ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 300–309
doi:10.15330/cmp.6.2.300-309

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.300–309

Кулявець Л.В.[1], Мулява О.М.[2]

ПРО ЗРОСТАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

У термінах узагальнених порядків досліджено зв'зок між зростанням цілого ряду Діріхле $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ і зростанням цілих рядів Діріхле $F_j(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \exp\{s\lambda_n\}$, $1 \le j \le 2$, якщо коефіцієнти a_n повязані з коефіцієнтами $a_{n,j}$ певними співвідношеннями.

Ключові слова і фрази: ряд Діріхле, узагальнений порядок.

[1] Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
[2] National University of Food Technologies, 68 Volodymyrska str., 01601, Kyiv, Ukraine
E-mail: lubov.kulyavets@gmail.com (Кулявець Л.В.), info@nuft.edu.ua (Мулява О.М.)

Вступ

Для цілої функції $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ нехай $\varrho[f]$ — її порядок, а $\sigma[f]$ — тип. Використовуючи формули Адамара для знаходження цих величин, Е. Келис [1] довів дві такі теореми.

Теорема А. *Нехай функції $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n,1} z^n$ і $f_2(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n,2} z^n$ є скінченного порядку, мають регулярне зростання (в розумінні рівності порядку $\varrho[f]$ та нижнього порядку $\lambda[f]$) і послідовності $(|a_{n,1}/a_{n+1,1}|)$ та $(|a_{n,2}/a_{n+1,2}|)$ є неспадними для $n \ge n_0$. Тоді, якщо $\ln(1/|a_n|) = (1+o(1))\sqrt{\ln(1/|a_{n,1}|)\ln(1/|a_{n,2}|)}$ при $n \to \infty$, то функція f має регулярне зростання і $\varrho[f] = \sqrt{\varrho[f_1]\varrho[f_2]}$.*

Теорема Б. *Нехай цілі функції f_1 і f_2 з теореми А мають однаковий порядок $\varrho[f_1] = \varrho[f_2] = \varrho \in (0, +\infty)$ і типи $\sigma[f_1] = \sigma_1$, $\sigma[f_2] = \sigma_2$. Припустимо, що $a_{n,1} \ne 0$ і $|a_{n,2}| \ge |a_{n,1}|/l(1/|a_{n,1}|)$ для всіх $n \ge n_0$, де l — повільно змінна функція. Тоді, якщо $|a_n| = (1+o(1))\sqrt{|a_{n,1}||a_{n,2}|}$ при $n \to \infty$, то функція f має порядок $\varrho[f] = \varrho$ і тип $\sigma[f] \le \sqrt{\sigma_1\sigma_1}$.*

Зауважимо, що дещо раніше Р. Срівастава [4,5] намагався довести теорему Б без умов $a_{n,1} \ne 0$ і $|a_{n,2}| \ge |a_{n,1}|/l(1/|a_{n,1}|)$ для всіх $n \ge n_0$, а теорему А — без умови неспадання послідовностей $(|a_{n,1}/a_{n+1,1}|)$ та $(|a_{n,2}/a_{n+1,2}|)$. На помилковість таких тверджень було вказано в Math. Rev., 1963, Vol. 25, №2204, №2206.

Метою нашої статті є узагальнення теорем А і Б на випадок цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку за М.М. Шереметою, причому замість двох цілих функцій f_1 і f_2 розглядатимемо $n \ge 2$ цілих рядів Діріхле.

УДК 517.537.72
2010 *Mathematics Subject Classification:* 30B50.

Отже, нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, $S(\Lambda)$ — клас цілих рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

із заданою послідовністю показників (λ_n), а $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$.

Через L позначимо клас додатних неперервних на $(-\infty, +\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ для $-\infty < x \le x_0$ і $\alpha(x) \uparrow +\infty$ при $x_0 \le x \to +\infty$. Будемо говорити, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1 + o(1))x) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$. Нарешті, $\alpha \in L_{\text{пз}}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, тобто α — повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{\text{пз}} \subset L^0$.

