

С. М. Василенко, А.В. Форсюк,

кандидати техн. наук

В.І. Бондар

В.Л.Зав'ялов, кандидат технічних наук

Моделювання турбулентного теплоперенесення в плівках рідини, що стікає методом аналогії

Однією з найважливіших задач при розробленні та впровадженні високоефективних енергозберіжних техніки і технологій є підвищення точності та достовірності їх розрахунку. Розв'язуючи цю задачу перевагу слід надавати методам розрахунку, в основу яких покладено математичні моделі процесів перенесення імпульсу, енергії та маси, що базуються на фізично адекватних уявленнях про механізми цих процесів.

На сьогодні більшість моделей теплообміну в течіях базується на аналізі рівнянь перенесення кількості руху та енергії при наближенні до примежового шару. При цьому застосовується підхід, що дає змогу використовувати результати вимірювання характеристик переносу кількості руху в течіях з зсувом, для чого вводять поняття *кінематичного коефіцієнта турбулентного перенесення кількості руху (кінематичного коефіцієнта турбулентної в'язкості)*. Для плоского динамічного граничного шару, в якому уявне турбулентне дотичне напруження дорівнює $(-\nu'_x \nu'_y)$, цей коефіцієнт визначається співвідношенням

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\overline{-\nu'_x \nu'_y}}{\partial \nu_x / \partial y} \quad (1)$$

Відповідно для турбулентного перенесення енергії вводять поняття *кінематичного коефіцієнта перенесення теплоти (коефіцієнта турбулентної температуропровідності)*

$$\varepsilon_q = \frac{\overline{-T' \nu'_y}}{\partial T / \partial y} \quad (2)$$

Із застосуванням цих коефіцієнтів рівняння стаціонарних плоских турбулентних примежових шарів набувають вигляду:

динамічного

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \varepsilon_\sigma) \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]; \quad (3)$$

теплового

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(a + \varepsilon_q) \frac{\partial T}{\partial y} \right]. \quad (4)$$

Аналіз рівнянь (3) і (4) дає можливість зробити висновок, що із введенням ε_σ та ε_q аналогія між процесами перенесення кількості руху та енергії, яка впливає з рівнянь для стаціонарної ламінарної течії, зберігається, хоч і не в такій очевидній формі, для осереднених у часі рівнянь турбулентного прилежового шару. Тому задачі турбулентного теплообміну зручно розв'язувати, застосовуючи відношення кінематичних коефіцієнтів перенесення кількості руху і теплоти, яке називають *турбулентним числом Прандтля*:

$$Pr_t = \frac{\varepsilon_\sigma}{\varepsilon_q} = \frac{\overline{v_x v_y} \frac{\partial T}{\partial y}}{T \overline{v_y} \frac{\partial v_x}{\partial y}}. \quad (5)$$

При цьому слід зазначити, що параметр Pr_t не має безпосереднього фізичного сенсу; у дійсності він є звичайним символом, що позначає праву частину рівняння (5). Основною причиною застосування числа Pr_t є те, що, внаслідок значно нижчої точності результатів вимірювання характеристик теплообміну порівняно з результатами вимірювання полів швидкості, дані щодо коефіцієнтів турбулентної температуропровідності менш надійні, ніж дані щодо кінематичних коефіцієнтів турбулентної в'язкості.

Відповідно основою методу аналогії є моделювання певного співвідношення між ε_q і ε_σ , тобто значення числа Pr_t , та способу задання величини ε_σ , що базується на відповідних уявленнях про механізм перенесення кількості руху.

Проаналізуємо вплив вибору моделей числа Pr_t і коефіцієнта ε_σ на результати розрахунку інтенсивності теплоперенесення при випаровуванні у плівках рідини, що вільно стікає. Безрозмірнісні рівняння локального перенесення імпульсу та енергії в плівці постійної товщини запишемо у вигляді

$$\left(1 + \frac{\varepsilon_\sigma}{\nu} \right) \frac{dv_x^+}{dy^+} = \left(1 - \frac{y^+}{\delta^+} \right), \quad (6)$$

$$\left(\frac{1}{Pr} + \frac{\varepsilon_\sigma}{\nu Pr_t} \right) \frac{dT^+}{dy^+} = 1. \quad (7)$$

Відповідно плівкове число Рейнольдса і число Стентона (безрозмірнісний коефіцієнт тепловіддачі) визначаємо так:

$$\text{Re} = 4 \int_0^{\delta} v_x^+ dy^+ = 4 \int_0^{\delta^+} \left[\int_0^{y^+} \frac{1 - \frac{y^+}{\delta^+}}{1 + \frac{\varepsilon_\sigma}{\nu}} dy^+ \right] dy^+ ; \quad (8)$$

$$\text{St}^{-1} = T_{y^+=\delta^+}^+ = \int_0^{\delta^+} \left(\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\varepsilon_\sigma}{\nu} \frac{1}{\text{Pr}_t} \right)^{-1} dy^+ . \quad (9)$$

Щоб замкнути задачу теплообміну, її треба доповнити виразами для визначення Pr_t і ε_σ . На сьогодні практично немає даних щодо розподілу Pr_t в плівках рідин, що пов'язано, очевидно, зі складністю вимірювання характеристик плівкових течій. Існуючі методи розрахунку турбулентного числа Прандтля придатні для однофазних течій у каналах і примезових шарах. Дослідники добирають відповідним чином задані значення Pr_t так, щоб отримати найкращу відповідність вимірним профілям температури і тепловим потокам на стінці. В науково-технічній літературі описано різноманітні моделі, в яких Pr_t є функцією фізичних властивостей рідини насамперед числа Pr , поперечної координати, витратних характеристик течії тощо, причому характер впливу їх на значення числа Pr_t може бути різним. Це, як зазначалось вище, є наслідком складності експериментальних досліджень, які багатократно ускладнюються в пристінному шарі рідини, який, очевидно, у плівкових течіях відіграє визначальну роль.

