О МНОЖЕСТВАХ МОНОГЕННОСТИ И ОБ УСЛОВИЯХ АНАЛИТИЧНОСТИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ / Тар М.М., Трохимчук Ю.Ю., Сафонов В.М. - Киев, 1993.- 14с.-(Препр./ АН Украины. Ин-т математики;93.8).

Работа состоит из трех частей. В первой части рассматриваются множества симметрической моногенности и доказывается теорема о функциях с постоянным симметрическим растяжением. Во второй части приводится обобщение теоремы об аналитичности функций, обладающих в области свойством неполной моногенности. Третья часть работы посвящена достаточным условиям аналитичности функций комплексной переменной.

Библиогр.: 3 назв.

Рецензент канд.физ.-мат.наук С.В.Горленко

Утверждено к печати ученым советом
Института математики АН Украины

I. О ФУНКЦИЯХ С ПОСТОЯННЫМ СИММЕТРИЧЕСКИМ РАСТЯЖЕНИЕМ

Пусть функция $w = f(z)$ непрерывна в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$. Для каждого фиксированного $z \in \mathcal{D}$ будем рассматривать функцию

$$\varphi_z^{(s)}(h) = \frac{f(z+h) - f(z-h)}{2h} \qquad (z+h,\ z-h \in \mathcal{D}).$$

Число $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется симметрическим производным числом функции $f(z)$ в точке $z \in \mathcal{D}$, если найдется последовательность $\{h_n\}$, $h_n \to 0$ такая, что

$$\varphi_z^{(s)}(h_n) \longrightarrow a \quad (n \to \infty).$$

Множество производных чисел a назовем множеством симметрической моногенности функции $f(z)$ в точке $z \in \mathcal{D}$ и будем обозначать через $\mathfrak{M}_z^{(s)}(f)$ или $\mathfrak{M}_z^{(s)}$.

Если $\mathfrak{M}_z^{(s)}$ содержит единственную точку, то функция $f(z)$ имеет симметрическую производную.

Для множеств $\mathfrak{M}_z^{(s)}$ имеет место равенство Н.Н.Лузина:

$$\mathfrak{M}_z^{(s)} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\mathfrak{M}_\varepsilon^{(s)}(z)}, \qquad (1.1)$$

где $\mathfrak{M}_\varepsilon^{(s)}(z) = \varphi_z^{(s)}(Q_\varepsilon)$, $\quad Q_\varepsilon = \{h : 0 < |h| < \varepsilon\}$.

Из равенства (1.1) следует, что для непрерывной функции $f(z)$ множество $\mathfrak{M}_z^{(s)}$ (как и множество моногенности $\mathfrak{M}_z$) является континуумом или точкой на $\overline{\mathbb{C}}$.

Если функция $f(z)$ в точке $z = x + iy$ имеет полный дифференциал, то $\mathfrak{M}_z^{(s)} = \mathfrak{M}_z$; при этом множество $\mathfrak{M}_z^{(s)}$ является окружностью или одной точкой. (Утверждения доказывается аналогично теореме I [1]).

Теорема I. Пусть $w = f(z)$ – функция, непрерывная в области $\mathcal{D}$. Существует множество $E \subset \mathcal{D}$ всюду второй категории в $\mathcal{D}$ такое, что при $z \in E$

$$\mathfrak{M}_z^{(s)}(f) = \mathfrak{M}_z(f)$$

Доказательство. Покажем, что в точках $z \in E$ имеет место включение

$$\mathfrak{M}_z \subset \mathfrak{M}_z^{(s)}. \qquad (1.2)$$

Предположим противное. Тогда для точек $z \in M$ множества M не первой категории в некоторой подобласти $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ найдутся точки $a(z) \in \mathfrak{M}_z$ и $a(z) \bar{\in} \mathfrak{M}_z^{(s)}$.

