УДК 621.798

Д.М. ПОЛАТАЙЛО
В.А. ПІДДУБНИЙ, доктор технічних наук
Л.І. УДВОРГЕЛІ
Національний університет харчових технологій

ЕНЕРГЕТИЧНІ ПАРАМЕТРИ В УМОВАХ ПРУЖНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ДВОМАСОВОЇ СИСТЕМИ

Визначено співвідношення між енергетичними і кінематичними параметрами в пружних двомасових моделях, встановлено можливості вибору електродвигунів, що працюють в умовах ударних навантажень.
Ключові слова: *енергія, параметри, кінематика, взаємодія, удар, навантаження.*

Определены соотношения между энергетическими и кинематическими параметрами в упругих двухмассовых моделях, установлены возможности выбора электродвигателей, работающих в условиях ударных нагрузок.
Ключевые слова: *энергия, параметры, кинематика, взаимодействие, удар, нагрузка.*

Відомо, що режимам ударних навантажень в динаміці машин відповідають випадки, за яких швидкості ведучих мас в процесі їх взаємодії з веденими залишаються сталими [1—5]. Певному наближенню до станньої умови відповідають випадки, за яких використовуються електродвигуни з жорсткими характеристиками.

Завданням цього дослідження є визначення співвідношень між енергетичними і кінематичними показниками системи і методики оцінки придатності електродвигунів для привдення її в дію.

У відповідності з принципом Галілея рівняння руху тіла з масою m під дією зовнішньої сили Q записується з врахуванням прискорення dv/dt

$$m\frac{dv}{dt} = Q. \qquad (1)$$

Інтегрування записаної умови в межах часу від $t = 0$ до $t = t_1$ знайдемо швидкість тіла

$$v_1 = \frac{Q}{m}t_1. \qquad (2)$$

Остання, як бачимо, зростає прямо пропорційно часу t і може стати необмежено великою. Перейдемо до визначення миттєвої потужності W, що розвивається рушійною силою Q і запишемо

$$W = Qv = \frac{Q^2}{m}t. \qquad (3)$$

Тоді робота A рушійної сили за час t становить

$$A = \int_0^t \frac{Q^2}{m}t\,dt = \frac{Q^2}{2m}t^2, \qquad (4)$$

а кінетична енергія E, надана масі m:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\cdot\frac{Q^2}{m^2}t^2 = \frac{Q^2}{2m}t^2. \qquad (5)$$

Рівність роботи A рушійної сили за час переміщення тіла і накопиченої кінетичної енергії E відповідають закону збереження енергії Проте залежність (3) навіть сьогодні здається не тільки незвичною, а і такою, що протирічить здоровому глузду (потужність лінійно зростає з часом). З метою додаткового пояснення звернемося до графічної інтерпретації залежності (4) (рис. 1). Робота рушійної сили відображується гілкою параболи. Для плинних значень t_1, t_2 і t_3 маємо відповідно величини робіт A_1, A_2 та A_3, а миттєві потужності W_1, W_2 та W_3 відповідно ілюструються тангенсами кутів α_1, α_2 і α_3 дотичних до кривої $A = A(t)$ з горизонтальною віссю.

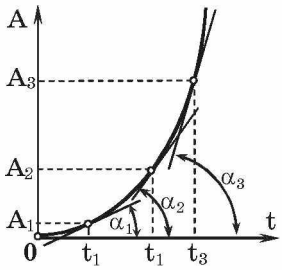

Рис. 1. Ілюстрація до рівняння (4) і визначення потужності W

Звідси зрозуміло, що за однакові проміжки часу Δt в околицях точок 1, 2 та 3 прирощення ΔA зростає. У зв'язку з цим наростають і значення потужностей W_1, W_2 та W_3.

Якщо вважати, що сила рушійна Q і сила опору F є функціями швидкості руху, то рівняння руху тіла записується у формі

$$m\frac{dv}{dt} = Q(v) - F(v). \qquad (6)$$

Досвід показує, що величина F(v) (наприклад, опір повітря, води тощо) в загальному випадку зростає зі зростанням v, тоді як значення Q(v) лімітується можливостями технічного пристрою. Тому рано чи пізно настає такий момент, від якого рушійна сила за деякої швидкості v повністю витрачається на подолання опору середовища. Це означає, що $dv/dt = 0$ і рух стає рівномірним. У зв'язку з цим, про конкретну потужність слід говорити, як про результат взаємодії тягового пристрою з навколишнім середовищем і при цьому опір останнього повинен зростати зі збільшенням швидкості.