Більшість результатів експериментальних досліджень свідчить, що для рідин з молекулярним числом Прандтля, більшим за 1, турбулентне число Прандтля Pr_t змінюється в межах $1,0 \pm 0,3$. Однак сучасні дослідження дають можливість значно звужити цей діапазон для окремих видів течій та рідин. При цьому відмічено, що з наближенням до стінки ($y^+ = 10 \dots 35$) значення турбулентного числа Прандтля зростає, значно перевищуючи одиницю, після чого зменшується до одиниці в безпосередній близькості до стінки.

Розглянемо найвідоміші моделі розрахунку турбулентного числа Прандтля Pr_t , задавши як критерії класифікації їх основні параметри плівкової течії.

Фізичні властивості. В Т1 наведено рівняння для визначення числа Pr_t , в яких єдиним визначеним параметром є число Прандтля рідини Pr .

Залежність $Pr_t = f(Pr)$

Залежність	Автор	Примітка
$Pr_t^{-1} = 2,05 \frac{Pr}{1 - Pr} \left[1 - \left(\frac{2Pr}{1 + Pr} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$ (10)	D.W. Dunn, W.H.Reid [1]	Малі Re, Pe
$Pr_t = 1,01 - 0,09 Pr^{0,36}$ (11)	A.Malhotra, S.S. Kang [2]	$Pr = 1 \dots 145$
$Pr_t^{-1} = 0,91 + 0,13 Pr^{0,545}$ (12)	H. Graber [3]	$Pr = 0,7 \dots 100,0$

На Р1 наведено порівняння значень Pr_t , розрахованих за вищенаведеними залежностями.

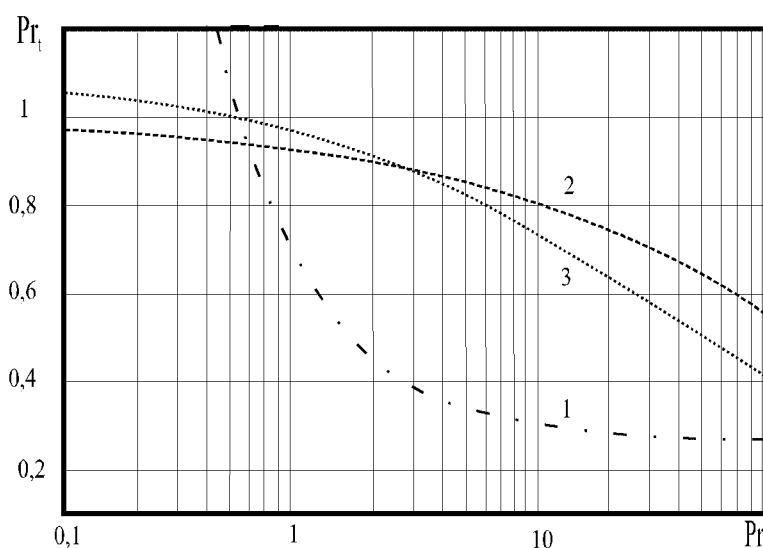


Рис. 1. Залежність $Pr_t = f(Pr)$:

1– (10), 2– (11), 3– (12)

Можна зробити висновок, що моделі, описані в працях [2] і [3], в діапазоні $Pr = 1 \dots 15$ дають близькі результати, які задовільно узгоджуються із загальноприйнятними значеннями Pr_t . Результати розрахунків за моделлю з праці [1] значно відрізняються від них, що, очевидно, пояснюється специфічним діапазоном дослідження.

Витратні характеристики. Найвідомішою серед моделей, що використовують як визначальні параметри безрозмірні числа Re та Pr , є модель А.І. Рейнольдса, результуюче розрахункове рівняння якої має вигляд

$$Pr_t = \frac{1 + 86 / (Re Pr)^{1/2}}{1 + 200 / Re^{1/2}} \quad (13)$$

рекомендоване для всього діапазону змінення числа Pr . На Р2 наведено результати розрахунку за рівнянням (13).