Так как $\mathfrak{M}_z^{(s)}$ -замкнутое множество, то для каждого $z \in M$ найдется круг $K(z)$ с рациональным радиусом r и центром c такой, что

$$K(z) \cap \mathfrak{M}_z^{(s)} = \phi \quad \text{и} \quad a(z) \in K(z).$$

При этом, очевидно, можно считать, что расстояние от $a(z)$ до c не превышает $\frac{1}{2} r$. /В случае $a(z) = \infty$ рассуждения аналогичны/.

Множество кругов $K(z)$ не более чем счетное; обозначим его через $\{K_1, K_2, \dots\}$.

Полагая $M_j = \{z : z \in M,\ a(z) \in K_j,\ |a(z) - c_j| \le \frac{1}{2} r_j\}$, получим $M = \bigcup_j M_j$.

Так как M -не первой категории, то для некоторого $j = j_0$ соответствующее множество M_{j_0} -того же класса в некоторой подобласти $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_0$. В результате при $z \in M_{j_0}$ будем иметь

$$a(z) \in \mathfrak{M}_z \cap K_{j_0}, \qquad (1.3)$$

$$\mathfrak{M}_z^{(s)} \cap K_{j_0} = \phi \qquad (1.4)$$

Рассмотрим множества $M_{j_0}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \dots)$ точек $z \in M_{j_0}$, для которых при $0 < |h| < \frac{1}{n}$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z-h)}{2h} - c_0 \right| \ge \frac{2}{3} r_0, \qquad (1.5)$$

где c_0 -центр круга K_{j_0}, r_0 -радиус.

Из условия (1.4) и замкнутости $\mathfrak{M}_z^{(s)}$ следует, что $M_{j_0} = \bigcup_n M_{j_0}^{(n)}$. Аналогично, как и выше, находим множество $M_{j_0}^{(n_0)}$, всюду плотное в некоторой подобласти $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$. При этом для каждого $z \in M_{j_0}^{(n_0)}$ и h, $0 < |h| < \frac{1}{n_0}$, имеет место (1.5).

Полагая $z_1 = z + h$, $z_2 = z - h$, в силу непрерывности функции $f(z)$ для всех $z_1, z_2 \in \mathcal{D}_2$ при $0 < |z_1 - z_2| < \frac{1}{n_0}$ будем иметь:

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} - c_0 \right| \geq \frac{2}{3} r_0 . \qquad (1.6)$$

Неравенство (1.6), очевидно, справедливо для любого круга $K \subset \mathcal{D}_2$ диаметра $d < \frac{1}{n_0}$. Отсюда следует, что при $z \in K$ множество $\mathcal{M}_z$ не пересекается с кругом $K_{j_0}^* = \{ |\zeta - c_0| < \frac{2}{3} r_0 \}$. Но это противоречит условию (1.3) и неравенству $|a(z) - c_0| \leq \frac{1}{2} r_0$ при $z \in M_{j_0}^{(n_0)} \subset M_{j_0}$.

Следовательно, включение (1.2) доказано. Аналогично убеждаемся в справедливости обратного включения.

Следуя методу доказательства из [1], можно получить следующий аналог первого утверждения теоремы I2 [1].

Теорема 2. Пусть $w = f(z)$ -непрерывное отображение области $\mathcal{D}$, обладающее постоянным симметрическим растяжением

$$\rho_s(z) = \lim_{h \to 0} |\varphi_z^{(s)}(h)| ;$$

и пусть $\rho_s(z) \neq 0, \infty$ в точках $z \in \mathcal{D} \setminus A$, где A - множество первой категории.

Тогда существует всюду плотное в области $\mathcal{D}$ открытое множество G, в каждой компоненте которого либо функция $f(z)$, либо ей сопряженная $\overline{f(z)}$ является аналитической.

