УДК 517.9:519.46

І.І.Юрик,
Український державний університет харчових технологій, Київ
А.Ф.Баранник,
Педагогічний університет, Слупск, Польща

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ БУССІНЕСКА

Запропоновано підхід до побудови точних розв'язків рівняння Буссінеска, який грунтується на відокремлених змінних. Отримані нові точні розв'язки даного рівняння.

Розглянемо рівняння Буссінеска

$$u_{00} + u\,u_{11} + u_1^2 + u_{1111} = 0, \tag{1}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_j = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, $u_{\mu\mu} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\mu^2}$, $u_{1111} = \dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}$.

Воно інваріантне відносно алгебри з операторами [1]

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad D = 2x_0\frac{\partial}{\partial x_0} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - 2u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Оператори P_0, P_1 і D породжують такі однопараметричні групи симетрій рівняння (1):

$$\begin{gathered} G_0\colon (x_0, x_1, u) \to (x_0 + \varepsilon, x_1, u); \\ G_1\colon (x_0, x_1, u) \to (x_0, x_1 + \varepsilon, u); \\ G_2\colon (x_0, x_1, u) \to (e^{2\varepsilon}x_0,\ e^{\varepsilon}x_1,\ e^{-2\varepsilon}u). \end{gathered} \tag{2}$$

Рівняння (1) інваріантне також відносно дискретних перетворень

$$\begin{gathered} (x_0, x_1, u) \to (-x_0, x_1, u), \qquad (x_0, x_1, u) \to (x_0, -x_1, u), \\ (x_0, x_1, u) \to (-x_0, -x_1, u). \end{gathered} \tag{3}$$

Однопараметричні підгрупи (2) і дискретні перетворення (3) породжують групу симетрій G рівняння (1). Тому найбільш загальний розв'язок, який одержується з даного розв'язку $u = f(x_0, x_1)$ перетвореннями з розглядуваної групи G, має вигляд

$$u = \alpha^2 f(\alpha^2 x_0 + \beta_0,\ \alpha x_1 + \beta_1),$$

де α, β_0, β_1 – довільні дійсні числа.

Побудови точних розв'язків рівняння (1) розглянуто в роботах [1-4]. У [2] запропоновано "новий метод інваріантної редукції рівняння Буссінеска". У [3-4] точні розв'язки рівняння (1) одержані на основі концепції умовної симетрії.

У даній роботі пропонується підхід до побудови точних розв'язків рівняння (1), який грунтується на відокремленні змінних. Переваги його полягають у тому, що він значно простіший у реалізації та без істотних змін може бути використаний при побудові точних розв'язків багатовимірних нелінійних рівнянь. Це дозволило, зокрема, знайти нові точні розв'язки рівняння (1).

1. Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді $u = a(x_0) + b(x_1)$, де функції $a(x_0)$ і $b(x_1)$ відмінні від констант. Підставивши в рівняння (1), маємо

$$a'' + a\,b'' + (b\,b' + b'^2 + b'''') = 0. \tag{4}$$

З рівняння (4) випливає, що функції 1, a і a'' лінійно залежні. Оскільки функції 1, a лінійно незалежні, то $a'' = \alpha + \beta a$ для певних дійсних чисел α і β. Підставивши в рівняння (4), знаходимо

$$a(\beta + b'') + (\alpha + b\,b'' + b'^2 + b'''') = 0,$$

отже,

$$b'' + \beta = 0, \qquad b\,b'' + b'^2 + b'''' + \alpha = 0. \tag{5}$$

Система рівнянь (5) має розв'язок $b = \gamma x_1 + \delta$, $\gamma^2 = -\alpha$, якщо $\beta = 0$. Подіявши належним груповим перетворенням із групи G на функцію $b(x_1)$, можемо її перевести у функцію $2x_1$. Тому можна вважати, що $b(x_1) = 2x_1$, звідки одержуємо, що $\alpha = -4$. Отже, $a = -2x_0^2 + \gamma_1 x_0 + \delta_1$, де γ_1, δ_1 – довільні дійсні числа. Оскільки $a = -2(x_0 - \gamma_1/2)^2 + \delta_1 - \gamma_1^2/4$, то даний розв'язок належним перетворенням з групи G переводиться в розв'язок