© Д.М. Полатайло, В.А. Піддубний, Л.І. Удворгелі, 2008

У зв'язку з останнім досягається рівність $Q(v) = F(v)$ і тоді можемо записати, що потужність

$$W = vF(v). \quad (7)$$

Прояви дії середовища, які створюють опір переміщенню тіл, знаходять свої відображення у формі різних залежностей. Вони можуть бути лінійними або нелінійними функціями часу, переміщення, швидкості тощо і поєднання їх з певними закономірностями, що характеризують рушійні сили, забяяязепечують різноманітні закони руху тіл.

Розглянемо один з випадків, що характеризується ударною взаємодією двох мас, об'єднаних пружним елементом з жорсткістю c (рис. 2).

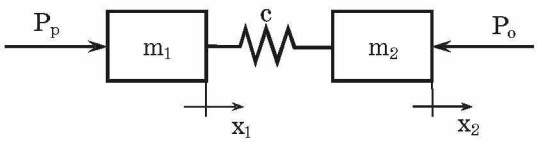

Рис. 2. Розрахункова схема до ударної взаємодії мас

Ударна взаємодія передбачає рух ведучої маси зі сталою швидкістю $\dot{x}_1 = \text{const} = v$. Тоді маємо рівняння руху мас

$$\begin{cases} x_1 = vt; \\ m_2\ddot{x}_2 = c(x_1 - x_2) - P_o. \end{cases} \quad (8)$$

Відомо, що розв'язання цієї системи приводить до виду

$$x_2 = vt - \frac{P_o}{c} - v\sqrt{\frac{m_2}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t; \quad (9)$$

$$\dot{x}_2 = v - v\cos\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t; \quad (10)$$

$$P_p = c(x_1 - x_2) = P_o + v\sqrt{m_2c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t, \quad (11)$$

де P_p —пружне зусилля.

Пружна сила P_p є рушійною силою в переміщенні маси m_2, а потужність взаємодії визначимо рівнянням

$$W = P_p\dot{x}_2 = \left(P_o + v\sqrt{m_2c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t\right)\times \left(v - v\cos\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t\right). \quad (12)$$

Оскільки пружна сила створюється в результаті взаємодії ведучої і веденої мас, то першій доводиться долати змінну величину P_p, але за умовою задачі швидкість переміщення маси m_1 залишається сталою, а тому потужність, що розвивається нею, дорівнює

$$W_1 = P_pv = \left(P_o + v\sqrt{m_2c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t\right)v = P_ov + v^2\sqrt{m_2c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t. \quad (13)$$

З залежності (13) видно, що потужність W_1 (яка повинна розвиватися рушійною силою, забезпечуючи величину $v = \text{const}$) представлена динамічною і статичною складовими. При цьому статична складова потужності P_ov, як бачимо, пропорційна швидкості v, а амплітуда динамічної складової $v^2\sqrt{m_2c}$ пропорційна квадрату швидкості v.

Визначимо різницю між потужностями рушійної і пружної сил

$$\Delta W = W_1 - W_2 = P_ov + v^2\sqrt{m_2c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t - P_ov + P_ov\cos\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t - v^2\sqrt{m_2c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t + v^2\sqrt{m_2c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t\cos\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t = P_ov\cos\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t + v^2\sqrt{m_2c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t\cos\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t.$$

Існуюча різниця потужностей у вигляді двох динамічних складових реалізується в системі за рахунок відповідної реакції двигуна. Наприклад, залежність моменту M на валу ротора асинхронного двигуна на ділянці жорсткої частини статичної механічної характеристики наближено відображується формулою Клосса

$$M = \frac{2M_m}{\frac{S}{S_m} + \frac{S_m}{S}}, \quad (14)$$

де S і S_m — плинне і критичне ковзання, що відповідає максимальному моменту M_m (рис. 3).