Предположим далее, что непрерывная функция $f(z)$ в некоторых точках $z \in \mathcal{D}$ обладает постоянным растяжением вида:

$$\rho_s^*(z) = \lim_{h \to 0} \frac{|f(z + |h| e^{i\alpha_1}) - f(z - |h| e^{i\alpha_2})|}{2|h|} ,$$

где предел существует для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и для любых функций $\alpha_1(h) \to \alpha$, $\alpha_2(h) \to \alpha$ (при $h \to 0$).

Имеет место следующее утверждение.

Л е м м а 1. Пусть $w = f(z)$ –функция, однолистная в окрестности точки $z_0 \in \mathcal{D}$, обладающая постоянным растяжением $\rho_s^*(z_0)$. Если обратная функция $z = g(w)$ в точке $w_0 = f(z_0)$ имеет полный дифференциал и $0 \in \mathfrak{M}_{w_0}(g)$, то существует производная $g'(w_0) = 0$.

Доказательство. Пусть найдется число $\tau_0 \in \mathfrak{M}_{w_0}(g)$, $\tau_0 \neq 0$. Тогда, как известно, для некоторого ω_0 при $\operatorname{Arg}(w - w_0) = \omega_0$, $\omega_0 + \pi$ имеет место равенство

$$\tau_0 = \lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0}.$$

Пусть t_1 и t_2 –соответственно образы лучей $\ell_1' = \{w : \operatorname{Arg}(w - w_0) = \omega_0\}$ и $\ell_2' = \{w : \operatorname{Arg}(w - w_0) = \omega_0 + \pi\}$ при отображении $z = g(w)$.

Из доказательства леммы [2] следует, что кривые t_1 и t_2 в точке z_0 имеют полукасательные, образующие некоторую прямую.

При $z = g(w) \in t_1, t_2$ имеем

$$\lim_{w \to w_0} \frac{w - w_0}{g(w) - g(w_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0} = \frac{1}{\tau_0} \neq \infty.$$

Положим: $|z - z_0| = |z' - z_0| = |h|$, $z - z_0 = |h| e^{i\alpha_1}$, $z' - z_0 = -|h| e^{i\alpha_2}$ где $z \in t_1$, $z' \in t_2$. Тогда найдется α такое, что $\lim \alpha_1 = \lim \alpha_2 = \alpha$ при $z, z' \to z_0$. Учитывая, что при $z \in t_1$, $z' \in t_2$ справедливо равенство

$$\lim_{z \to z_0} \operatorname{Arg}[f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \to z_0} \operatorname{Arg}[-(f(z') - f(z_0))],$$

получим:

$$\rho_s^*(z_0) = \frac{1}{2} \lim_{|h| \to 0} \left| \frac{f(z_0 + |h| e^{i\alpha_1}) - f(z_0)}{|h|} - \frac{f(z_0 - |h| e^{i\alpha_2}) - f(z_0)}{|h|} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in t_1}} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| + \frac{1}{2} \lim_{\substack{z' \to z_0 \\ z' \in t_2}} \left| \frac{f(z') - f(z_0)}{z' - z_0} \right| =$$

$$= \frac{1}{2|\varsigma_0|} + \frac{1}{2|\varsigma_0|}.$$

Так как $\frac{1}{|\varsigma_0|}$ может принимать различные значения при $\varsigma_0 \in \mathfrak{M}_{w_2}(g)$, то отсюда следует, что $\rho_s^*(z_0)$ не существует.

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы 1.

Применяя лемму 1, можно доказать справедливость утверждения теоремы 2 и при условии существования $\rho_s^*(z) = \infty$ в точках множества второй категории $E \subset \mathcal{D}$.

2. ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ПОМПЕЙЮ-ТРОХИМЧУКА

Следующая теорема обобщает теорему об аналитичности функции, обладающей в области свойством неполной моногенности [1] и результат [8].

