

ISSN 2304-974X

Ministry of Education and Science,
Youth and Sports of Ukraine

Міністерство освіти і науки,
молоді та спорту України

NATIONAL UNIVERSITY
OF FOOD TECHNOLOGIES

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

UKRAINIAN FOOD JOURNAL

Volume 2, Issue 1
2013

Київ

2013

Київ

Ukrainian Food Journal is an international scientific journal that publishes innovative papers of expert in the fields of food science, engineering and technology, chemistry, economics and management.

The advantage of research results publication available to students, graduate students, young scientists.

Manuscripts of articles are reviewed by leading scientists and experts of respective areas.

Users of the journal are scientists, teachers, engineers and managers of the food industry.

Ukrainian Food Journal – міжнародне наукове періодичне видання для публікації результатів досліджень фахівців у галузі харчової науки, техніки та технології, хімії, економіки і управління.

Перевага в публікації результатів досліджень надається студентам, аспірантам та молодим вченим.

Рукописи статей рецензують провідні вчені та спеціалісти відповідних галузей.

Для науковців, викладачів, інженерно-технічних працівників та керівників підприємств харчової промисловості.

Editorial office address:

National University
of Food Technologies
Volodymyrska st., 68
Ukraine, Kyiv 01601

Адреса редакції:

Національний університет
харчових технологій
вул. Володимирська, 68
Київ 01601

e-mail: ufj_nuft@meta.ua

*Scientific Council of the National University
of Food Technologies
recommends the journal by printing.
Minutes № 4, 29.11.2012*

*Рекомендовано вченою радою
Національного університету
харчових технологій
Протокол № 4 від 29.11.2012 р.*

Processes and equipment of food productions

Igor Kirik, Svetlana Vasilevskaya
Results of experimental researches of the process of infra-red heating in thermal household devices

86

Olga Seidykh, Svitlana Makovetska
The tangent plane and the normal line construction with the use of the MathCad mathematical package

94

Nikolai Menkov, Ivan Ianchev, Kirill Munde
Experimental determination of the increase of moisture nuts

100

Процеси та обладнання харчових виробництв

Игорь Кирик, Светлана Василевская
Результаты экспериментальных исследований процесса инфракрасного нагрева в бытовых тепловых аппаратах

Ольга Седих, Світлана Маковецька
Комп'ютерна підтримка побудови дотичної площини та нормалі до поверхні в середовищі MathCad

Николай Менков, Иван Янчев, Кирилл Мундеев
Экспериментальное определение прироста влаги орехов

УДК 519.6:514.7

Комп'ютерна підтримка побудови дотичної площини та нормалі до поверхні в середовищі MathCad

Ольга Седих, Світлана Маковецька

Національний університет харчових технологій, м. Київ, Україна

Вступ

З бурхливим розвитком науки і техніки постає питання узгодження результатів науково-технічного прогресу і змісту освіти. Це висуває проблему розвитку нових форм організації навчального процесу, використання новітніх засобів навчання і суттєво розширює та змінює таке поняття, як “технологія навчання”, зміщує його у напрямі системного аналізу і проектування процесу навчання на основі інформаційних технологій.

Одним із основних факторів, які сприяють прискоренню науково-технічного прогресу, реалізації комплексних і цільових програм із розв'язання найважливіших науково-технічних проблем, підвищення продуктивності праці є електронно-обчислювальна техніка або засоби інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ). Останній термін є найбільш уживаним у сучасній науково-педагогічній літературі і містить в собі достатній спектр потужних математичних програмних засобів, використання яких забезпечує автоматизацію розв'язання широкого класу математичних задач прикладного характеру. Одним із таких програмних засобів є потужний професійний пакет MathCad [2].

Методи досліджень

Розглянемо задачу: маємо сферу радіусом $R=5$ з центром в початку координат. Побудувати дотичні площини, які проходять через точки сфери з відповідними значеннями аргументів $x=2$, $y=3$, а також нормалі до поверхні в цих точках [3].

