35. ПРО МНОЖИНУ РІВНІВ НЕПЕРЕРВНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

В.М. Сафонов, О.П. Зінькевич

Національний університет харчових технологій

О.М. Нещадим

Національний університет біоресурсів і природокористування України

В багатьох випадках важливими є ті відображення, які не мають інтервалів сталості.

Як зазвичай, через R позначимо одновимірний евклідів простір. Нехай f: $[a;b] \to R$ - неперервне відображення. Введемо такі поняття [2], [3].

Досконалою множиною називається замкнена множина, кожна точка якої є граничною точкою цієї множини. Множина $A \subset R$ щільна в множині $B \subset R$, якщо кожна точка множини B є граничною точкою множини A, тобто якщо $B \subset \overline{A}$. У разі коли множина A щільна в R, то вона називається скрізь щільною.

Множина $A \subset R$ ніде не щільна в R, якщо кожна відкрита множина $G \subset R$ має іншу відкриту підмножину $G' \subset G$, яка не містить точок A. Об'єднання будь-якого скінченного числа ніде не щільних множин ніде не щільне. Зліченне об'єднання ніде не щільних множин не є, взагалі кажучи, ніде не щільним, воно може бути навіть щільним. Наприклад, множина раціональних точок щільна в R.

Множина A називається множиною першої категорії в R, якщо її можна зобразити у вигляді об'єднання скінченної або зліченної сукупності ніде не щільних множин: $\mathring{A} = \bigcup_n A_n$. Як приклад множини першої категорії – множина раціональних точок в R.

Якщо ж множину $E \subset R$ не можна зобразити у вигляді об'єднання ніде не щільних множин, то вона називається множиною другої категорії в R. Наприклад, довільна відкрита множина в R являє собою таку множину.

У разі коли доповнення $R \setminus E$ є множиною першої категорії, то множина E резидуальна, тобто вона – скрізь другої категорії або інакше – другої категорії в кожній своїй відкритій порції в R.

Замкнена множина $P \subset R$ називається нульвимірною $(\dim P = 0)$, якщо вона ніде не щільна в R.

Прикладами тут можуть бути довільні скінченна, а також зліченна замкнена множини в R. Нетривіальним прикладом є канторова досконала множина на сегменті

$[0;1]$ (потужності континуума в кожній своїй порції).

Розглянемо повний прообраз $f^{-1}f(x_0)$ точки $x_0 \in [a;b]$, який також будемо називати рівнем відображення f.

Відображення f називається нульвимірним, якщо кожний його рівень є нульвимірною множиною, тобто $\dim f^{-1}f(x_0) = 0$ для будь-якого $x_0 \in [a;b]$.

Охарактеризуємо тепер множину рівнів неперервного відображення в термінах категорії.

Отже, маємо таке твердження.

Теорема 1. Нехай неперервне нульвимірне відображення $f:[a;b] \to R$ має множину не більше як зліченних рівнів скрізь другої категорії. Тоді множина його незліченних рівнів є ніде не щільною.

Те, що вище зазначена теорема не є вірною без додаткової вимоги про нульвимірність відображення, показує приклад [1] відомої канторової функції $\Theta(x)$, $x \in [0;1]$. Будучи сталою на замиканні кожного з суміжних інтервалів до канторової множини P_0, функція $\Theta(x)$ на щільній відкритій підмножині $[0;1] \setminus P_0$ сегменту $[0;1]$ є зростаючою, а її множина значень (на цій же підмножині) скрізь щільна (і до того ж першої категорії) в $[0;1]$.

Далі через $n(y)$ позначимо індикатрису Банаха - функцію, задану на сегменті $[m;M]$, де $m = \min_{a \le x \le b} f(x)$ і $M = \max_{a \le x \le b} f(x)$, і значення якої – число коренів рівняння $f(x) = y$. Якщо множина цих коренів нескінченна, то $n(y) = +\infty$. Ясно, що $0 \le n(y) < +\infty$ для довільного скінченного рівня $f^{-1}(y)$.

Доповненням до попередньої теореми є таке твердження.

Теорема 2. Якщо неперервне відображення $f:[a;b] \to R$ нульвимірне з множиною скінченних рівнів скрізь другої категорії, то існує відкрита скрізь щільна на образі $f([a;b])$ множина, в кожній компоненті якої його індикатриса Банаха $n(y)$ обмежена.

Література:

1. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе – М.: Мир, 1967. - 252 с.

2. *Куратовский К.* Топология: В 2-х томах – М.: Мир, 1966. - Т.1. – 595 с.

3. *Трохимчук Ю.Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности – К.:Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 539 с.