Теорема 3. Пусть $f(z)$ -функция, непрерывная в области $\mathcal{D}$. Предположим, что $\mathcal{D} = \bigcup_i E_i \ (i = 1, 2, \dots)$, причем $E_i \cap E_j = \phi$ при $i \neq j$. Если для каждого $i = 1, 2, \dots$ и $z \in E_i$ существует

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ z,\, z+h \in E_i}} Re \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \neq \infty, \qquad (2.1)$$

то функция $f(z)$ является аналитической в области $\mathcal{D}$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдется совершенное множество $P \subset \mathcal{D}$, в каждой точке которого функция $f(z)$ не является аналитической.

Рассмотрим множества

$$E_{i,n} = \left\{ z :\ z \in E_i \cap P,\ \left| \mathrm{Re}\ \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| \le n \right.$$

при $\left. 0 < |z' - z| < \frac{1}{n},\ \ z' \in E_i \cap P \right\}.$

Легко проверить равенство $P = \bigcup E_{i,n}$. При этом, в силу непрерывности функции $f(z)$, каждое из множеств $E_{i,n}$ замкнуто в P. Так как множество P – второй категории /в себе/, то для некоторых $i = i_0,\ n = n_0$ множество $E_{i_0, n_0} = E_0$ всюду плотно на некоторой порции P_0 множества P. При этом, очевидно, можно считать, что $P_0 = P \cap K_0$, где K_0 –круг, диаметр которого не превышает $\frac{1}{n_0}$.

Учитывая непрерывность функции $f(z)$, легко показать, что при $z, z' \in P_0$, $0 < |z' - z| < \frac{1}{n_0}$ имеет место неравенство

$$\left| \mathrm{Re}\ \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| \le n_0. \qquad (2.2)$$

Это означает, что множество моногенности $\mathfrak{M}_z(f; P_0)$ функции $f(z)$ в точке $z \in P_0$, полученное по множеству P_0, принадлежит полосе

$$S' = \{ \varsigma :\ -n_0 \le \mathrm{Re}\,\varsigma \le n_0 \}.$$

Возьмем функцию $f_1(z) = f(z) + 2 n_0 z$.
При $z \in P_0$ имеем: $\mathfrak{M}_z(f_1; P_0) \subset S_1 = \{ \varsigma :\ n_0 \le \mathrm{Re}\,\varsigma \le 3n_0 \}$.

Отсюда следует, что функция $f_1(z)$ однолистна на некоторой порции $P_0' \subset P_0$, $P_0' \ne \phi$. По теореме 9 [1] найдется область $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$, $P_0' \cap \mathcal{D}_1 = P_1 \ne \phi$, в которой функция $f_1(z)$ окажется однолистной.

В области $G = f_1(\mathcal{D}_1)$ рассмотрим функцию $g_1(w)$, обратную к $f_1(z)$. При $w \in P_1^* = f_1(P_1)$ ее множества моногенности $\mathfrak{M}_w(g_1; P_1^*)$ /по множеству P_1^* /принадлежит замкнутой области $\bar{Q} = \bar{K_1} \setminus K_2$, где $K_1 \supset K_2$; K_1, K_2 –некоторые круги, граница которых содержит точку $\varsigma = 0$.

Поэтому, применяя теорему 9 [1], находим $\tau_0 \in K_2$ и подобласть $\Delta \subset G$, $P^* = \Delta \cap P_1^* \neq \phi$, в которой функция $g_2(w) = g_1(w) - \tau_0 \cdot w$ окажется однолистной.

В силу ограниченности множеств $\mathfrak{M}_w(g_2; P^*)$ (при $w \in P^*$) найдется подобласть $\Delta_1 \subset \Delta \subset G$ такая, что на множестве $\tilde{P} = P^* \cap \Delta_1 \neq \phi$ функция $g_2(w)$ удовлетворяет условию Липшица. Отсюда следует, что функция $g_2(w)$ (или $g_1(w)$) имеет относительный полный дифференциал почти всюду на множестве $\tilde{P}$, т.е. на множестве $M_0 \subset \tilde{P}$, $mes\, M_0 = mes\, \tilde{P}$.