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ узагальненими порядком $\varrho_{\alpha\beta}[F]$ і нижнім порядком $\lambda_{\alpha\beta}[F]$ цілого ряду Діріхле (1) називаються величини

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)}, \qquad \lambda_{\alpha,\beta}[F] = \varliminf_{\sigma \to \infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)}.$$

Важливим у наших дослідженнях є наступний отриманий в [3] результат.

Лема 1. *Нехай $0 < p < +\infty$, $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ — неперервно диференційовні функції і виконується одна з умов:*

а) $\alpha \in L^0$, $\beta(\ln x) \in L^0$, $\dfrac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{\ln x} \to \dfrac{1}{p}$ $(x \to +\infty)$ для кожного $c \in (0, +\infty)$ і $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$;

б) $\alpha \in L_{\text{пз}}$, $\beta \in L^0$, $\varrho_{\alpha,\beta}[F] < +\infty$, $\dfrac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{\ln x} = O(1)$ $(x \to +\infty)$ і $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ $(n \to \infty)$ для кожного $c \in (0, +\infty)$.

Тоді

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F] = k_{\alpha,\beta}[F] =: \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\alpha(\lambda_n / p)}{\beta\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\lambda_n} \ln \dfrac{1}{|a_n|}\right)},$$

а якщо крім цього $\alpha(\lambda_{n+1}/p) = (1 + o(1))\alpha(\lambda_n/p)$ і $\dfrac{\ln |a_n| - \ln |a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$ при $n_0 \le n \to \infty$, то

$$\lambda_{\alpha,\beta}[F] = \varkappa_{\alpha,\beta}[F] =: \varliminf_{n \to \infty} \frac{\alpha(\lambda_n / p)}{\beta\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\lambda_n} \ln \dfrac{1}{|a_n|}\right)}.$$

Зауважимо, що для того, щоб $\lambda_{\alpha,\beta}[F] \ge \varkappa_{\alpha,\beta}[F]$ досить, щоб $\alpha(\lambda_{n+1}/p) = (1 + o(1))\alpha(\lambda_n/p)$ при $n \to \infty$.

1 Узагальнення теореми А

Припустимо, що $F_j \in S(\Lambda)$ $(2 \le j \le m)$ і

$$F_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \exp\{s\lambda_n\}. \tag{2}$$

Теорему А узагальнює така теорема.

Теорема 1. *Нехай $\alpha \in L_{\text{пз}}$ та $\beta \in L^0$ — неперервно диференційовні функції,*

$$\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{\ln x} = O(1)$$

при $x \to +\infty$ і $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ при $n \to \infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, а всі функції (2) мають регулярне $\alpha\beta$-зростання (тобто $\lambda_{\alpha,\beta}[F_j] = \varrho_{\alpha,\beta}[F_j] < +\infty$), послідовності

$$\frac{\ln |a_{n,j}| - \ln |a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$$

при $n_0 \le n \to \infty$ і $\alpha(\lambda_{n+1}) = (1 + o(1))\alpha(\lambda_n)$ при $n \to \infty$. Тоді, якщо

$$\beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right) = (1 + o(1)) \prod_{j=1}^{m} \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|}\right)^{\omega_j}, \quad n \to \infty, \tag{3}$$

де $\omega_j > 0$ і $\sum\limits_{j=1}^{m} \omega_j = 1$, то функція (1) має регулярне $\alpha\beta$-зростання і

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \prod_{j=1}^{m} \varrho_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}.$$

Доведення. Оскільки $\alpha \in L_{\text{пз}}$, $\beta \in L^0$ і $\lambda_{\alpha,\beta}[F_j] = \varrho_{\alpha,\beta}[F_j] = \varrho_j < +\infty$, то

$$\alpha(\lambda_{n+1}/p) = (1 + o(1))\alpha(\lambda_n/p),$$
$$\beta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right) = (1 + o(1))\beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)$$

при $n \to \infty$ для будь-якого $p \in (0, +\infty)$, і отже, за лемою 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|}\right) = \frac{1}{\varrho_j}.$$