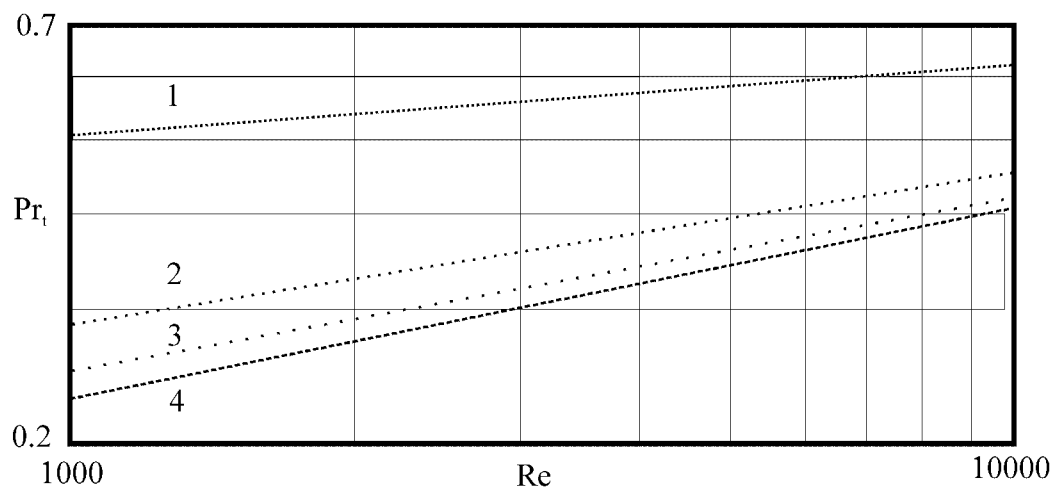


Рис.2. Залежність $Pr_t = f(Re)$:
1– $Pr = 1$; 2–6; 3–11; 4– $Pr = 16$

Відстань від твердої поверхні. У вищенаведених моделях значення числа Pr_t вважається постійним в поперечному перерізі течії. В той же час, як показують результати досліджень, біля нижньої межі прилежого шару, в якій інтенсивності молекулярного та турбулентного перенесення мають однаковий порядок, спостерігається значне змінення числа Pr_t . А оскільки в плівкових течіях ця ділянка має розміри, співмірні з товщиною плівки, моделі, що враховують змінення числа Pr_t поперек граничного шару, очевидно, є достовірнішими. Результуючі рівняння моделей такого типу наведено в Т2, а результати розрахунку за ними – на Р3.

Залежність $Pr_t = f(y^+)$

Залежність	Автор	Примітки
$Pr_t = 0,9 - 0,4(y^+ / \delta^+)^2$ (14)	I.C. Rotta [4]	$Pr \approx 0,7$
$Pr_t = 1,4 \exp(-15y^+ / \delta^+) + 0,66$ (15)	I. Mudawwar M.A. El-Masri [5]	
$Pr_t^{-1} = 1 + 400^{-y^+ / \delta^+}$ (16)	A. Quarmby, R. Quirk [6]	$Pr \geq 0,7$
$Pr_t = \frac{1 + 57 f(y^+ / \delta^+) / (Re^{0.46} Pr^{0.58})}{1 + 135 f(y^+ / \delta^+) / Re^{0.45}}$ $f(y^+ / \delta^+) = \exp\left[-(y^+ / \delta^+)^{1/4}\right]$ (17)	N.Z. Azer, B.T. Chao [7]	$Pr = 0,6 \dots 15,0$
$Pr_t = 1,855 - \tanh[0.2(y^2 - 75)]$ (18)	D.K. Hollingsworth [8]	вода

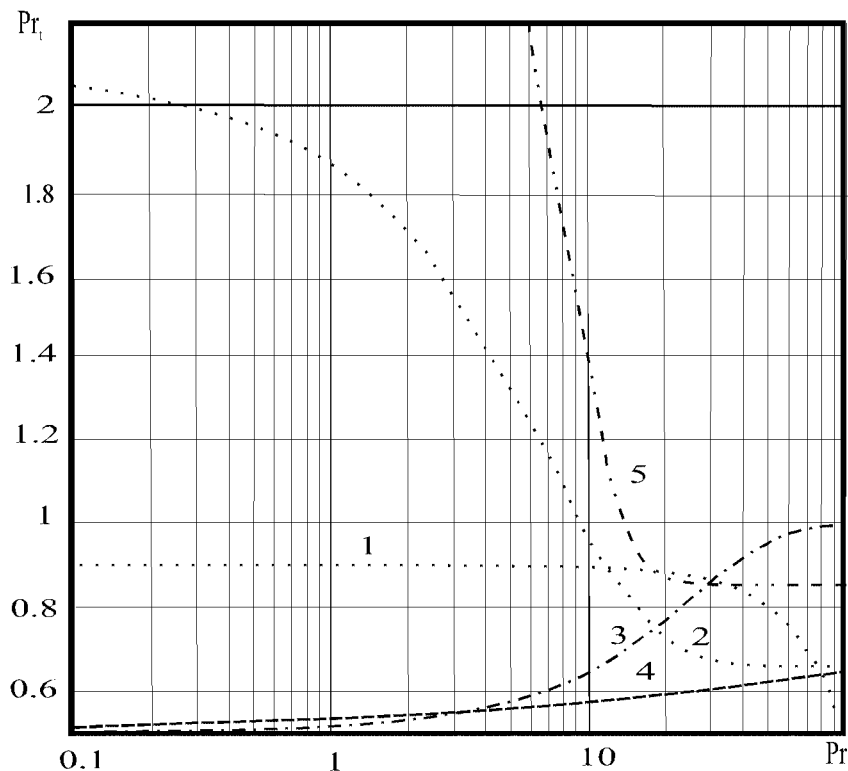


Рис. 3. Залежність $Pr_t = f(y^+)$ при $\delta^+ = 100$, $Pr = 1,5$:

1–(14); 2– (15); 3 – (16); 4– (17); 5– (18)

Інтенсивність турбулентного перенесення. Оскільки турбулентне число Прандтля Pr_t є відношенням коефіцієнтів турбулентного перенесення, то, очевидно, слід очікувати, що воно буде залежати від інтенсивності цього перенесення. Тому значна кількість сучасних моделей числа Pr_t включає як визначальний параметр, що опосередковано визначає інтенсивність турбулентного перенесення кількості руху, коефіцієнт ε_σ . В ТЗ наведено результуючі рівняння найвідоміших моделей цього типу, а на Р4 – результати розрахунків за ними.