Сферу можна описати неявним рівнянням $x^2+y^2+z^2=R^2$. Але працювати з таким рівнянням в MathCad незручно. Розв'язувати поставлену задачу ми будемо, задавши сферу параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned}R &:= 5 \\x(u, v) &:= R \cdot \cos(u) \cdot \cos(v) \\y(u, v) &:= R \cdot \cos(u) \cdot \sin(v) \\z(u, v) &:= R \cdot \sin(u)\end{aligned}$$

Нам відомі координати x та y точок сфери, через які потрібно провести дотичні площини та нормалі. Проте параметричні рівняння залежить від змінної u (азимутальний кут змінюється від $-\pi/2$ до $\pi/2$) та v (полярний кут, змінюється від 0 до 2π). Нам потрібно знайти значення u та v , які відповідають даним значенням x та y . Для цього розв'яжемо систему рівнянь $x(u, v)=2$, $y(u, v)=3$. Оскільки система нескладна, то це можна зробити аналітично:

$$R := \begin{pmatrix} R \cdot \cos(u) \cdot \cos(v) = 2 \\ R \cdot \cos(u) \cdot \sin(v) = 3 \end{pmatrix} \text{ solve, } u, v \rightarrow \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{1}{5} \cdot \sqrt{13}\right) & \operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right) \\ \pi - \arccos\left(\frac{1}{5} \cdot \sqrt{13}\right) & \operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right) - \pi \end{pmatrix}$$

За допомогою MathCad знайдено дві пари значень u та v , що задовольняють системі. Це коректний розв'язок: неважко прикинути, що дві точки сфери радіусом $R=5$ з центром на початку координат будуть мати координати $x=2$, $y=3$. Проте неможливо повністю покладатися на знайдені результати. По-перше, значення полярного кута для обох точок повинно бути однаковим. У відповіді ж для v отримані різні значення. Очевидно, що в подальших розрахунках потрібно використовувати тільки значення $v=\operatorname{arctg}(3/2)$, так як воно відповідає точці $(2;3)$, в той час як $v=\operatorname{arctg}(3/2) - \pi$ описує точку $(-2; -3)$. По-друге, потрібно враховувати, що відлік азимутального кута u ведеться не з 0 , а з $-\pi/2$. Для цього $\pi/2$ потрібно відняти від отриманого значення u .

Введемо змінні $u1$, $v1$, $z1$ та $u2$, $v2$, $z2$, в яких будуть зберігатися значення координат, відповідним точкам, через які повинні бути проведені дотичні площини та нормалі:

$$\begin{array}{llll} u1:=R_{0,0} - \pi/2 & u2:=R_{1,0} - \pi/2 & v1:=R_{0,1} & v2:=R_{0,2} \\ z1:=z(u1,v1) & z2:=z(u2,v2) & z1:=-3.606 & z2:=3.606 \end{array}$$

Координати по z точок сфери з однаковими координатами по x та y виявилось, як і потрібно, рівними по модулю і протилежними по знаку. Відповідно, u та v для цих точок були знайдені вірно.

Рівняння дотичної площини для параметрично заданої поверхні можна знайти, розкривши відповідний визначник і виділивши Z в ліву частину рівності:

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

Оскільки X , Y , Z – змінні рівняння площини; x_0 , y_0 , z_0 – координати точки, в якій поверхня і площина дотикаються; x_u , y_u , z_u – значення частинних похідних параметричних рівнянь по змінній u в точці дотику, x_v , y_v , z_v – значення частинних похідних параметричних рівнянь по v .

Розрахувати наведений визначник в MathCad нескладно. Але тут є одна особливість. Ми повинні використовувати в ньому значення частинних похідних параметричних рівнянь в точці дотику дотичної площини та поверхні, а не їхні аналітичні вирази. Існують декілька способів розв'язування цієї задачі. Спочатку обчислюємо визначник у символічному вигляді для частинних похідних, потім підставляємо замість змінних u та v їх значення за допомогою оператора `substitute`. Далі, виразимо Z за допомогою оператора `solve` і перерахуємо отримані громіздкі аналітичні вирази в більш просту наближену форму, використавши оператор `float` [1].

$$\begin{vmatrix} X - 2 & Y - 3 & Z - z1 \\ \frac{\partial}{\partial u} x(u, v) & \frac{\partial}{\partial u} y(u, v) & \frac{\partial}{\partial u} z(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} x(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} y(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} z(u, v) \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{substitute, } u = u1, v = v1 \\ \text{solve, } Z \\ \text{float, } 3 \end{array} \rightarrow .533 \cdot X - 7.06 + .800 \cdot Y$$