Тому з (3) отримуємо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \prod_{j=1}^{m} \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|}\right)^{\omega_j} \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)^{\omega_j} \\
&= \prod_{j=1}^{m} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)^{\omega_j} = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{\varrho_j}\right)^{\omega_j},
\end{aligned}$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)} = \prod_{j=1}^{m} \varrho_j^{\omega_j}.$$

Використовуючи лему 1 і зауваження до неї, звідси легко одержуємо, що

$$\prod_{j=1}^{m} \varrho_j^{\omega_j} = \lambda_{\alpha,\beta}[F] \le \varrho_{\alpha,\beta}[F] = \prod_{j=1}^{m} \varrho_j^{\omega_j},$$

тобто функція F має регулярне $\alpha\beta$-зростання і $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \prod\limits_{j=1}^{m} \varrho_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$. Теорему 1 доведено. $\square$

Якщо виберемо $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = x$ для $x \geq x_0$, то з означення узагальнених порядку та нижнього порядку випливають відповідно означення R-порядку $\varrho_R[F]$ та нижнього R-порядку $\lambda_R[F]$, а з теореми 1 отримуємо наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$ *і* $\ln \lambda_{n+1} = (1+o(1)) \ln \lambda_n$ *при* $n \to \infty$, *всі функції* (2) *мають регулярне зростання (тобто* $\lambda_R[F_j] = \varrho_R[F_j] < +\infty$*) і послідовності*

$$\frac{\ln |a_{n,j}| - \ln |a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$$

при $n_0 \leq n \to \infty$. *Тоді, якщо*

$$\ln \frac{1}{|a_n|} = (1+o(1)) \prod_{j=1}^{m} \ln^{\omega_j} \frac{1}{|a_{n,j}|}, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

де $\omega_j > 0$ *і* $\sum\limits_{j=1}^{m} \omega_j = 1$, *то функція* (1) *має регулярне зростання і* $\varrho_R[F] = \prod\limits_{j=1}^{m} \varrho_R[F_j]^{\omega_j}$.

Якщо у степеневому розвиненні цілої функції f зробимо заміну $z = e^s$, то отримаємо цілий ряд Діріхле (1). При цьому $\varrho_R[F] = \varrho[f]$, $\lambda_R[F] = \lambda[f]$, а з наслідку 1 випливає наступне твердження.

Наслідок 2. *Нехай* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, *а цілі функції* $f_j(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k,j} z^k$ $(2 \leq j \leq m)$ *мають регулярне зростання і послідовності* $(|a_{k,j}/a_{k+1,j}|) \nearrow +\infty$ *при* $k_0 \leq k \to \infty$. *Тоді за умови* (4) *функція* f *має регулярне зростання і* $\varrho[f] = \prod\limits_{j=1}^{m} \varrho[f_j]^{\omega_j}$.

Теорема А випливає з наслідку 2 за умов $m = 2$ і $\omega_j = 1/2$.

2 Узагальнення теореми Б

Припустимо, що, як у теоремі 1, $\alpha \in L_{\text{П3}}$ та $\beta \in L^0$ — неперервно диференційовні функції. Для того, щоб отримати узагальнення теореми Б, крім узагальненого порядку $\varrho_{\alpha,\beta}[F] \in (0, +\infty)$ введемо (узагальнений) тип за формулою

$$T_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\alpha^{-1}(\varrho_{\alpha,\beta}[F]\beta(\sigma))}.$$

Оскільки $T_{\alpha,\beta}[F] = \varrho_{\alpha_1,\beta_1}[F]$, де $\alpha_1(x) = x$ і $\beta_1(x) = \alpha^{-1}(\varrho_{\alpha,\beta}[F]\alpha(x))$ для $x \geq x_0$, то ми можемо застосувати лему 1. Зауважимо, що $\alpha_1 \in L^0$, а використовуючи теорему Лагранжа, неважко показати, що $\beta_1(\ln x) \in L^0$ за умови $\dfrac{\ln \beta_1(x)}{x} = O(1)$ при $x \to +\infty$, тобто за умови

$$\frac{\ln \alpha^{-1}(\varrho_{\alpha,\beta}[F]\beta(x))}{x} = O(1)$$

при $x \to +\infty$, яка рівносильна умові

$$\frac{\ln \alpha^{-1}(x)}{\beta^{-1}(x/\varrho_{\alpha,\beta}[F])} = O(1), \quad x \to +\infty. \tag{5}$$