Аналіз рис. 3 і 4 дає змогу зробити такі висновки. Результати розрахунків за наведеними моделями різняться між собою як кількісно, так і якісно. Крім того, жодна з моделей не дає очікуваного піка значення числа Pr_t при наближенні до стінки. Слід також зазначити, що деякі моделі є недосконалими з погляду фізичного сенсу. Так, функція, що описує змінення числа Pr_t в моделі (20), хоч і має максимум при зменшенні ε_σ / ν , однак при цьому ще й змінює знак, а в моделях (19, 21) при зменшенні ε_σ / ν до нуля значення числа Pr_t прямує до нескінченності.

Залежність $Pr_t = f(\varepsilon_\sigma/\nu)$

Залежність	Автори	Примітка
$Pr_t^{-1} = 1,5 \exp\left[\frac{-0,9}{(\varepsilon_\sigma/a)^{0,64}}\right]$ (19)	H.R. Kunz, S. Yerazunis [9]	
$Pr_t^{-1} = 1 - 1,82 Pr^{-1} (\varepsilon_\sigma/\nu)^{-1,4}$ (20)	O.E. Dwyer [10]	$Pr \ll 1$
$Pr_t = \frac{2,0}{(\varepsilon_\sigma/\nu)Pr} + 0,85$ (21)	W.M. Kays [8]	$Pr = 0,0058 \dots 65,0$
$Pr_t = \left\{ \frac{0,5882 + 0,228 (\varepsilon_\sigma/\nu) -}{-0,044 / (\varepsilon_\sigma/\nu)^2 \left[1 - \exp\left(\frac{-5,165}{\varepsilon_\sigma/\nu}\right) \right]} \right\}^{-1}$ (22)	W.M. Kays , M.E. Crawford [8]	Повітря

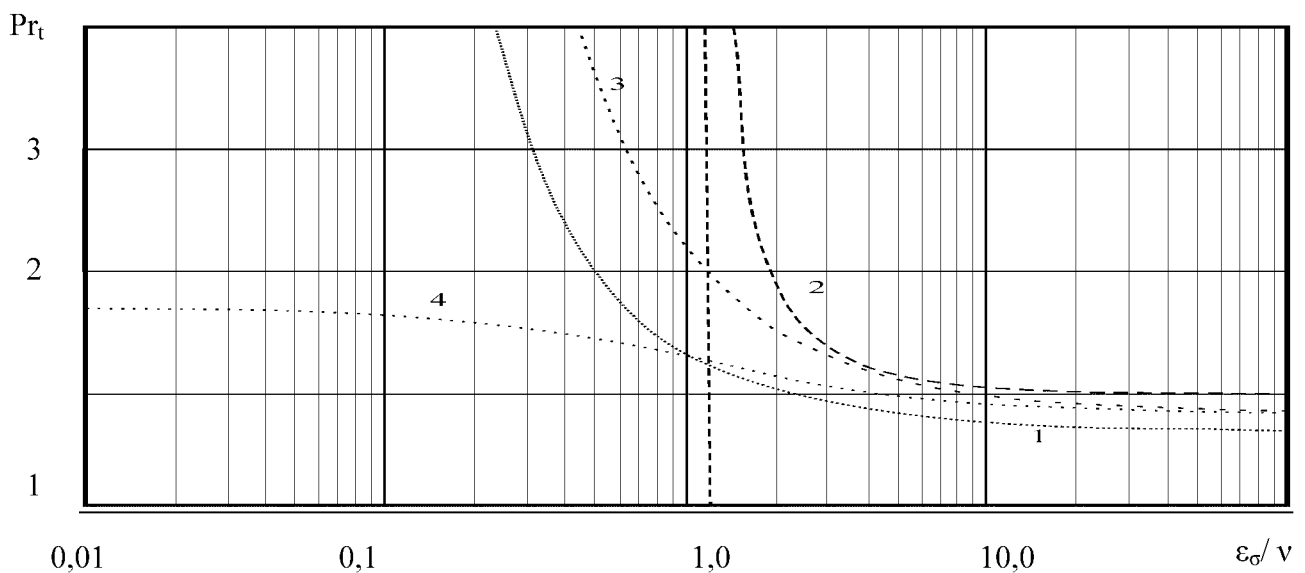


Рис. 4. Залежність $Pr_t = f(\varepsilon_\sigma/\nu)$; при $Pr = 1,5$:
1 – (19), 2 – (20), 3 – (21), 4 – (22)

Найбільш адекватною слід визнати модель I. Mudawwara та M.A. El – Masri(15), яка найкраще відповідає середнім експериментальним значенням числа Pr_t для течії води з вільною поверхнею, а саме: H. Ueda та ін. [11] отримали $Pr_t \approx 0,667$, а В.М.

