

## Застосування гіперболічних функцій в геометрії

Олексій Плакся, Володимир Листопад, Володимир Шоха  
Національний університет харчових технологій, Київ, Україна

**Постановка задачі.** Знайти криву із заданими граничними точками, від обертання якої навколо осі абсцис утворюється поверхня найменшої площі (рис 1).

**Матеріали і методи.** Як відомо, площа поверхні обертання визначається за формулою

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+(y')^2} dx \quad \text{Підінтегральна}$$

функція  $F(x, y, y')$  повинна задовольняти рівняння Ейлера (необхідна умова екстремуму

функціонала  $S[y(x)]$ ):  $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$  або в

розгорнутому вигляді  $F_y - F_{xy'} - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0$ .

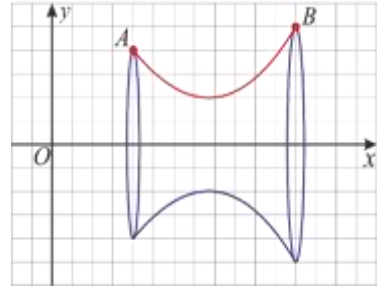


Рис.1

**Результати.** Оскільки  $F(x, y, y') = y\sqrt{1+(y')^2}$ , тобто функція залежить лише від  $y$  та  $y'$ , то перший інтеграл рівняння Ейлера має вигляд  $F - y'F_{y'} = C_1$ , або в

даному випадку  $y\sqrt{1+(y')^2} - \frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1$ . Після спрощення отримаємо

$$\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1. \text{ Це рівняння інтегрується підстановкою } y' = sh t, \text{ тоді}$$

$$y = C_1 ch t, \quad dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 sh t dt}{sh t} = C_1 dt, \quad x = C_1 t + C_2. \text{ Таким чином, шукана}$$

поверхня утворюється обертанням лінії, рівняння якої в параметричній формі має вигляд  $x = C_1 t + C_2$ ,  $y = C_1 ch t$ . Виключаючи параметр  $t$ , будемо мати

$$y = C_1 ch \frac{x - C_2}{C_1} - \text{ сімейство ланцюгових ліній. Сталі } C_1 \text{ і } C_2 \text{ визначаються із}$$

умови проходження шуканої лінії через задані граничні точки. Лінією, яка з'єднає дві задані точки площини  $Oxy$  і при обертанні якої навколо осі  $Ox$  утворюється

поверхня найменшої площі, є ланцюгова лінія (катенарія)  $y = ach \frac{x}{a}$ . Утворена при

цьому поверхня обертання називається катеноїдом. У техніці ланцюгової лінії розглядаються як лінії склепінь.

**Висновки.** Перевернута ланцюгова лінія – ідеальна форма для арок. Такі арки часто використовуються в будівництві печей. Щоб створити спроектовану криву, форму висячого ланцюга бажаних розмірів переносять на шаблон, який потім використовується як керівництво для розміщення будівельних матеріалів.