З іншого боку, оскільки $\alpha_1(x) = x$, то умова $\dfrac{\beta_1^{-1}(c\alpha_1(x))}{\ln x} \to \dfrac{1}{p}$ $(x \to +\infty)$ для кожного $c \in (0, +\infty)$ рівносильна умові $\dfrac{\beta_1^{-1}(x)}{\ln x} \to \dfrac{1}{p}$ $(x \to +\infty)$, тобто для $p = \varrho_{\alpha,\beta}[F]$ рівносильна умові

$$\frac{\ln \alpha^{-1}(x)}{\beta^{-1}(x/\varrho_{\alpha,\beta}[F])} \to \varrho_{\alpha,\beta}[F], \quad x \to +\infty. \tag{6}$$

Оскільки з (6) випливає (5), то з леми 1 випливає наступна лема.

Лема 2. *Нехай функції $\alpha \in L_{\text{пз}}$ та $\beta \in L^0$ неперервно диференційовні і $\varrho_{\alpha,\beta}[F] \in (0, +\infty)$. Тоді за умов (6) і $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$ правильна рівність*

$$T_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\varrho_{\alpha,\beta}[F]\alpha^{-1}\left(\varrho_{\alpha,\beta}[F]\beta\left(\dfrac{1}{\varrho_{\alpha,\beta}[F]} + \dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)\right)}.$$

Наступна теорема узагальнює теорему Б.

Теорема 2. *Нехай функції $\alpha \in L_{\text{пз}}$, $\beta \in L^0$ неперервно диференційовні, виконується умова (6), $\alpha(x) = (1+o(1))\ln x$ при $x \to +\infty$ і $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$. Нехай всі ряди Діріхле (2) мають однаковий узагальнений порядок $\varrho_{\alpha,\beta}[F_j] = \varrho \in (0, +\infty)$ і типи $T_{\alpha,\beta}[F_j] \in (0, +\infty)$. Припустимо, що коефіцієнти ряду Діріхле (1) задовольняють умову*

$$\alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)\right) = (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)^{\omega_j} \tag{7}$$

при $n \to \infty$, де ω_j — додатні числа і $\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j = 1$. Тоді, якщо $a_{n,1} \neq 0$ для всіх $n \geq n_0$ і

$$\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right) \leq (1+o(1))\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,1}|}\right), \quad n \to \infty, \tag{8}$$

для всіх $2 \leq j \leq m$, то ряд Діріхле (1) має узагальнений порядок $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varrho$ і тип $T_{\alpha,\beta}[F] \leq \prod\limits_{j=1}^{m} T_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$.

Доведення. Оскільки $\alpha(x) = (1+o(1))\ln x$ $(x \to +\infty)$, то $\ln\alpha^{-1}(x) = (1+o(1))x$ $(x \to +\infty)$ і з (7) з огляду на умову $\beta \in L^0$ отримуємо

$$\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right) = (1+o(1))\sum_{j=1}^{m}\omega_j\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right), \quad n \to \infty.$$

Тому

$$\frac{1}{\varrho_{\alpha,\beta}[F]} = \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha(\lambda_n)}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right) = \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha(\lambda_n)}\sum_{j=1}^{m}\omega_j\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)$$
$$\geq \sum_{j=1}^{m}\omega_j\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha(\lambda_n)}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\omega_j}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}.$$

З іншого боку, з огляду на умову (8)

$$\frac{1}{\varrho_{\alpha,\beta}[F]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \left(\omega_1 \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,1}|}\right) + \sum_{j=2}^{m} \omega_j \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \left(\omega_1 \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,1}|}\right) + (1+o(1)) \sum_{j=2}^{m} \lambda_j \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,1}|}\right)\right) = \frac{1}{\varrho}.$$

