15. Вплив гладкості інтерполяційних тригонометричних сплайнів на похибку інтерполяції

Олена Негоденко
Національний авіаційний університет

Вступ. Під час проведення досліджень у галузі процесів та технологій харчових виробництв виникає необхідність подальшої аналітичної обробки здобутих експериментальних закономірностей.

Найчастіше експериментальні дані мають вигляд таблиць чи графіків, які отримані з допомогою певного експериментального обладнання. Для подальшої математичної обробки з метою більш детального дослідження їх, як правило, представляють у вигляді відповідних формул, які дозволять розраховувати значення дослідженої функції у будь-якій точці дослідженого інтервалу, використовувати аналітичні операції диференціювання, інтегрування та ін.

Для моделювання традиційно застосовують алгебраїчні многочлени. Але вони мають ряд серйозних недоліків, які призводять до доцільності розробки різних модифікацій многочленної інтерпретації, найвдалішою з яких є модифікація, що отримала назву поліноміальних сплайн-функцій або просто сплайнів.

Проте поліноміальні сплайни мають ряд недоліків, які певною мірою стримують їх застосування у різних задачах науки і техніки. До таких недоліків слід віднести складність побудови сплайнів високих степенів.Тому особливу зацікавленість у теперішній час становлять нові класи функцій, які мають переваги поліноміальних сплайнів і є вільними від недоліків поліноміальних сплайнів. До таких нових класів функцій слід віднести класи тригонометричних сплайнів.

Матеріали і методи. Для виявлення впливу гладкості інтерполяційних тригонометричних сплайнів на похибку інтерполяції застосовано теоретичне дослідження та математичне моделювання в програмному паккеті Mathcad. Задавали N вузлів інтерполяції, $N = 2n + 1$, де $n = 1,2,\ldots$, крок рівномірної сітки $h = 2\pi \frac{i-1}{N}$, де $i = 1,2,\ldots,N$. Задавали функцію $f(t)$ на $[0,2\pi]$. Обчислювали значення функції у вузлах інтерполяції. По цих вузлах будували тригонометричний інтерполяційний сплайн і при різному значенні параметра r обчислювали похибку інтерполяції.

Результати та обговорення. В даній роботі досліджується вплив диференціальних властивостей тригонометричних інтерполяційних сплайнів [1] на похибку інтерполяції.

Розглянемо функцію $f(t)$ на $[0,2\pi]$. Задамо N вузлів інтерполяції, $N = 2n + 1$, де $n = 1,2,\ldots$, крок рівномірної сітки $h = 2\pi \frac{i-1}{N}$, де $i = 1,2,\ldots,N$.

Обчислюємо значення функції у вузлах інтерполяції. Будуємо тригонометричний інтерполяційний сплайн [1], який має вигляд (1).

Параметр r визначає гладкість сплайнів, оскільки тригонометрчні сплайни r-ого порядку мають абсолютно неперервну похідну (r-1)-ого порядку ($r = 1,2,\ldots$).

Тому при практичному використанні цих сплайнів постає задача про вибір порядка сплайна і його плив на похибку інтерполяції.

$$S_{t_r}(f,\Delta_N,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(r,N)\left[a_k^*\Phi_k^c(r,N,t)+b_k^*\Psi_k^s(r,N,t)\right],$$

$$\text{де } \Phi_k^c(r,N,t)=\frac{\cos kt}{k^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(mN+k)t}{(mN+k)^{r+1}}+\frac{\cos(mN-k)t}{(mN-k)^{r+1}}\right],$$

$$\Psi_k^s(r,N,t)=\frac{\sin kt}{k^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(mN+k)t}{(mN+k)^{r+1}}-\frac{\sin(mN-k)t}{(mN-k)^{r+1}}\right],$$

$$\left[\alpha_k(r,N)\right]^{-1}=\frac{1}{k^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(mN+k)^{r+1}}+\frac{1}{(mN-k)^{r+1}}\right],$$

$$a_0=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f(t_i),\qquad a_k^*=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f(t_i)\cos kt_i,\qquad b_k^*=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f(t_i)\sin kt_i,$$

$k=1,2,\ldots,n$, r - Розглядалися випадки, коли в ролі наближеної функції вибиралась функції $f(t)=\sin \frac{3}{4}t$ та $f(t)=t+1$, $t\in[0,2\pi]$. На відрізку $[0,2\pi]$ задавали 9 вузлів інтерполяції і знаходили значення функцій в цих вузлах. По цих вузлах будували тригонометричний інтерполяційний сплайн і при різному значенні параметра r обчислювали похибку інтерполяції. В результаті порівняння цих похибок виявилось, що із збільшенням порядка сплайна похибка інтерполяції збільшувалась.

Це пояснюється тим, що при застосуванні тригонометричних сплайнів для наближення функцій в загальному випадку на кінцях відрізка інтерполяції спостерігається відоме явище Гіббса, яке суттєво впливає на точність наближення

Якщо ж розглядати середню частину відрізка, то можна спостерігати посилення впливу явища Гіббса на середину відрізка інтерполяції.

Висновки. Розглянуто задачу інтерполяції, коли в ролі наближуючої функції використовуються тригонометричні сплайни [1]; досліджено вплив властивостей гладкості сплайнів на похибку інтерполяції як на кінцях так і на середині відрізку на тестових прикладах і встановлено, що із збільшенням порядка сплайна похибка інтерполяції збільшується. Це пояснюється тим, що із збільшенням порядку сплайну посилюється шкідливий вплив явища Гіббса.

Література

1. Денисюк В.П. Сплайни та сигнали / Володимир Петрович Денисюк. – К: ЗАТ «ВІПОЛ», 2007. – 228 с.
2. В.П. Денисюк «Про деякі методи покращення збіжності рядів Фур'є та інтерполяційних тригонометричних многочленів ». Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. праць. – К: НАУ, 2012. – Випуск 3(39). – с. 39-42
3. Tom Lyche, Larry L. Schumaker, Sonya Stanley. Quasi-interpolants Based on Trigonometric Splines Journal of Approximation Theory, Volume 95, Issue 2, November 1998, Pages 280-309