-x^2}-\left(36\sqrt{3}-44\sqrt{2}\right)^{-x^2}-\left(50-20\sqrt{6}\right)^{-x^2}+37\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-x^2}-14=0$;

17) $\left(4^{x^2}-3\cdot 2^{x^2}+1\right)\left(4^{x^2}+3\cdot 2^{x^2}+2\right)\left(4^{x^2}-9\cdot 2^{x^2}+20\right)=-30$;

18) $7^{-4x^2+40}-2\sqrt{2}\cdot 7^{-2x^2+20}-7^{-x^2+10}+2-\sqrt{2}=0;$

19) $16^{x^2+2x}=\dfrac{11\cdot 2^{x^2+2x}-6}{6\cdot 2^{x^2+2x}-11};$

20)

$8\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^{9\left(x^2-4x+4\right)}-4\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^{6\left(x^2-4x+4\right)}+$

$+2\left(14-3\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)\right)^{x^2-4x+4}=1.$

Відповіді

I рівень

1. В; 2. Г; 3. Б; 4. Г; 5. Б; 6. В; 7. Г; 8. Г; 9. А; 10. А; 11. А; 12. Г; 13. Г; 14. А; 15. Г; 16. Б; 17. В; 18. Г; 19. Г; 20. В.

II рівень

1) $x_1=1; x_2=4;$ 2) $x\in\varnothing$; 3) $x_1=\dfrac{4}{3}; x_2=\dfrac{5}{3}; x_3=2;$ 4) $x_1=-1; x_2=1; x_3=2;$ 5) $x=3;$ 6) $x=4;$ 7) $x=\dfrac{1}{4};$ 8) $x=1;$ 9) $x=2;$ 10) $x_1=-2; x_2=-1;$ 11) $x=2;$ 12) $x=-3;$ 13) $x_1=0; x_2=1;$ 14) $x_1=\dfrac{1-\sqrt{\log_2 2592}}{2}; x_2=\dfrac{1+\sqrt{\log_2 2592}}{2};$ 15) $x_1=-1, x_2=1;$ 16) $x_1=1-\sqrt{3}; x_2=1+\sqrt{3};$ 17) $x_1=-\dfrac{1}{3}; x_2=3;$ 18) $x_1=-2; x_2=3;$ 19) $x=10$;

20) $x_1=2; x_2=4.$

III рівень

1) $x=64$; 2) $x=2;$ 3) $x=\dfrac{\lg 2-\lg 3}{\lg\left(\sqrt{5}+1\right)-\lg 2};$ 4) $x_1=-\dfrac{1}{2}; x_2=\dfrac{1}{2}$ і будь-яке $x\geq 3;$ 5) $x=10^{4};$

6) $x=\dfrac{1}{4};$ 7) $x_1=2\pi-arctg\,\dfrac{4}{3}; x_2=\dfrac{3\pi}{2}; x_3=2; x_4=6;$ 8) $x_1=1; x_2=4;$ 9) $x_1=-\dfrac{5}{2}; x_2=-2; x_3=-\dfrac{1}{2}; x_4=0; x_5=\dfrac{2}{3}; x_6=\dfrac{3}{4};$ 10) $x=9;$ 11) $x_1=-\log_3\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-1; x_2=-\log_3\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}-1; x_3=\log_3\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}-1; x_4=\log_3\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-1;$

12)

$x_1=-\sqrt{\log_{16}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}+\dfrac{1}{2}; x_2=-\sqrt{\log_{16}\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}+\dfrac{1}{2}; x_3=\sqrt{\log_{16}\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}+\dfrac{1}{2};$

$x_4=\sqrt{\log_{16}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}+\dfrac{1}{2};$

13) $x\in\varnothing$; 14) $x_1=-3\sqrt{\log_9 2}+\dfrac{1}{3}; x_2=-\sqrt{\log_9 6}+\dfrac{1}{3}; x_3=\sqrt{\log_9 6}+\dfrac{1}{3}; x_4=3\sqrt{\log_9 2}+\dfrac{1}{3};$

15) $x_1=-\sqrt{2}; x_2=-1; x_3=1; x_4=\sqrt{2};$ 16) $x_1=-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}}; x_2=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}};$

17)

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\log_2\left(3+\sqrt{29}\right)-1};\ x_{3,4}=\pm\sqrt{\log_2\left(3+\sqrt{25+4\sqrt{30}}\right)-1};$

$x_{5,6}=\pm\sqrt{\log_2\left(3+\sqrt{25-4\sqrt{30}}\right)-1};\ x_{7,8}=\pm\sqrt{\log_2\left(3-\sqrt{25-4\sqrt{20}}\right)-1};$

18) $x_{1,2}=\pm\sqrt{10-\log_7\frac{1-\sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}};\ x_{3,4}=\pm\sqrt{10-\log_7\frac{1+\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}};$

19) $x_1=-1-\sqrt{2};\ x_2=-1;\ x_3=-1+\sqrt{2};$ 20) $x\in\varnothing$.

Література

1. Г.В.Дорофеев, М.К.Потапов, Н.Х.Розов. Пособие по математике для поступающих в вузы. (Избранные вопросы элементарной математики). М., 1973 г. – 528 с. с ил.
2. Сборник задач по математике для поступающих во втузы /В.К.Егерев, В.В.Зайцев, Б.А.Кордемский и др.; Под ред. М.И.Сканави. – Мн.: Высш.шк., 1990. – 528 с.: ил.
3. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – М.: Наука. Гл.ред.физ. – мат.лит., 1978. – 240с.
4. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1988. – 432 с.
5. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб.пособие для студентов физ.-мат.спец.пед.ин-тов. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение. 1991. – 325 с.: ил.
6. Математика. Тесты. 5-12 класи: посібник/В.І.Лагно, О.А.Москаленко, В.О.Марченко та ін. – 2-ге вид., стер. – К.: Академвидав, 2009. – 320 с.
7. Сборник задач по математике для поступающих в вузы: Учеб.пособие/П.Т.Дыбов, А.И.Забоев, А.С.Иванов и др.; Под ред. А.И.Прилепко. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высш.шк., 1989. – 271 с.: ил.
8. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб.пособие для 11 кл.сред.шк. – М.: Просвещение, 1991. – 384 с.: ил.
9. Шарыгин И.Ф. решение задач: Учеб.пособие для 10 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 1994. – 252 с.: ил.
10. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 576 с.