Нарешті, з огляду на лему 2 і умову (7)

$$\frac{1}{T_{\alpha,\beta}[F]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varrho_{\alpha,\beta}[F]}{\lambda_n} \alpha^{-1}\left(\varrho_{\alpha,\beta}[F]\beta\left(\frac{1}{\varrho_{\alpha,\beta}[F]} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\varrho_{\alpha,\beta}[F]}{\lambda_n} \prod_{j=1}^{m} \alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)^{\omega_j}$$
$$\geq \prod_{j=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\varrho_{\alpha,\beta}[F]}{\lambda_n} \alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)\right)^{\omega_j} = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{T_{\alpha,\beta}[F_j]}\right)^{\omega_j},$$

тобто $T_{\alpha,\beta}[F] \leq \prod\limits_{j=1}^{m} T_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$. □

Якщо виберемо $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = x$ для $x \geq x_0$, то з означення $T_{\alpha,\beta}[F]$ випливає означення R-типу $T_R[F]$, а з теореми 2 отримуємо наступне твердження.

Наслідок 3. *Нехай $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$, а всі ряди Діріхле (2) мають однаковий R-порядок $\varrho_R[F_j] = \varrho \in (0, +\infty)$ і R-типи $T_R[F_j] \in (0, +\infty)$. Припустимо, що коефіцієнти ряду Діріхле (1) задовольняють умову $|a_n| = (1 + o(1)) \prod\limits_{j=1}^{m} |a_{n,j}|^{\omega_j}$ при $n \to \infty$, де ω_j — додатні числа і $\sum\limits_{j=1}^{m} \omega_j = 1$. Тоді, якщо $a_{n,1} \neq 0$ для всіх $n \geq n_0$ і $\ln \dfrac{1}{|a_{n,j}|} \leq (1 + o(1)) \ln \dfrac{1}{|a_{n,1}|}$ при $n \to \infty$ для всіх $2 \leq j \leq m$, то ряд Діріхле (1) має R-порядок ϱ і R-тип $T_R[F] \leq \prod\limits_{j=1}^{m} T_R[F_j]^{\omega_j}$.*

З наслідку 3 випливає наступний наслідок.

Наслідок 4. *Нехай $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, а цілі функції $f_j(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k,j} z^k$ $(2 \leq j \leq m)$ мають однаковий порядок $\varrho[f_j] = \varrho \in (0, +\infty)$ і типи $\sigma[f_j] \in (0, +\infty)$. Припустимо, що $|a_n| = (1 + o(1)) \prod\limits_{j=1}^{m} |a_{n,j}|^{\omega_j}$ при $n \to \infty$, де ω_j — додатні числа і $\sum\limits_{j=1}^{m} \omega_j = 1$. Тоді, якщо $a_{n,1} \neq 0$ для всіх $n \geq n_0$ і $\ln \dfrac{1}{|a_{n,j}|} \leq (1 + o(1)) \ln \dfrac{1}{|a_{n,1}|}$ при $n \to \infty$ для всіх $2 \leq j \leq m$, то $\varrho[f] = \varrho$ і $\sigma[f] \leq \prod\limits_{j=1}^{m} \sigma[f_j]^{\lambda_j}$.*

Зауважимо, що якщо $|a_{n,j}| \geq |a_{n,1}|/l_j(1/|a_{n,1}|)$, де l_j — повільно змінні функції, то $\ln l_j(x) = o(\ln x)$ при $x \to +\infty$ і, отже, $\ln \dfrac{1}{|a_{n,j}|} \leq (1 + o(1)) \ln \dfrac{1}{|a_{n,1}|}$ при $n \to \infty$.

Тому за умов $n = 2$ і $\omega_j = 1/2$ з наслідку 4 випливає теорема Б.

3 Цілі ряди Діріхле скінченного модифікованого узагальненого порядку

Неперервної диференційовності функцій α та β і умов на похідну функції $\beta^{-1}(c\alpha(x))$ у доведених вище теоремах можна позбутись, якщо дещо модифікувати узагальнені порядки.

