

ВИЗНАЧЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ НАВКОЛО
 ОТВОРУ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНІЙ ОБОЛОНЦІ
 МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

К.І.Шнеренко, А.С.Богатирчук, В.Ф.Годзула

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України
 Національний університет харчових технологій

Вступ. Постановка задачі. Розглянемо лінійну задачу про напружений стан оболонки із композитного матеріалу товщини h , послабленої отвором. Оболонка навантажена системою крайових і поверхневих сил. Отвір знаходиться достатньо далеко від країв оболонки. Напружений стан оболонки з концентратором напружень подамо в вигляді суми основного стану, що виникає в оболонці без отвору, та додаткового, що породжується наявністю отвору [1].

Основний напружений стан оболонки вважається відомим. Для знаходження збуреного (додаткового) стану використаємо рівняння пологих оболонок в рамках двохмірної теорії типу Тимошенка [1].

Зв'яжемо серединну поверхню оболонки з системою ортогональних координат (α, β, γ) з початком в центрі отвору. Введемо також полярні координати (r, θ) , зв'язані з центром отвору.

Для розв'язку задачі використаємо метод скінченних елементів [2]. Будемо виходити із варіаційного рівняння

$$\iint_{\Omega} (T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + S_{12} \delta \varepsilon_{12} + G_1 \delta \chi_1 + G_2 \delta \chi_2 + 2H_{12} \delta \chi_{12} + Q_1 \delta \varepsilon_{13} + Q_2 \delta \varepsilon_{23}) d\Omega +$$

(1)

$$\int_{\Gamma} [(T_r^0 - p_r) \delta u_r + (S_{r\theta}^0 - p_\theta) \delta u_\theta + (G_r^0 - m_r) \delta \gamma_r + (H_{r\theta}^0 - m_\theta) \delta \gamma_\theta + (Q_r^0 - p_\gamma) \delta w] d\Gamma = 0,$$

де Ω - область, границя якої достатньо віддалена від контуру отвору; Γ - контур отвору; T_1, \dots, Q_2 - компоненти збуреного напруженого стану; T_r^0, \dots, Q_r^0 - компоненти основного напруженого стану; p_r, \dots, p_γ - система заданих зовнішніх сил і моментів.

Враховуючи, що для більшості випадків на віддалі одного-двох діаметрів отвору від контуру збурення практично зникають [1], будемо вважати, що границя області Ω віддалена не менш, як на два - три діаметри від контуру отвору і має форму круга, центр якого співпадає з центром отвору.

Метод розв'язку. Розіб'ємо область на квадратичні ізопараметричні елементи [2]. На кожному елементі введемо локальну систему координат (α, β) так, щоб $|\alpha| \leq 1$ і $|\beta| \leq 1$. Координатні функції φ_i вибираємо у вигляді [2]

$$\varphi_i = \frac{1}{4}(1 + \alpha_0)(1 + \beta_0)(\alpha_0 + \beta_0 - 1) \quad (i=1,3,5,7), \quad (2)$$

$$\varphi_i = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)[1 + \beta_0] \quad (i=2,6), \quad \varphi_i = \frac{1}{2}(1 + \alpha_0)(1 - \beta^2) \quad (i=4,8),$$

де $\alpha_0 = \alpha\alpha_i$, $\beta_0 = \beta\beta_i$, α_i, β_i - координати і-го вузла елемента в локальній системі координат.

Зв'язок з глобальною системою координат (x, y) виконується за допомогою співвідношень

$$x = \sum_{i=1}^8 x_i \varphi_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 y_i \varphi_i, \quad (3)$$

де x_i, y_i - глобальні координати і-го вузла елемента.