Howe та ін. [12] отримали $Pr_t \approx 0,63$. Крім того, змінення значення числа Прандтля Pr_t з віддаленням від стінки, розраховане за цією моделлю, якісно добре узгоджується з профілем зміни Pr_t , отриманим експериментально для діапазону $y^+/\delta^+ \geq 0.1$ [11].

Аналізуючи процеси перенесення кількості руху, як правило, припускають, що турбулентна структура плівкової течії ідентична структурі турбулентної течії в примежовому шарі чи в пристінному шарі течії в каналі. Тобто моделі турбулентного перенесення в плівках, по суті, є модифікацією різних моделей турбулентності однофазної течії. На сьогодні більшість із них, як правило, базується на моделі коефіцієнта турбулентної в'язкості E.R.Van Driest'a, яка, з урахуванням змінення дотичного напруження по товщині вільної плівки, що стікає гравітаційно, може бути записана у безрозмірному вигляді:

$$\frac{\varepsilon_\sigma}{\nu} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left\{ 1 + 0,64 y^{+2} \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right]^2 \left(1 - \frac{y^+}{\delta^+} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

Слід зазначити, що існує ряд інших, не менш відомих моделей турбулентної в'язкості однофазної течії, більшість з яких мають один спільний недолік – вони є кількашаровими. Тобто згідно з цими моделями течія розбивається на кілька послідовних шарів, в кожному з яких зміна коефіцієнта турбулентної в'язкості задається окремо. Очевидно, ці моделі не відповідають основній вимозі аналізу в рамках моделі суцільного середовища, згідно з якою всі характеристики середовища мають змінюватись неперервно в просторі та часі.

На Р5 наведено порівняння результатів розрахунку інтенсивності теплообміну з застосуванням моделей турбулентного числа Прандтля (15) і кінематичного коефіцієнта турбулентної в'язкості (23) з результатами розрахунку за емпіричним рівнянням (13).

Можна зробити висновок, що в разі якісної подібності результати моделювання систематично перевищують дослідні дані в усьому діапазоні змінення характеристик течії. Різниця пояснюється тим, що в шарі рідини поблизу вільної поверхні плівки механізм турбулентного перенесення відрізняється від однофазного, що не враховується моделлю (23). В дійсності біля міжфазної поверхні інтенсивність турбулентного перенесення затухає внаслідок дії насамперед поверхневого натягу (тому це явище має назву *пригнічення турбулентності поверхневим натягом*). Більшість дослідників [5], [14] враховує це явище, виділяючи в плівці зовнішню ділянку пригнічення турбулентності, причому характер залежності ε_σ від y задають згідно з гіпотезою В.Г. Левича [15]. Однак ця методика, очевидно, також призводить до порушення умови суцільності середовища в плівці.

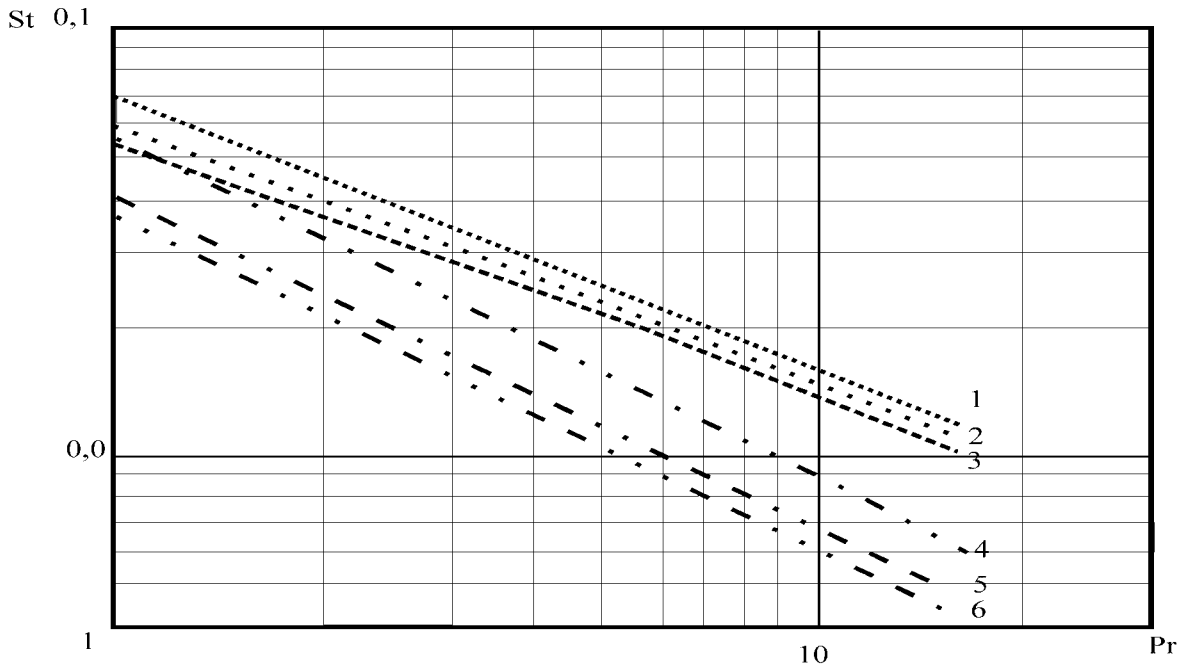


Рис. 5. Залежність $St = f(Pr)$ розрахована за однофазною моделлю (1- $\delta^+ = 30$; 2- $\delta^+ = 90$; 3- $\delta^+ = 150$) і за емпіричною формулою (13) (4- $\delta^+ = 30$; 5- $\delta^+ = 90$; 6- $\delta^+ = 150$)