У зв'язку з цим потужність пов'язана з плинною кутовою швидкістю

$$W_{дв} = M(\omega)\omega. \quad (15)$$

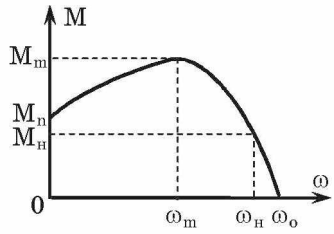

Рис. 3. Статична механічна характеристика асинхронного електродвигуна: $M_п$ і $M_н$ — відповідно пусковий і номінальний моменти; $\omega_н$, ω_o, ω_m — відповідно номінальна, син-хронна і відповідна M_m кутові швидкості ротора

З рівняння (15) видно, що однозначно вказати на співвідношення M і ω, за якого досягається максимальна миттєва потужність, неможливо, однак за жорсткої характеристики слід очікувати, що вона відповідає умові

$$W_{двmax} = M_m\omega_m.$$

Якщо знехтувати часом перебігу перехідних електромагнітних процесів у системі «ротор — статор», то максимальний амплітуді динамічної складової потужності $v^2\sqrt{m_2c}$ має відповідати певне значення $W_{дв}$ і при цьому повинна виконуватись умова

$$M_m\omega_m \geq P_ov + v^2\sqrt{m_2c}. \quad (16)$$

Оскільки значенню $P_o v$ відповідає номінальна потужність двигуна $W_{дв.н} = M_н \omega_н$, то одержуємо залежність

$$M_m \omega_m - M_н \omega_н \geq v^2 \sqrt{m_2 c}. \quad (17)$$

Параметри, які входять в ліву частину рівняння, звичайно представлені в технічній характеристиці електродвигуна, що дозволяє перевірити виконання умови (17). В суто технічних розрахунках необхідно врахувати втрати потужності в системі передавання руху через її коефіцієнт корисної дії h

$$(M_m \omega_m - M_н \omega_н)\eta \geq v^2 \sqrt{m_2 c}. \quad (18)$$

Таким чином, на основі рівнянь (13), (15)—(18) досягається можливість оцінки придатності асинхронного електродвигуна для роботи в перехідних режимах ударних навантажень.

На рис. 4 наведено геометричну інтерпретацію формули (14). Кривою 1 відображено косинусоїдальну складову ΔW, а кривою 2 — складову, що визначається добутком синусоїдальної і косинусоїдальної складових. Площі, обмежені кривими і горизонтальною віссю, відповідають роботам відповідних складових, суми яких за один цикл дорівнюють нулю.

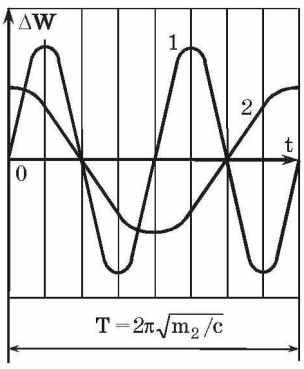

Рис. 4. Графічна залежність до зміни ΔW за один період часу T

З останнього слід зробити висновок про відповідність одержаної моделі закону збереження енергії.

Рівняння (8)—(10) дають додаткову можливість здійснити перевірку енергетичного балансу. Оскільки відомою є пружна сила і переміщення x_2 маси m_2 під її дією, то робота на цьому переміщенні складає

$$A_2 = P_p x = \left(P_o + \sqrt{m_2 c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t\right) \times$$
$$\times \left(vt - \frac{P_o}{c} - v\sqrt{\frac{m_2}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t\right) = P_o vt - \frac{P_o^2}{c} -$$
$$- P_o v\sqrt{\frac{m_2}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t + v^2 t\sqrt{m_2 c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t - \quad (19)$$
$$- \frac{vP_o}{c}\sqrt{m_2 c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t - v^2 m\sin^2\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t.$$

Робота рушійної сили

$$A_1 = P_p vt = \left(P_o + v\sqrt{m_2 c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t\right)vt =$$
$$= P_o vt + v^2 t\sqrt{m_2 c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t. \quad (20)$$