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ модифікованими узагальненими R-порядком $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$ і нижнім R-порядком $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[F]$ цілого ряду Діріхле (1) називаються величини

$$\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right), \qquad \overline{\lambda}_{\alpha,\beta}[F] = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right).$$

В [2] отримано наступний результат.

Лема 3. *Нехай або $\alpha \in L_{\Pi 3}$ і $\beta \in L^0$, або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\Pi 3}$, і для кожного $c \in (0,+\infty)$ виконується $\ln n = o(\lambda_n\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ $(n\to\infty)$. Тоді $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] = k_{\alpha,\beta}[F]$, а якщо крім цього $\dfrac{\ln|a_n| - \ln|a_{n+1}|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} \nearrow +\infty$ при $n_0 \le n \to \infty$ і $\dfrac{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_{n+1}))}{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n))} \to 1$ при $n\to\infty$, то $\overline{\lambda}_{\alpha,\beta}[F] = k_{\alpha,\beta}[F]$.*

Для модифікованих узагальнених порядків правильна наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай або $\alpha \in L_{\Pi 3}$ і $\beta \in L^0$, або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\Pi 3}$, а цілі ряди Діріхле (2) мають модифіковані узагальнені порядки $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j] \in (0,+\infty)$ і $\ln n = o(\lambda_n\beta^{-1}(\alpha^c(\lambda_n)))$ $(n\to\infty)$ для кожного $c\in(0,+\infty)$. Припустимо, що коефіцієнти цілого ряду Діріхле (1) задовольняють умову*

$$\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right) = (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)^{\omega_j}, \quad n\to\infty, \tag{9}$$

де ω_j — додатні числа і $\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j = 1$. Тоді:

1) якщо $|a_{n,1}| > 0$ і

$$\ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right) \le (1+o(1))\ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,1}|}\right), \quad j=2,3,\dots,m, \tag{10}$$

при $n\to\infty$, то

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\ln\beta(\sigma)}\ln\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right) = 1 \tag{11}$$

і $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] \le \prod\limits_{j=1}^{m}\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$;

2) якщо $\dfrac{\ln|a_{n,j}| - \ln|a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} \nearrow +\infty$ при $n_0\le n\to\infty$ і $\dfrac{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_{n+1}))}{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n))} \to 1$ при $n\to\infty$ для кожних $c\in(0,+\infty)$ та $j=1,2,\dots,m$, а функції F_j мають регулярне модифіковане $\alpha\beta$-зростання, тобто $\overline{\lambda}_{\alpha,\beta}[F_j] = \overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]$, то функція F має регулярне модифіковане $\alpha\beta$-зростання і $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] = \prod\limits_{j=1}^{m}\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$.

Доведення. Оскільки $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j] \in (0,+\infty)$, то $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{1}{\ln \beta(\sigma)} \ln \alpha\left(\dfrac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right)$. Відомо [5], що якщо $h \in L^0$, то h є RO-зростаючою функцією [4, с. 86], тобто для кожного $l \in [1,+\infty)$ і всіх $x \geq x_0$ правильна нерівність $1 \leq h(lx)/h(x) \leq M(l) < +\infty$, звідки випливає, що $\ln h \in L_{\text{пз}}$. Тому, використовуючи лему 3 з $\ln\alpha$ і $\ln\beta$ замість α і β, за умови $\ln n = o(\lambda_n\beta^{-1}(\alpha^c(\lambda_n)))$ $(n\to\infty)$ для кожного $c \in (0,+\infty)$ отримуємо рівність

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\ln \alpha(n)} \ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right) = 1$$

для кожного $j = 1,2,\ldots,m$, а з огляду на (9)

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\ln \alpha(n)} \ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right) &= \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\ln \alpha(n)} \sum_{j=1}^{m} \omega_j \ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\\ &\geq \sum_{j=1}^{m} \omega_j \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\ln \alpha(n)} \ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right) = 1.\end{aligned}$$

З іншого боку, з огляду на (10)

$$\begin{aligned}&\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\ln \alpha(n)} \ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)\\ &\quad= \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\ln \alpha(n)} \left(\omega_1 \ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,1}|}\right) + \sum_{j=2}^{m} \omega_j \ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)\\ &\quad\leq \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\ln \alpha(n)} \sum_{j=1}^{m} \omega_j \ln\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,1}|}\right) = 1,\end{aligned}$$

тобто $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\alpha(n)}{\ln\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)} = 1$ і за лемою 3 правильна рівність (11).