Покажем, что функция $g_2(w)$ (или $g_1(w)$) является моногенной почти всюду на множестве M_0.

Совершенно аналогично, как и в доказательстве леммы 49 [1], можно доказать, что функция $g_2(w)$ имеет обычный полный дифференциал на множестве R_0, $mes\, R_0 = mes\, M_0$. Множество $F_i = R_0 \cap f_1(E_i)$ почти в каждой своей точке в качестве контингенции имеет полную плоскость; обозначим это множество через Q_i.

Достаточно доказать, что для каждого i при $w_0 \in Q_i$ функция $g_1(w)$ моногенна. Рассмотрим два возможных случая.

А. $\mathfrak{M}_{w_0}(g_1)$ не содержит точку $\tau = 0$. Тогда по лемме 37 [1] функция $f_1(z)$ в точке $z_0 = g_1(w_0)$ тоже имеет полный дифференциал, и, значит, ее множество моногенности $\mathfrak{M}_{z_0}(f_1)$ – окружность.

Из условий $0 \bar{\in} \mathfrak{M}_{w_0}(g_1)$, дифференцируемости функции $g_1(w)$ в точке w_0 и ее однолистности следует, что контингенция множества E_i в точке z_0 содержит по крайней мере три полукасательные, не лежащие на одной прямой. Поэтому множество $\mathfrak{M}_{z_0}(f_1)$ содержит три точки, не лежащие на одной прямой.

С другой стороны, существование предела (2.1) для функции $f_1(z)$ означает, что ее множество моногенности $\mathfrak{M}_{z_0}(f_1; E_i)$ принадлежит вертикальной прямой. Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{M}_{z_0}(f_1)$ – одна точка, т.е. существует $f_1'(z_0)$.

B. Пусть окружность $\mathfrak{M}_{w_0}(g_1)$ содержит точку $\zeta=0$. Тогда множество $\mathfrak{M}_{w_0}(g_2)$ зацепляет начало координат. Отсюда следует, что однолистное отображение $g_2(w)$ обращает ориентацию области Δ_1. Но это противоречит аналитичности функции $g_2(w)$ на открытом множестве $\Delta_1 \setminus \widetilde{P}$.

Таким образом, мы доказали, что однолистная функция $g_2(w)$ моногенна почти всюду на области Δ_1, удовлетворяет условию Липшица на множестве $\widetilde{P} \subset \Delta_1$. На основании леммы II [1] функция $g_2(w)$ должна быть аналитической всюду в области Δ_1, что противоречит определению множества $\widetilde{P} \neq \phi$.

Теорема доказана.

Заметим, что утверждение теоремы 3 будет иметь место и в случае, если предел (2.1) заменить следующим:

$$\lim_{\Delta z\to 0} \operatorname{Im} \frac{\Delta f}{\Delta z} \quad \text{при} \quad z,\ z+\Delta z \in E_i .$$

3. О НЕКОТОРЫХ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ АНАЛИТИЧНОСТИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть $f(z)$ -функция, непрерывная в области $\mathfrak{D}$. Введем следующие обозначения:

$$\varphi_z(h) = \frac{f(z+h) - f(z)}{h}; \quad \mathfrak{M}_\varepsilon(z) = \varphi_z(Q_\varepsilon),$$

где $Q_\varepsilon = \{h : 0 < |h| < \varepsilon\}$.

Функция $\varphi_z(h)$ непрерывна в области Q_ε, где $\varepsilon \leqslant \rho(z, \partial\mathfrak{D})$.

