Задача про міст.

Микита Добряков, Ганна Циганкова

Національний університет харчових технологій, Київ, Україна

Вступ. У багатьох геометричних, фізичних, технічних задачах виникає потреба знайти найбільше або найменше значення величини, яка функціонально залежить від іншої величини. Це досягається методами математичного аналізу.

М**атеріали і методи.** Розглянуто задачу вибору місця для будівництва мосту через річку так, щоб довжина дороги між двома пунктами A і B, розташованими по різні боки від річки була найменшою. Для розв'язання цієї задачі зробимо схематичний план місцевості (Рис.1) і позначимо через x відстань A_1C, через a, b, c і h відстані AA_1, BB_1, BA_2 і CD відповідно.

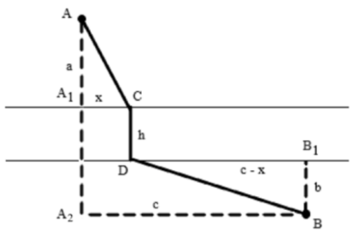

Рисунок 1. Схематичний план місцевості.

Результати. Довжина дороги між пунктами A і B знаходиться

$$l = AC + h + DB, \text{ де } AC = \sqrt{a^2 + x^2}\,,\ DB = \sqrt{b^2 + (c - x)^2}.$$

Звідси

$$l(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + h + \sqrt{b^2 + (c - x)^2},$$

де x змінюється на відрізку [0; c].

Для знаходження найменшої довжини дороги між двома пунктами потрібно знайти найменше значення функції $l(x)$ на відрізку [0; c].

Знайдемо похідну l' і критичні точки, що лежать всередині відрізка [0; c].

$$l' = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x - c}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \frac{x\sqrt{b^2 + (c - x)^2} + (x - c)\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + (c - x)^2)}}.$$

$l' = 0$. Звідси $x\sqrt{b^2 + (c - x)^2} + (x - c)\sqrt{a^2 + x^2} = 0$.

Розв'язавши це рівняння, отримаємо:

$x^2(b^2 + (c - x)^2) = (c - x)^2(a^2 + x^2);\ b^2x^2 = a^2(c - x)^2.$

Звідки маємо дві критичні точки $x_1 = \frac{ac}{a-b}$ та $x_2 = \frac{ac}{a+b}$. Оскільки точка x_1 лежить за межами відрізку $0 \le x \le c$ при $a > b$, і $x_1 < 0$ при $a < b$, а точка x_2 належить відрізку $0 \le x \le c$ за будь-яких додатних значень a, b і c, то всередині відрізку [0; c] функція $l(x)$ має одну критичну точку $x_2 = \frac{ac}{a+b}$.

Досліджуючи знак похідної l' зліва і справа від критичної точки x_2, переконуємося, що точка x_2 є точкою мінімуму, оскільки $l' < 0$ при $0 \le x \le x_2$ і $l' > 0$ при $x_2 \le x \le c$.

Висновки. За результатами проведеного дослідження отримано, що для того, щоб довжина дороги між двома пунктами, розташованими по різні боки від річки, була найменшою, слід побудувати міст на відстані $A_1C = \frac{ac}{a+b}$.