Звездочкина Е. А. аспирантка
второго года обучения
Толок В. А., проф. кафедры ММИТ

Об одном способе решения смешанной задачи теплопроводности для полуплоскости с включениями.

Рассмотрим задачу теплопроводности на полуплоскости с включениями. Под включениями мы понимаем наличие многосвязности с заданными граничными условиями. Предполагаем, что на части границы задан тепловой поток.

Пусть в области, ограниченной прямой, с включениями различной геометрической формы происходит перераспределение температуры, которая задана сама и имеет нормальную производную на границах.

Математически этот процесс описывается следующим образом (рис. 1):

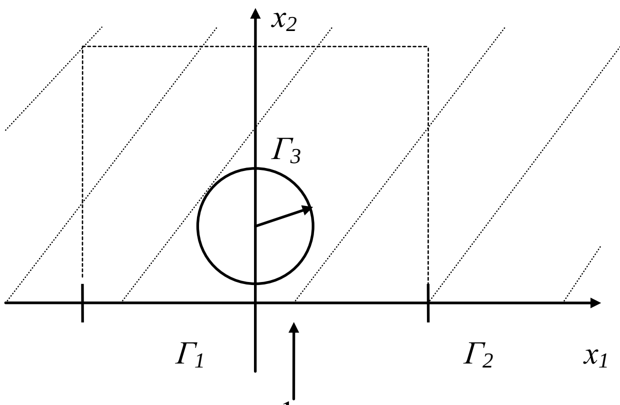


рис.1

$$\Delta u=0,$$

$$u\big|_{\Gamma_1} = f_1(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = f_2(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_3} = f_3(x).$$

где Δ - оператор Лапласа, Γ_1 - часть прямой, на которой задан тепловой поток, Γ_2 - остальная часть прямой, на которой задана температура, Γ_3 - контур включения.

Эту задачу можно решить, комбинируя метод граничных элементов (1) и метод функций Грина (2).

С этой целью ограничим прямоугольником нашу полуплоскость, одной из границ которого будет контур Γ_1, на котором и задан тепловой поток. Разобьем новый контур на граничные элементы и будем определять в узлах значения неизвестных u и $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$.

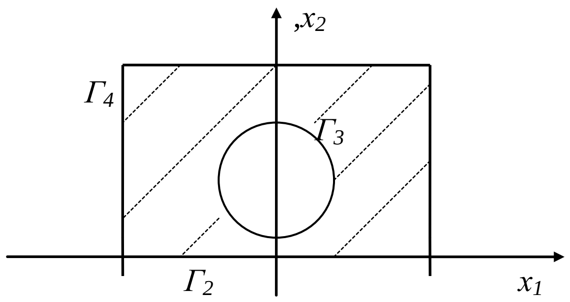
Если использовать решение методом функций Грина для задачи Дирихле, то получим следующее выражение:

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n}d\Gamma,$$

где $G(x,y)$ - функция Грина для полуплоскости.

Это соотношение связывает каждую точку полуплоскости со значением функции на контуре $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Для прямоугольной области (рис.2) строим решение методом граничных уравнений.



$$\Delta u = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_3} = 1$$

рис.2

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \int_{\Gamma_{4_i}} w\,d\Gamma_{4_i} - \sum_{i=1}^{n} u_i \int_{\Gamma_{2_i}} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\Gamma_{2_i} - \sum_{i=1}^{n} v_i \int_{\Gamma_{3_i}} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\Gamma_{3_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{\Gamma_{4_i}} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\Gamma_{4_i} = -\int_{\Gamma_2} 1 \cdot w\,d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_3} 1 \cdot w\,d\Gamma_3$$

где q_i - искомые величины потока на границе Γ_1, p_i, u_i, v_i - искомые величины температуры на контурах Γ_1, Γ_2и Γ_3 соответственно. В качестве весовой функции используется фундаментальное решение для плоскости, где координаты источника выбираются на внешней нормали для каждого граничного элемента прямоугольника. Записывая данное соотношение для каждой точки получаем систему линейных алгебраических уравнений. Уравнений получается $3n$, а неизвестных $4n$. Добавляя к системе уравнения, выражающие значения температуры на Γ_4 p_i через значения температуры на контуре Γ_2 u_i с помощью метода функций Грина, доведем количество уравнений до $4n$.

$$p_i = -\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} u_i \operatorname{arctg} \frac{x_1 - y_1}{x_2} \Big|_{c_i}^{c_{i+1}},$$

где c_{i+1} и c_i - пределы интегрирования. Таким образом получим полную систему алгебраических уравнений.

После нахождения искомых величин для внутренней области решение строится по интегральной формуле, а во остальной части области по формуле решения задачи Дирихле для полуплоскости.

Ниже приведены результаты решения данной задачи в полуплоскости для области размером $-2.00 \le x1 \le 2.00$ $0.00 \le x2 \le 3$

0.225	0.243	0.261	0.277	0.291	0.302	0.309	0.311	0.309	0.302	0.291	0.277	0.261	0.243	0.225
0.232	0.253	0.274	0.293	0.310	0.323	0.331	0.334	0.331	0.323	0.310	0.293	0.274	0.253	0.232
0.239	0.263	0.287	0.310	0.330	0.346	0.357	0.360	0.357	0.346	0.330	0.310	0.287	0.263	0.239
0.245	0.273	0.301	0.329	0.354	0.373	0.386	0.391	0.386	0.373	0.354	0.329	0.301	0.273	0.245
0.250	0.282	0.316	0.349	0.380	0.405	0.421	0.427	0.421	0.405	0.380	0.349	0.316	0.282	0.250
0.254	0.291	0.331	0.372	0.411	0.444	0.466	0.473	0.466	0.444	0.411	0.372	0.331	0.291	0.254
0.255	0.297	0.345	0.395	0.471	0.563	0.623	0.644	0.623	0.563	0.471	0.395	0.345	0.297	0.255
0.252	0.301	0.357	0.420	0.537	0.709	0.807	0.840	0.807	0.709	0.537	0.420	0.357	0.301	0.252
0.244	0.299	0.366	0.444	0.602	0.854				0.854	0.602	0.444	0.366	0.299	0.244
0.229	0.290	0.369	0.466	0.658	0.941				0.941	0.658	0.466	0.369	0.290	0.229
0.206	0.269	0.360	0.481	0.712	1.025				1.025	0.712	0.481	0.360	0.269	0.206
0.171	0.233	0.331	0.481	0.765	1.139				1.139	0.765	0.481	0.331	0.233	0.171
0.124	0.176	0.269	0.446	0.807	1.314	1.881	2.061	1.881	1.314	0.807	0.446	0.269	0.176	0.124
0.065	0.096	0.159	0.328	0.823	1.405	1.839	1.998	1.839	1.405	0.823	0.328	0.159	0.096	0.065
0.000	0.000	0.000	0.000	0.849	1.583	1.949	2.120	1.949	1.583	0.849	0.000	0.000	0.000	0.000

Литература

1.Бреббия К., Уоккер С. Применение метода граничных элементов в технике. - М.: Мир, 1982. - С. 9-36.

2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики - М.: Наука, 1967. - 256 с.