Теорема 4. Пусть $w = f(z)$ -нелинейная функция, аналитическая в области $\mathfrak{D}$. Тогда для любого совершенного множества $P \subset \mathfrak{D}$ найдется порция $P_0 \subset P$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при $z \in P_0$

$$f'(z) \overline{\in} \mathfrak{M}_{\varepsilon_0}(z). \qquad (3.1)$$

Доказательство. Для каждого фиксированного $z \in \mathfrak{D}$ рассмотрим функцию $\varphi_z(h)$, аналитическую в окрестности точки $h=0$, причем $\varphi_z(0) = f'(z)$.

Через G_ε обозначим множество точек $z \in \mathcal{D}$, для которых $\exists h \in Q_\varepsilon$ такое, что $\varphi_z(0) = \varphi_z(h)$ или же $f'(z) \in \mathfrak{M}_\varepsilon(z)$. Покажем, что каждое из множеств G_ε $(\varepsilon > 0)$ открыто в $\mathcal{D}$.

Пусть $z_0 \in G_\varepsilon$. Тогда $\exists h_0 \in Q_\varepsilon$ такое, что $\varphi_{z_0}(h_0) = f'(z_0)$. Выделим окрестность $S_{z_0} \subset Q_\varepsilon$ точки h_0, которую функция $\varphi_{z_0}(h)$ отобразит на достаточно малую окрестность V_0 точки $w_0 = f'(z_0)$.

Функция $f'(z) \neq const$ в силу непрерывности некоторую окрестность $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{D}$ точки z_0 отобразит на V_0.

Учитывая еще непрерывность $\varphi_z(h)$ как функции переменной z (при фиксированном h), $\forall z$ из некоторой окрестности $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0$ находим область $S_z \subset Q_\varepsilon$ такую, что

$$\varphi_z(S_z) = V_0 \quad . \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует, что $\forall z \in \mathcal{U}_1 \ \exists h \in Q_\varepsilon$ такое, что $\varphi_z(h) = f'(z)$. Это и означает, что G_ε – открытое множество.

На основании теоремы единственности для аналитической функции $\exists \ \varepsilon = \varepsilon(z) > 0$ такое, что при $z \in P$ $\varphi_z(0) \overline{\in} \mathfrak{M}_\varepsilon(z)$. Так как множество P – второй категории /в себе/, то $\exists$ множество $E \subset P$, всюду плотное на некоторой порции $P_0 \subset P$, и $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $z \in P_0$ $\varphi_z(0) \overline{\in} \mathfrak{M}_{\varepsilon_0}(z)$.

При этом можно считать, что $\overline{P}_0 \subset \mathcal{D}$. Так как G_ε – открытое множество, то отсюда следует, что $E' \subset E$. Значит, E – замкнутое и всюду плотное на P_0 множество, т.е. $E \subset P_0$. Теорема доказана.

Легко видеть, что утверждение теоремы 4 справедливо и для замкнутого множества $P \subset \mathcal{D}$.

Так как для моногенной функции $f(z)$ $\mathfrak{M}_z(f) = \{f'(z)\}$, то условие (3.1) можно записать в виде

$$\mathfrak{M}_z \cap \mathfrak{M}_\varepsilon(z) = \emptyset . \tag{3.1'}$$

Условие (3.1') с дополнительным ограничением является не только необходимым, но и достаточным для аналитичности нелинейной функции.

Теорема 5. Пусть $f(z)$ -нелинейная функция, непрерывная в области $\mathcal{D}$. Предположим, что:

а/ $\forall$ замкнутого множества $P \subset \mathcal{D}$ $\exists$ порция $P_0 \subset P$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при $z \in P_0$ $\mathfrak{M}_z(f) \cap \mathfrak{M}_{\varepsilon_0}(z) = \phi$,

б/ множества $\mathfrak{M}_z(f)$ $(z \in \mathcal{D})$ не являются полными окружностями. Тогда функция $f(z)$ аналитична в области $\mathcal{D}$.