З цього погляду обґрунтованішою видається модифікація моделі (23), яка дає змогу якнайкраще описати дослідні дані, зберігаючи фізичний сенс. Згідно з гіпотезою шляху змішування, яка лежить в основі моделі (23), середній лінійний масштаб турбулентних вихорів у турбулентному ядрі течії в каналі пропорційний відстані від стінки, тобто він не враховує особливостей турбулентного перенесення в плівці біля міжфазної поверхні. Слід враховувати, що згідно з гіпотезою шляху змішування, як видно з рівняння (23), турбулентна в'язкість біля поверхні плівки, що вільно стікає, все ж зменшується до нуля. Однак, цей результат спричинений не врахуванням механізму пригнічення турбулентності, як відмічалось вище, а структурою гіпотези. Скористаємося цією особливістю гіпотези. При цьому, щоб врахувати пригнічення турбулентності, введемо у вираз для лінійного масштабу і турбулентних вихорів демпферний фактор

$$\left[1 - \exp\left(\frac{y}{\delta} - 1\right)\right]^{1/2} :$$

$$l = 0,4y \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right)\right] \left[1 - \exp\left(\frac{y}{\delta} - 1\right)\right]^{1/2} . \quad (24)$$

Тоді модифікований цим демпферним фактором вираз для кінематичного коефіцієнта турбулентної в'язкості набуде вигляду

$$\frac{\varepsilon_{\sigma}}{\nu} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left\{ 1 + 0.64 y^{+2} \left[1 - \exp\left(\frac{y^+}{A^+}\right) \right]^2 \left[1 - \exp\left(\frac{y^+}{\delta^+} - 1\right) \right] \left(1 - \frac{y^+}{\sigma^+} \right) \right\}^{1/2}. \quad (25)$$

На Р6 наведено порівняння значень числа Стентона, розрахованих за модифікованою моделлю і за емпіричною формулою [13]. Можна відмітити їх задовільну відповідність, причому розбіжність лежить у межах похибки експериментального дослідження. Очевидно, однією з причин розбіжності є те, що експериментальні дані [13] стосуються здебільшого теплообміну в плівках за наявності міжфазної дотичної напруги, а також те, що в праці [13], з метою спрощеного застосування емпіричної моделі, при обробленні експериментальних даних залежність між Re та σ^+ визначалась за тришаровою моделлю універсального профілю швидкості Кармана–Нікурадзе.

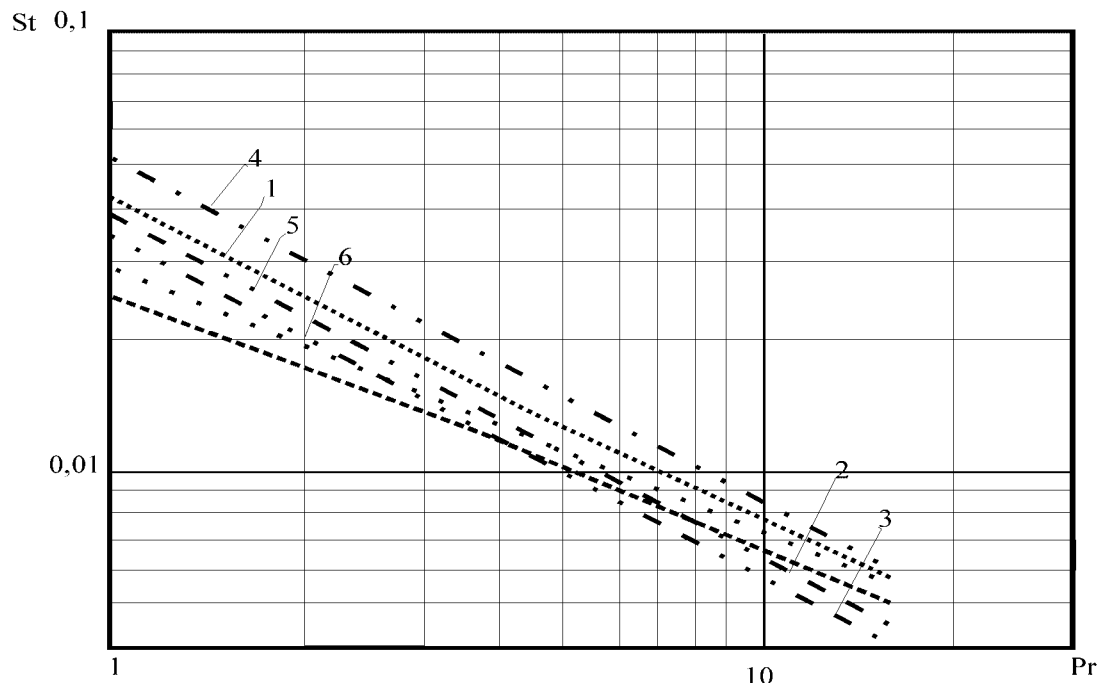


Рис. 6. Залежність $St = f(Pr)$, розрахована за модифікованою моделлю ($1 - \delta^+ = 30$; $2 - 90$; $3 - 150$) і за емпіричною формулою (13): ($4 - 30$; $5 - 90$; $6 - \delta^+ = 150$)