Далі, оскільки з умови $\ln n = o(\lambda_n\beta^{-1}(\alpha^c(\lambda_n)))$ $(n\to\infty)$ для кожного $c \in (0,+\infty)$ випливає умова $\ln n = o(\lambda_n\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ $(n\to\infty)$ для кожного $c \in (0,+\infty)$, то за лемою 3 з (9) маємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[f]} &= \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha(n)}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right) = \varliminf_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\alpha(n)}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n^{(j)}|}\right)\right)^{\omega_j}\\ &\geq \prod_{j=1}^{m} \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha(n)}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n^{(j)}|}\right)\right)^{\omega_j} = \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]}\right)^{\omega_j},\end{aligned}$$

тобто отримуємо нерівність $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] \leq \prod\limits_{j=1}^{m} \overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$. Твердження 1) доведено.

Оскільки $\overline{\lambda}_{\alpha,\beta}[F_j] = \overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]$, то за лемою 3 маємо $\dfrac{1}{\alpha(n)}\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|a_{n,j}|}\right) \to \dfrac{1}{\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]}$ при $n\to\infty$ для кожного $j = 1,2,\ldots,m$. Тому з (9) отримуємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha(n)}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right) &= (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\alpha(n)}\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right)\right)^{\omega_j}\\ &= (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F_j]}\right)^{\omega_j}, \quad n\to\infty,\end{aligned}$$

звідки за лемою 3 випливає, що функція F має регулярне модифіковане $\alpha\beta$-зростання і правильна рівність $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] = \prod\limits_{j=1}^{m} \overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$. Теорему 3 повністю доведено. $\square$

Якщо виберемо $\alpha(x) = \beta(x) = \ln x$, то $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\ln\sigma} - 1 = \varrho_l[F] - 1$, де $\varrho_l[F]$ називається логарифмічним порядком. Зрозуміло, що $\varrho_l[F] \geq 1$, а функції $\alpha(x) = \beta(x) = \ln x$ не задовольняють умови леми 1 і застосувати теорему 1 у цьому випадку неможливо. Проте, застосовуючи теорему 3, прийдемо до наступного наслідку.

Наслідок 5. *Нехай цілі ряди Діріхле* (2) *мають логарифмічні порядки* $\varrho_l[F_j] \in (1,+\infty)$ *і* $\ln n = o(\lambda_n \ln\lambda_n)$ $(n\to\infty)$. *Припустимо, що коефіцієнти цілого ряду Діріхле* (1) *задовольняють умову*

$$\ln\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right) = (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\ln^{\omega_j}\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right), \quad n\to\infty, \tag{12}$$

де ω_j *— додатні числа і* $\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j = 1$. *Тоді:*

1) якщо $|a_{n,1}| > 0$ *і*

$$\ln\ln\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,j}|}\right) \geq (1+o(1))\ln\ln\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_{n,1}|}\right), \quad n\to\infty, \tag{13}$$

для всіх $j = 2,3,\ldots,m$, *то* $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty}\dfrac{\ln\ln\ln M(\sigma,F)}{\ln\ln\sigma} = 1$ *і* $\varrho_l[F] - 1 \leq \prod\limits_{j=1}^{m}(\varrho_l[F_j]-1)^{\omega_j}$;

2) якщо $\dfrac{\ln|a_{n,j}| - \ln|a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} \nearrow +\infty$ *при* $n_0 \leq n \to \infty$ *для всіх* $j = 1,2,\ldots,m$ *і* $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to 1$ *при* $n\to\infty$ *а функції* F_j *мають регулярне логарифмічне зростання, то функція* F *має регулярне логарифмічне зростання і* $\varrho_l[F] - 1 = \prod\limits_{j=1}^{m}(\varrho_l[F_j]-1)^{\omega_j}$.

