УДК 004.4

Чорнобай К. Ю.
студентка гр. ІС-1-4М, кафедра інформаційних систем,
Національний університет харчових технологій, м. Київ, Україна

Сєдих О. Л.
старший викладач кафедри інформатики,
Національний університет харчових технологій, м. Київ, Україна

ЗАДАЧА ПОШУКУ НАЙКОРОТШОГО ШЛЯХУ

Для представлення різних технічних об'єктів, опису процесів і функціонування систем часто використовуються графові моделі. До моделі у вигляді графа можна звести і багато практичних економічні завдання.

До таких проблем відноситься задача пошуку найкоротшого шляху в заданій транспортній системі, задачі про розподіл потоку в мережі, мережеві моделі планування послідовності робіт, задача комівояжера та інші.

У загальному вигляді задача формулюється наступним чином. Є деяка кількість пунктів, з'єднаних певним чином одно- або двонаправленими зв'язками. Кожна зв'язок має певне значення - довжину. Потрібно знайти найкоротший шлях з пункту N_1 в пункт N_n.

При розробці математичної моделі задачі необхідно враховувати, що маршрут повинен бути безперервним, а кожен проміжний пункт на шляху проходження може бути відвіданий один раз. Транспортна система в задачі є орієнтованим графом, де N_1 - вхід, N_n - вихід, вагові коефіцієнти c_{ij} ребер g_{ij} є довжинами шляху між пунктами *i* та *j*, потрібно визначити найкоротший шлях з N_1 в N_n. Зіставимо кожному ребру графа булеву змінну, тобто $g_{ij} \in \{0, 1\}$. Якщо ребро входить у маршрут, то $g_{ij} = 1$, інакше $g_{ij} = 0$. Тоді цільова функція (1), яка мінімізується при пошуку найкоротшого шляху, має вигляд:

$$F = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot g_{ij} \to \min \qquad (1)$$

Всі пункти маршруту можна розділити на початковий, проміжний і кінцевий. Очевидно, що в кожному проміжному пункті має бути по одному вхідному і вихідному ребру, а для початкового та кінцевого пунктів може бути тільки одне ребро, що виходить або входить відповідно. Математично ці обмеження можуть бути записані таким чином:

- для перерахування всіх k, що входять в і-ий пункт маршруту ребер:

$$\sum_k g_{ki} = 1, i = 2,...n; \qquad (2)$$

- для перерахування усіх j, що виходять із і-го пункту ребер:

$$\sum_i g_{ij} = 1, i = 1,...n-1 \qquad (3)$$

Якщо ж *i* пункт не входить в найкоротший маршрут, то відповідна сума як для вхідних, так і вихідних із вершини графа ребер повинна дорівнювати нулю. Тоді для будь-якого пункту мережі, окрім початкового і кінцевого, має виконуватися умова:

$$\sum_k g_{ki} - \sum_j g_{ij} = 0 \qquad (4)$$

У початковому пункті - $\sum_j g_{1j} = 1$, в кінцевому - $\sum_k g_{kn} = 1$ і $g_{ij} \geq 0$ для всіх *i* та *j*. Через зазначених вище обмежень в рішенні можуть бути отримані тільки значення нуля або одиниці. Таким чином, ми отримали звичайну задачу лінійного програмування.

Нехай потрібно знайти найкоротший маршрут з пункту А в пункт В, якщо схема руху і відстані між об'єктами задані на рис. 1.

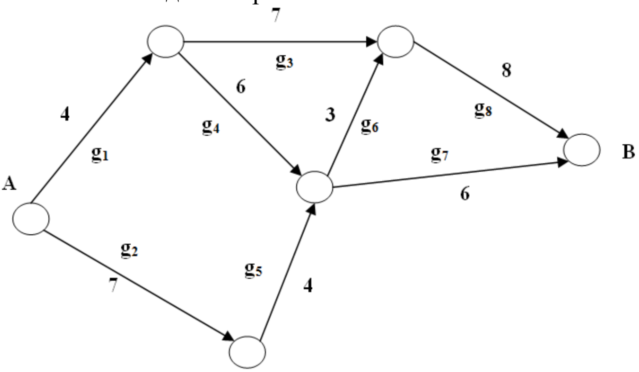

Рис.1. Загальний вигляд орієнтованого графу задачі про найкоротший маршрут

Розглянемо рішення цієї задачі за допомогою функції *Maximize* [1] в середовищі МП MathCAD.

$ORIGIN := 1$

$f(g) := 4 \cdot g_1 + 7 \cdot g_2 + 7 \cdot g_3 + 6 \cdot g_4 + 4 \cdot g_5 + 3 \cdot g_6 + 6 \cdot g_7 + 8 \cdot g_8$

$g_1 := 1 \quad g_2 := 1 \quad g_3 := 1 \quad g_4 := 1 \quad g_5 := 1 \quad g_6 := 1 \quad g_7 := 1 \quad g_8 := 1$

Given

$g_1 \geq 0 \quad g_2 \geq 0 \quad g_3 \geq 0 \quad g_4 \geq 0 \quad g_5 \geq 0 \quad g_6 \geq 0 \quad g_7 \geq 0 \quad g_8 \geq 0$

$g_1 + g_2 = 1 \quad g_1 = g_3 + g_4 \quad g_2 = g_5 \quad g_4 + g_5 = g_6 + g_7 \quad g_3 + g_6 = g_8 \quad g_7 + g_8 = 1$

$R := Minimize(f, g)$

$R^T = (1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0) \qquad f(R) = 16$

Рис.2. Рішення задачі про пошук найкоротшого маршруту в МП MathCAD

Найкоротший маршрут - ребра g_1, g_4,g_7.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов [Текст]/В.Ф. Очков. – СПб: БХВ-Петербург, 2007. – 368 с.