На основі отриманого виразу запишемо функцію

$$Z1(X, Y) := .533 \cdot X - 7.06 + .800 \cdot Y$$

Аналогічним чином знаходимо рівняння дотичної площини і для другої точки:

$$\begin{pmatrix} X - 2 & Y - 3 & Z - z_2 \\ \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} & \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } u = u_2, v = v_2 \\ \text{solve, } Z \\ \text{float, } 3 \end{array} \right. \rightarrow -0.799 \cdot X + 6.80 - 0.533 \cdot Y$$

$$Z_2(X, Y) := -0.799 \cdot X + 6.80 - 0.533 \cdot Y$$

Рівняння дотичної знайдено. Далі знаходимо рівняння нормалей. Використовуємо формулу нормалі до параметрично заданої поверхні:

$$\frac{X - x_0}{\begin{pmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{pmatrix}} = \frac{Y - y_0}{\begin{pmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{pmatrix}} = \frac{Z - z_0}{\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}}$$

Де X, Y, Z – змінні рівняння; x_0, y_0, z_0 – координати загальної точки поверхні та нормалі; x_u, y_u, z_u та x_v, y_v, z_v – значення частинних похідних параметричних рівнянь по u та v в точці перетину нормаллю поверхні.

Від даної формули легко перейти до системи параметричних рівнянь $X(t), Y(t), Z(t)$, що описує нормаль (це необхідно зробити так як тільки лінії, що описані в такій формі, можливо побудувати в MathCad). Для цього кожен змінну необхідно прив'язати до параметру t і виразити потім через саму змінну.

Щоб не оперувати громіздкими виразами, спочатку розрахуємо визначники, що входять в формулу:

$$D1 := \begin{pmatrix} \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} & \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } u = u_1, v = v_1 \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{-24}{13} \cdot \sqrt{13}$$

$$D2 := \begin{pmatrix} \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } u = u_1, v = v_1 \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{-36}{13} \cdot \sqrt{13}$$

$$D3 := \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } u = u_1, v = v_1 \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{3}$$

Функція CreateSpace дозволяє в MathCad будувати просторові параметрично задані криві. Вона сприймає систему рівнянь, які описують лінію, у вигляді вектора. Тому є сенс отримати цей вектор відразу, для цього об'єднуємо рівняння в систему і розв'язуємо їх одночасно:

$$\begin{pmatrix} \frac{X - 2}{D1} = t \\ \frac{Y - 3}{D2} = t \\ \frac{Z - z_1}{D3} = t \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, } X, Y, Z \\ \text{float, } 3 \end{array} \right. \rightarrow (2.00 - 6.67 \cdot t \quad 3.00 - 10.0 \cdot t \quad -3.60 + 12.5 \cdot t)$$

Транспонуємо видану функцією solve матрицю-рядок і створюємо на її основі функцію:
 $nal(t) := (2.00 - 6.67 \cdot t \quad 3.00 - 10.0 \cdot t - 3.60 + 12.5 \cdot t)^T$

Аналогічно отримуємо рівняння нормалі для другої точки.

$$\left(\begin{array}{l} \frac{X-2}{D1} = t \\ \frac{Y-3}{D2} = t \\ \frac{Z-z2}{D3} = t \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \text{solve, X, Y, Z} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow (2. - 9.98 \cdot t \ 3. - 6.66 \cdot t \ 3.61 + 12.5 \cdot t)$$

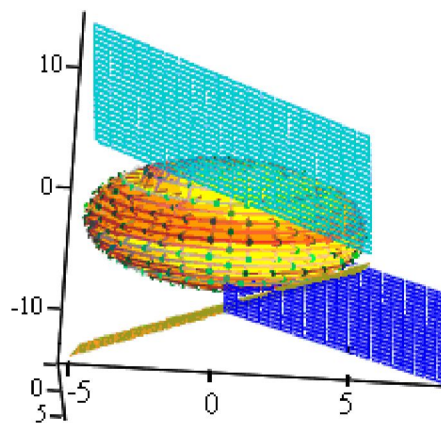
$$\text{na2}(t) := (2. - 9.98 \cdot t \ 3. - 6.66 \cdot t \ 3.61 + 12.5 \cdot t)^T$$

Будуємо сферу дотичні площини та нормалі (рис. 1.)