В експериментальних даних з теплообміну у плівках, що вільно стікають плівках більш традиційною формою безрозмірного коефіцієнта тепловіддачі є плівкове число Нуссельта. На Р7 наведено порівняння розрахованих за пропонованою моделлю значень плівкового числа Нуссельта, пов'язаного з числом Стентона залежністю

$$Nu = St Pr \delta^+, \quad (26)$$

з розрахованими за відомою емпіричною формулою W.Wilke [16]

$$Nu = 8,7 \cdot 10^{-3} Re^{0,4} Pr^{0,344} . \quad (27)$$

Ці значення отримано після обробленні значної кількості результатів експериментальних досліджень теплообміну в стікаючих плівках рідини, що стікають гравітаційно.

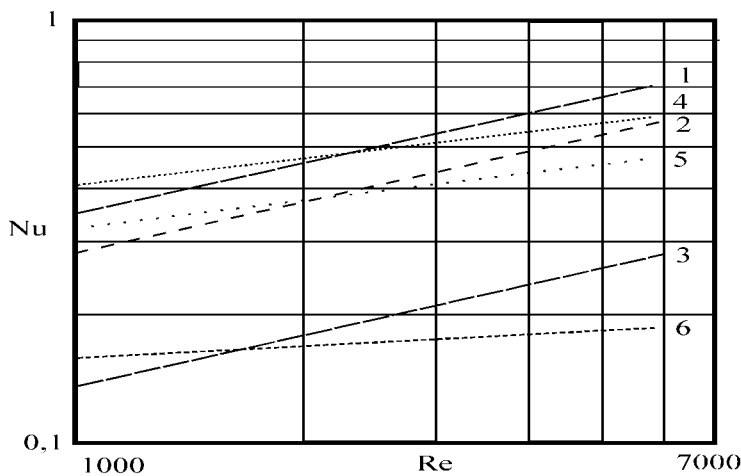


Рис. 7. Залежність $Nu = f(Re)$: розрахунок за емпіричною формулою(27): 1- $Pr=15$; 2- $Pr=8$; 3- $Pr=1$; розрахунок за модифікованою моделлю : 4- $Pr=15$; 5- $Pr=8$; 6- $Pr=1$;

Можна говорити про задовільну відповідність результатів, одержаних за моделлю та за емпіричною залежністю. При цьому слід зауважити, що існує велика кількість емпіричних формул, розрахунок за якими дає результати, що значно різняться. Це пов'язано із значним впливом на результати як умов проведення експерименту, так і методик оброблення та подання експериментальних даних.

Як видно з аналізу моделей числа Pr_t , вони не просто різняться між собою, а часто суперечать одна одній. Це пов'язано з тим, що вимірювання полів швидкості та температури є складними, а в прошарку, що прилягає до стінки, ще значніше ускладнюється. В цих умовах, очевидно, найдоцільнішою вимогою є відповідність розрахованого та виміряного теплових потоків на стінці. Щоб спростити розрахунки без значної втрати фізичного сенсу, доцільно значення Pr_t в розрахунках брати постійним по товщині плівки.

На Р8 наведено порівняння результатів розрахунку за емпіричною формулою (27) та за модифікованою моделлю із застосуванням виразу для середнього по товщині плівки

$$Pr_t = 1 - 0,1\delta^{0,28} . \quad (28)$$

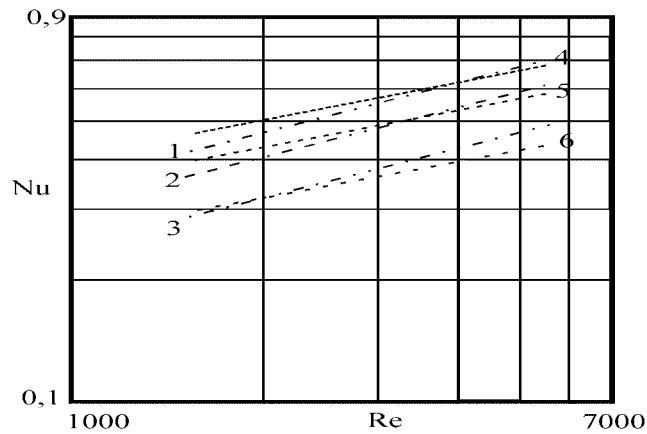


Рис.8. Залежність $Nu = f(Re)$; розрахована за емпіричною формулою (27) (1– $Pr = 15$; 2–10; 3– $Pr = 5$) і за модифікованою моделлю при $Pr_t = 1,0 - 0,1\delta^{+0,28}$ (4– $Pr = 15$; 5–10; 6– $Pr = 5$)

Аналіз графіка свідчить, що результати розрахунку за модифікованою моделлю із застосуванням рівнянь (25) для ε_σ та (28) для Pr_t відповідають експериментальним даним в діапазоні змінення Pr рідини, характерному для розчинів харчових виробництв .