Визначимо різницю робіт

$$\Delta A = A_1 - A_2 = P_o vt + v^2 t\sqrt{m_2 c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t -$$
$$- P_o vt + \frac{P_o^2}{c} + P_o v\sqrt{\frac{m_2}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t - v^2 t\sqrt{m_2 c} \times$$
$$\times \sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t + \frac{vP_o}{c}\sqrt{m_2 c}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t + \quad (21)$$
$$+ v^2 m_2 \sin^2\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t = \frac{P_o^2}{c} + \left(P_o v\sqrt{\frac{m_2}{c}} + \frac{vP_o}{c}\sqrt{m_2 c}\right) \times$$
$$\times \sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t + v^2 m_2 \sin^2\sqrt{\frac{c}{m_2}}\,t.$$

Синусоїдальні складові ΔA за час T одного циклу дорівнюють нулю, а статична складова P_o^2/c відповідає прийнятій початковій умові $x_{(п)} = -P_o/c$. Це означає, що в режимі ударної взаємодії ведучої і веденої мас накопичення енергії не відбувається.

Розрахункові формули (12) та (19) дають можливість оцінити сукупність амплітуд динамічних складових потужності і енергії взаємодії ведучих та ведених мас. Здійснимо оцінку впливу жорсткості систем на вказані енергетичні параметри і виконаємо відповідні розрахунки за умов

$$P_0 = 2000 \text{ Н}; \quad m = 100 \text{ кг}; \quad v = 0{,}3 \text{ м/с}.$$

Максимальні значення W_{max} та A_{max} при зміні часу від t = 0 до t = 1 с представлені в табл.

Зростання потужності у силовій взаємодії у зв'язку із зростанням жорсткості вказує на необхідність врахування цього явища при вирішенні питання енергетичного забезпечення системи. Номінальне значення потужності для розглянутих випадків

$$W_{ном} = P_o v = 2000 \cdot 0{,}3 = 600 \text{ Вт}$$

Таблиця

Результати розрахунків по визначенню W_{max} та A_{max}

c, Н/м	50000	100000	200000	500000	1000000
W_{max}, Вт	1308	1338	1509	1790	2118
A_{max}, Дж	594	662	829	1200	1400

Порівнюючи цей результат з величиною W_{max} бачимо, що відношення $W_{max}/W_{ном}$ відрізняється у 2,18...3,53 рази.

Очевидно, що одержане співвідношення і співвідношення максимального M_m та $M_н$ моментів, якими характеризуються статична механічна характеристика, повинні певним чином корелювати для гарантованого утримання асинхронних двигунів в межах стійкої частини останньої. Особливо це важливо для систем, які планово працюють в режимах ударного навантаження.

Висновки. Дослідження по визначенню зв'язків між енергетичними, кінематичними і динамічними пара-

метрами на прикладі двомасової моделі дозволяють відмітити наступне:

у випадку ударної взаємодії двох мас, об'єднаних пружним зв'язком, існує різниця потужностей, що розвиваються рушійною і пружною силами, яка реалізується за рахунок реакції двигуна на жорсткій частині статичної механічної останнього;

різниця між максимальною і номінальною потужностями, що розвиваються двигуном, повинна бути більшою (або гранично рівною) динамічної складової потужності $v^2\sqrt{m_2 c}$, оскільки це гарантує роботу асинхронного двигуна на ділянці жорсткої частини його характеристики;

в режимі ударної взаємодії ведучої і веденої мас в розрахунку на один цикл накопичення енергії не відбувається;

зростання миттєвої потужності у силовій взаємодії двох мас пов'язано зі збільшенням жорсткості пружного зв'язку. Одержані співвідношення вказують на необхідність витримувати певну кореляцію між кінематичними, динамічними і енергетичними параметрами для нормальної експлуатації двигунів.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гавва О.М.* Наукові основи розрахунку параметрів потоково-транспортних систем харчових виробництв. Дис. д-ра техн. наук: 05.18.18. — К., 1996. — 562 с.

2. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 С.

3. *Голубенцев А.Н.* Обобщенный вход в динамике. — Киев: Техника, 1971. — 135 с.

4. *Комаров М.С.* Динамика механизмов и машин. — М.: Машиностроение, 1969. — 288 с.

5. *Соколенко А.И.* Разработка методов расчета и оборудования транспортно-технологических систем стеклотарной продукции пищевых производств. Автореф. дисс. д-ра техн. наук: 05.02.14. — Киев, 1988. — 32 с.

Одержана редколегією 24.07.08 р.