Результати та обговорення

Складність задач знаходження рівняння дотичної площини та нормалі залежить від того, в якій формі задається рівняння поверхні. Якщо поверхня описується явним (наприклад, параболоїд $z(x,y)=x^2+y^2$) або неявним (наприклад, куля $x^2+y^2+z^2=R^2$) рівнянням, то знайти рівняння дотичної площини та нормалі нескладно. Але задача стає на порядок складнішою, якщо поверхня описується за допомогою системи параболічних рівнянь. Оскільки часто поверхні задаються в параметричній формі, то подібні задачі не є рідкісними. В MathCad параметрична форма описування поверхонь є основною, оскільки така форма дозволяє будувати якісні графіки.

Однією із областей застосування частинних похідних є розв'язання задач аналітичної геометрії. В будь-якому практикумі з вищої математики є приклади знаходження дотичних площин та нормалей до поверхонь, а також дотичних прямих та нормальних площин до просторових ліній. При наявності готових формул такі задачі є простими з математичної точки зору. Але їх розв'язання пов'язане з підрахунком великої кількості частинних похідних і визначників, тому в обчислювальному плані вони можуть бути вкрай складними. Значну частину роботи при розв'язанні таких задач можна виконати за допомогою математичного пакету MathCad.



$$(x, y, z), Z1, Z2, \text{CreateSpace}(\text{na1}, -0.5, 0.3, 100)$$

Рис. 1.

Висновки

1. Використовуючи MathCad без зусиль були знайдені рівняння нормалі та дотичної до поверхні з використанням вбудованих функцій, щоб не оперувати з громіздкими виразами.
2. Розв'язання задач з використанням математичного пакету MathCad дає змогу студентам значною мірою підсилити інтелектуальну діяльність, можливість автоматизувати виконання не тільки чисельних, а й аналітичних обчислень, а завдяки потужній графіці – наочно візуалізувати дані і результати обчислень.

Література

1. Гурский Д.А., Турбина Е.С. Вычисления в MathCad 12. СПб.: Питер, 2006.
2. Шавальова В.І. Використання персонального комп'ютера у процесі вивчення курсу математичного аналізу у вищому педагогічному навчальному закладі// Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2002 – №5.
3. Вычислительная математика: Учеб. пособие для техникумов/ Данилина Н.И., Дубровская Н.С., Кваша О.П., Смирнов Г.Л. М.: Высш. шк., 2001. – 472 с.

Автори

Сєдих О.Л., Сєдых О.Л., Seidykh Olga
Маковецька С.В., Маковецкая С.В., Makovetska Svetlana

Назва документу

Комп'ютерна підтримка побудови дотичної площини та нормалі до поверхні в середовищі MathCad

Компьютерная поддержка построения касательной плоскости и нормали к поверхности в среде MathCad

The tangent plane and the normal line construction with the use of the MathCad mathematical package

Ключові слова

Ключові слова: математичний пакет MathCad, дотична площина, нормаль, поверхня, задачі аналітичної геометрії, вбудовані математичні функції.

Ключевые слова: математический пакет MathCad, касательная плоскость, нормаль, поверхность, задачи аналитической геометрии, встроенные математические функции.

Keywords: mathematical package MathCad, tangent plane, the normal of the surface, the problem of analytic geometry, built-in math functions.

Анотація

Дана робота має за мету запропонувати програмні реалізації в середовищі MathCad побудови дотичної площини та нормалі до поверхні за допомогою математичного пакету MathCad. Специфіка поєднання у процесі розв'язання задач аналітичної геометрії і вбудованих математичних функцій та процедур середовища MathCad сприятиме формуванню алгоритмічної культури студентів, фахова підготовка яких передбачає опанування методами обчислювальної математики.

Данная работа имеет целью предложить программные реализации в среде MathCad построения касательной плоскости и нормали к поверхности с помощью математического пакета MathCad. Специфика объединения (сочетания) в процессе решения задач аналитической геометрии и встроенных математических функций и процедур среды MathCad способствует формированию алгоритмической культуры у студентов, профессиональная подготовка которых предусматривает овладение методами вычислительной математики.

This paper aims to offer a software implementation within the MathCad environment concerning the tangent plane and the normal line construction to the surface with the use of the MathCad mathematical package. The combination specificity in the solving process of analytical geometry problems and the MathCad built-in mathematical functions and procedures will strengthen students' algorithmic culture, professional training which involves mastering the methods of computational mathematics.

Дата публікації документа та джерело

Ukrainian Food Journal, Volume 2. Issue 1, 2013, с.94-99