Висновки. Моделі кінематичного коефіцієнта турбулентної в'язкості, отримані для однофазних течій, не дають змоги описати дослідні дані в рамках методу аналогії. Запропоновано модифікацію моделі кінематичного коефіцієнта турбулентної в'язкості та значення турбулентного числа Прандтля, моделювання з використанням яких відповідає результатам експериментального дослідження.

Умовні позначення.

a – температуропровідність, m^2/c ; $A^+ = 26$ – безрозмірна характерна довжина затухання турбулентних пульсацій швидкості; c_p – теплоємність рідини при постійному тиску, Дж/(кг·К); g – прискорення вільного падіння, м/с; l – середній лінійний масштаб турбулентних вихорів, м; $Nu = \alpha(v^2/g)^{1/3} / \lambda$ – плівкове число Нуссельта; Pr_t – турбулентне число Прандтля; $Pr = \nu/a$ – число Прандтля рідини; p – тиск, Па; q_{cm} – густина теплового потоку на стінці, Вт/м²; $Re = 4\Gamma/\nu$ – плівкове число Рейнольдса; $St = \alpha / (c_p \rho v_*)$ – число Стентона; T – осереднена в часі температура рідини, К; T' – пульсаційна складова температури, К; $T^+ = (T_{cm} - T) c_p \rho v_* / q_{cm}$ – безрозмірна

температура; $v_* = \sqrt{g\delta}$ – динамічна швидкість, м/с; v_x, v_y – осереднені в часі компоненти швидкості рідини, м/с; $v^+ = v/v_*$ – безрозмірна швидкість; v'_x, v'_y – пульсаційні складові компонентів швидкості, м/с; x – поздовжня координата, м; y – поперечна координата, відрахована від твердої поверхні, м; $y^+ = yv_*/\nu$ – безрозмірна координата; α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²*К); δ – товщина плівки, м; $\delta^+ = \delta v_*/\nu$ – безрозмірна товщина плівки; ε_σ – кінематичний коефіцієнт турбулентного перенесення кількості руху, м²/с; ε_q – кінематичний коефіцієнт турбулентного перенесення теплоти Г-об'ємна густина зрошування плівки, м²/с; λ – коефіцієнт теплопровідності рідини, Вт/(м*К) ρ – густина рідини, кг/м³; ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості, м²/с.

ЛІТЕРАТУРА

1. A.J. Reynolds. The prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers.// Int. J. Heat Mass Transfer. – 1975.–V 18 – p.1055–1069.
2. A. Malhotra and S.S.Kang. Turbulent Prandtl number in circular pipes.//Int. J.Heat Mass Transfer. – 1984.–V.27.–P. 2158–2161/
3. H.Graber. Der Wärmeübergang in glatten Rohren, zwischen parallelen Platten, in Ringspalten and langs Rohrbundeln bei exponentieller Wärmeflussverteilung in erzwungener laminarer oder turbulenter Stromung// Int. J.Heat Mass Transfer. – 1970.–V.13.–P. 1645–1703.
4. J.C. Rotta. Temperaturverteilungen in der turbulenten Grenzschicht an der ebenen Platte// Int. J.Heat Mass Transfer. – 1964.–V.7–P.215–228.
5. J.A. Shmerler and I. Mudawwar. Local heat transfer coefficient in wavy free-falling turbulent liquid films undergoing uniform sensible heating// Int. J.Heat Mass Transfer.– 1988.–V.31.–P.67–77.
6. A. Quarmby and R. Quirk. Measurements of the radial and tangential eddy diffusivities of heat and mass in turbulent flow in a plain tube// Int. J.Heat Mass Transfer.– 1972.–V.15.–P.2309–2327.
7. N.Z. Azer and B.T.Chao. A mechanism of turbulent heat transfer in liquid metals// Int. J. Heat Mass Transfer. – 1960.–V.1.–P. 121-138.

8. W.M. Kays. Turbulent Prandtl number – Where are we?// Int. J.Heat Mass Transfer.– 1994.–V.116.–P.285–295.
9. Кунц, Йеразунис. Анализ пленочной конденсации, пленочного испарения и однофазовой теплопередачи при числах Прандтля жидкости от 10^{-3} до 10^4 // Теплопередача.–1969.–№3.С. 134–143.
10. O.E. Dwyer. Eddy transport in liquid – metal heat transfer// AIChE journal. 1963.–V.9.–P.261–268.
11. H.Ueda, R.Moller, S. Komori and T. Mizushina. Eddy diffusivity near the free surface of open channel flow// Int. J.Heat Mass Transfer.– 1977.–V.20.–P.1127–1136/
12. Хау, Чамберс, Клоц, Чжоун, Стрит. Сравнение профилей скорости и температуры, потоков тепла и количества движения по обе стороны поверхности раздела воздух-вода// Теплопередача.– 1982.–№1.–С.38–44.
13. С.М. Василенко, А.В.Форсюк, М.І. Колосок. Локальне теплоперенесення в кільцевих парорідинних течіях теплообмінних апаратів харчових виробництв// Наук. пр. УДУХТ.– 2000.– №7.–С. 99–101.
14. Себан, Фагри. Испарение и нагрев турбулентных стекающих жидких пленок// Теплопередача.– 1976.–№2.–С. 180–183.
15. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз,1959.– 699 с.
16. Чжунь, Себан. Теплопередача к испаряющимся жидким пленкам// Теплопередача.– 1971.–№ 4. –С. 71–74.