Шукані переміщення для кожного елемента подаються в вигляді інтерполяційних многочленів

$$u_x = \sum_{i=1}^8 u_x^i \varphi_i, \dots, \gamma_y = \sum_{i=1}^8 \gamma_y^i \varphi_i, \quad (4)$$

де u_x^i, \dots, γ_y^i - значення переміщень в і-ому вузлі елемента. Зауважимо, що перехід від глобальних до локальних координат та інтерполювання шуканих функцій виконується за однаковими закономірностями.

Підставляємо шукані переміщення (4) в варіаційне рівняння (1) з урахуванням формул зв'язку похідних в двох системах координат і граничних умов. Надалі виконується числове інтегрування по кожному елементу з використанням квадратичних формул Гауса [2]. Для досягнення необхідної

точності достатньо використати формулу з двома вузлами інтегрування по кожній змінній. Після того результати складаємо по всім елементам і вар'юємо по вузловим значенням шуканих величин, вважаючи їх незалежними. Збираючи коефіцієнти при однакових варіаціях, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих. Вона буде мати вигляд

$$\sum_{n=1}^{5N} (A_i^n u_x^{*n} + B_i^n u_y^{*n} + C_i^n w^{*n} + D_i^n \gamma_x^{*n} + E_i^n \gamma_y^{*n}) = F_i \quad (5)$$

де N – число вузлів сітки, $u_x^{*n}, \dots, \gamma_y^{*n}$ - шукані значення переміщень в n -ому вузлі області Ω . Величини A_i^n, \dots, E_i^n визначають матрицю жорсткості. Матриця має стрічкову структуру, ширина якої залежить від способу нумерації вузлів.

Розбивка області Ω на елементи, інтегрування, формування матриці системи рівнянь (5) і її розв'язок виконуються з допомогою ЕМВ по розроблених програмах.

Числові результати. Як приклад, розглянуто задачу про визначення концентрації напружень в циліндричній трансверсально-ізотропній оболонці з круговим отвором, навантаженій внутрішнім тиском інтенсивності p_0 . Параметри оболонки: $R=1,0\text{м}$; $h=0,02\text{м}$; $r_0=0,2\text{м}$.

В таблиці наведені значення коефіцієнтів концентрації кільцевих зусиль $K_T = T_\theta / p_0 R$ і найбільших по товщині оболонки кільцевих моментів $K_G = 6G_\theta / p_0 R h$ в деяких точках контура отвору в залежності від зміни параметра E/G' , що характеризує поперечний зсув матеріалу оболонки [3,4]. Як видно з результатів, для трансверсально-ізотропної оболонки в розглянутому інтервалі зміни поперечного зсуву найбільші значення коефіцієнтів концентрації зусиль K_T змінюються не більше як на 6%, а відповідні значення кільцевих моментів K_G - до 23%.

E/G'	$\theta=0$		$\theta=\pi/4$		$\theta=\pi/2$	
	K_T	K_G	K_T	K_G	K_T	K_G
200	5,75	1,14	4,66	0,91	0,38	2,70
100	5,55	1,32	4,24	0,85	0,30	2,93
40	5,48	1,41	3,17	0,83	0,23	3,09
20	5,45	1,51	3,77	0,82	0,14	3,21
2	5,42	1,61	3,65	0,81	0,11	3,31
0,5	5,44	1,64	3,64	0,82	0,10	3,34

Література

1. Методи розрахунку оболонок. В 5 т. Т.1. Гузь О.М., Чернишенко І.С., Чехов Вал.М., Чехов Вік.М., Шнеренко К.І. Теорія тонких оболонок, послаблених отворами. - Київ: Наук.думка,1980.
2. Зенкевич О. Метод скінченних елементів в техніці.-М.:Мир,1975.
3. Гузь О.М., Чернишенко І.С., Шнеренко К.І. Концентрація напружень біля отворів в оболонках із композитних матеріалів// Прикл.механіка. – 2001. – 37,№2. - С.3-44.
4. Шнеренко К.І. Аналіз розрахункових схем для оболонок із композитних матеріалів з отворами// Прикл. механіка.- 1981. - 17,№4. - С.24-30.