Доказательство. Покажем, что функция $f(z)$ аналитична в любой подобласти $\mathcal{D}_0$, $\overline{\mathcal{D}_0} \subset \mathcal{D}$. Предположим противное. Тогда найдется совершенное множество $P \subset \mathcal{D}_0$, в точках которого функция $f(z)$ не является аналитической.

Выделим порцию $P_0 \subset P$ и $\varepsilon_0 > 0$, для которых имеет место условие а/. Возьмем порцию $P_1 \subset P_0$ такую, что $P_1 = P \cap K_\varepsilon$, где K_ε -круг радиуса $\varepsilon < \min\{\rho_0, \varepsilon_0\}$, $\rho(K_\varepsilon, \partial\mathcal{D}) \geq \varepsilon$.

Для каждого фиксированного $z \in K_\varepsilon$ рассмотрим функцию $\varphi_z(h)$, $0 < |h| < \varepsilon$. При $|h+t| < \varepsilon$ для фиксированного h имеем:

$$\frac{\varphi_z(h+t) - \varphi_z(h)}{t} = \frac{1}{t}\left[\frac{f(z+h+t) - f(z)}{h+t} - \right.$$

$$\left. - \frac{f(z+h) - f(z)}{h}\right] = \frac{1}{t\,h(h+t)}\left\{\left[f(z+h+t) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f(z+h)\right] h - \left[f(z+h) - f(z)\right] t\right\} = \frac{f(z+h+t) - f(z+h)}{t(h+t)} -$$

$$- \frac{f(z+h) - f(z)}{h(h+t)}$$

Отсюда следует, что любое производное число $\omega(\varphi_z, h)$ функции $\varphi_z(h)$ в точке h определяется равенством

$$\omega(\varphi_z; h) = \frac{1}{h}\,\omega(f, z+h) - \frac{1}{h}\,\varphi_z(h).$$

Для соответствующих множеств моногенности имеем символическую формулу

$$\mathfrak{M}_h(\varphi_z) = \frac{1}{h}\left[\mathfrak{M}_{z+h}(f) - \varphi_z(h)\right]. \qquad (3.3)$$

Покажем, что $\forall h$, $0<|h|<\varepsilon$ и $z+h \in P_1$ $0 \,\bar{\in}\, \mathfrak{M}_h(\varphi_z)$. В противном случае $\exists h$ такое, что

$$\varphi_z(h) \in \mathfrak{M}_{z+h}(f) \quad \text{или же}$$

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \in \mathfrak{M}_{z+h}(f).$$

Полагая $z+h = z'$, отсюда получим

$$\frac{f(z)-f(z')}{z-z'} \in \mathfrak{M}_{z'}(f), \text{ причем } 0<|z-z'|<\varepsilon,\; z' \in P_1$$

Но это противоречит условию а/ теоремы.

Обозначим: $P_\varepsilon' = \{h : h \in Q_\varepsilon,\; z+h \in P_1\}$.

В точках $h \in Q_\varepsilon \setminus P_\varepsilon^1$ функция $\varphi_z(h)$ аналитична. Учитывая еще, что $0 \,\bar{\in}\, \mathfrak{M}_h(\varphi_z)$ при $h \in P_\varepsilon^1$, легко доказать, что функция $\varphi_z(h)$ осуществляет внутреннее отображение области Q_ε.

Возьмем множество $S = \{(z+h) : z \in \bar{K}_\varepsilon,\; |h| = \varepsilon\}$. Так как функция $\varphi_z(h)$ непрерывная на замкнутом множестве S /как функция двух переменных z и h /, то $\exists\; m>0$ такое, что при $z+h \in S$

$$|\varphi_z(h)| \leq m \qquad (3.4)$$

Из условия $\mathfrak{M}_z \cap \mathfrak{M}_\varepsilon(z) = \phi$ следует, что $\mathfrak{M}_z$ — не полная плоскость. Учитывая еще условие б/ теоремы, получим, что функция $f(z)$ моногенна почти всюду в круге K_ε; обозначим это множество через E