Справді, з умови $\ln n = o(\lambda_n\ln\lambda_n)$ $(n\to\infty)$ випливає умова $\ln n = o(\lambda_n\exp\{\ln^c\lambda_n\}$, $(n\to\infty)$, а з умови $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\to 1$ $(n\to\infty)$ — умова

$$\frac{\exp\{c\ln\lambda_{n+1}\}}{\exp\{c\ln\lambda_n\}} \to 1, \quad (n\to\infty),$$

а оскільки $\varrho_l[F] > 1$, то рівності

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln\ln M(\sigma,F)}{\ln\ln\sigma} = 1$$

і

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\ln\ln\sigma}\ln\ln\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma} = 1$$

є рівносильними. Тому з теореми 3 легко отримуємо висновки наслідку 5.

Якщо ж виберемо $\alpha(x) = x$ і $\beta(x) = \ln x$, то $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = T[F] =: \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty}\dfrac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma\ln\sigma}$ і $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[F] = t[F] =: \varliminf\limits_{\sigma\to+\infty}\dfrac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma\ln\sigma}$, а з теореми 3 отримуємо наступне твердження.

Наслідок 6. *Нехай для цілих рядів Діріхле* (2) $T[F_j] \in (0, +\infty)$ *і* $\ln n = o(\lambda_n^2)$ $(n \to \infty)$. *Припустимо, що коефіцієнти цілого ряду Діріхле* (1) *задовольняють умову* (12). *Тоді:*

1) якщо $|a_{n,1}| > 0$ *і виконується умова* (13), *то* $\varrho_l[F] = 1$ *і* $T[F] \leq \prod_{j=1}^{m} T[F_j]^{\omega_j}$;

2) якщо $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\dfrac{\ln |a_{n,j}| - \ln |a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$ *при* $n_0 \leq n \to \infty$ *і* $t[F_j] = T[F_j]$ *для всіх* $j = 1, 2, \ldots, m$, *то* $t[F] = T[F] = \prod_{j=1}^{m} T[F_j]^{\omega_j}$.

References

[1] Calys E.G. *A note on the order and type of integral functions.* Riv. Mat. Univ. Parma 1964, 5, 133–137.

[2] Kulyavetc' L.V., Sheremeta M.M. *On modified generalized order of entire Dirichlet series and characteristic functions of probablity laws.* Bull. Lviv Univ., Series Mech.-Math. 2012, 77, 124–131. (in Ukrainian)

[3] Sheremeta M.M. Asymptotic property of entire functions, represented by power series and Dirichlet series. Abstract of doct. diss., Kyiv, 1987. (in Russian)

[4] Srivastava R.S.L. *On the order and type of integral functions.* Riv. Mat. Univ. Parma 1959, 10, 249–255.

[5] Srivastava R.S.L. *On the order and type of integral functions.* Riv. Mat. Univ. Parma 1961, 2, 265–270.

Надійшло 12.03.2014

Kulyavetc' L.V., Mulyava O.M. *On the growth of a klasss of entire Dirichlet series.* Carpathian Math. Publ. 2014, 6 (2), 300–309.

In terms of generalized orders it is investigated a relation between the growth of an entire Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ and the growth of entire Dirichlet series $F_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \exp\{s\lambda_n\}$, $1 \leq j \leq 2$, provided the coefficients a_n are connected with the coefficients $a_{n,j}$ by some correlations.

Key words and phrases: Dirichlet series, generalized order.

Кулявец Л.В., Мулява О.М. *О росте одного класса целых рядов Дирихле* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 300–309.

В терминах обобщенных порядков исследована связь между ростом целого ряда Дирихле $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ и ростом целых рядов Дирихле $F_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \exp\{s\lambda_n\}$, $1 \leq j \leq 2$, если коэффициенты a_n связаны с коэффициентами $a_{n,j}$ некоторыми соотношениями.

Ключевые слова и фразы: ряд Дирихле, обобщённый порядок.