$$u = 2(x_1 - x_0^2). \tag{6}$$

© І.І.Юрик, А.Ф.Баранник, 1998

Маючи частинний розв'язок (6) рівняння Буссінеска, побудуємо інший клас розв'язків рівняння (1). Частинний розв'язок цього класу будемо шукати у вигляді

$$u = 2(x_1 - x_0^2) + f(x_0, x_1). \tag{7}$$

Анзац (7) редукує рівняння (1) до рівняння

$$f_{00} + f f_{11} + f_1^2 + f_{1111} + 2(x_1 - x_0^2) f_{11} + 4f_1 = 0. \tag{8}$$

Анзац $\varphi = \varphi(\omega)$, $\omega = x_1 + x_0^2$ редукує рівняння (8) до звичайного диференціального рівняння

$$\varphi \varphi_{11} + \varphi_1^2 + \varphi_{1111} + 2\omega\varphi_{11} + 6\varphi_1 = 0. \tag{9}$$

Частинний розв'язок рівняння (9) шукаємо у вигляді $\varphi = t\ \omega^s$, $s \neq 1$. Підставивши в (9), знаходимо $s = -2$, $t = -12$. Отже, функція

$$u = 2(x_1 - x_0^2) - 12(x_1+x_0^2)^{-2} \tag{10}$$

є розв'язком рівняння (1).

2. Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді $u = a(x_0)b(x_1)$, де функції $a(x_0)$ і $b(x_1)$ відмінні від констант. Підставивши в рівняння (1), знаходимо

$$a^{11}b + a^2(b b^{11} + b^{12}) + a b^{1111} = 0. \tag{11}$$

Одержана рівність означає, що функції a^{11}, a і a^2 лінійно залежні, а тому $a^{11} = \alpha a^2 + \beta a$. Підставивши a^{11} у рівність (11) і враховуючи, що функції a і a^2 лінійно незалежні, одержуємо таку систему для визначення функції $b(x_1)$:

$$b^{1111} + \beta b = 0, \qquad b b^{11} + b^{12} + \alpha b = 0. \tag{12}$$

Звідси випливає, що $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$. Помноживши функцію a на число $\alpha/6$, а функцію b – на $6/\alpha$, завжди можна вважати, що $\alpha = 6$. Отже, якщо розв'язок системи (12) існує, то цей розв'язок є многочленом степеня не вище трьох. Безпосередньо перевіркою переконуємося, що $b = -x_1^2$ (з точністю до перетворень із групи G). Таким чином, рівняння (1) має такі розв'язки:

$$u = - x_1^2 P (x_0), \tag{13}$$

$$u = - x_1^2 x_0^{-2}, \tag{14}$$

де $P(x_0)$ – функція Вейєрштрасса з інваріантами $g_2 = 0$ і $g_3 = c_1$.

Маючи частинний розв'язок (13) рівняння Буссінеска, побудуємо новий клас розв'язків рівняння (1). Частинний розв'язок цього класу будемо шукати у вигляді

$$u = - x_1^2 P (x_0) + f(x_0, x_1). \tag{15}$$

Анзац (15) редукує рівняння (1) до рівняння

$$(f_{00} + f f_{11} + f_1^2 + f_{1111}) - P (x_1^2 f_{11} + 4x_1 f_1 + 2f) = 0. \tag{16}$$

Якщо функція f не залежить від x_1, то одержуємо $f_{00} = 2Pf$. Це рівняння є рівнянням Ламе і його розв'язки добре відомі [5]. Таким чином, функція

$$u = - x_1^2 P (x_0) + \Lambda(x_0), \qquad \Lambda^{11} = 2P\Lambda \tag{17}$$

є розв'язком рівнянням Буссінеска.

Якщо в рівнянні (16) f не залежить від x_0, то для визначення функції f одержуємо систему рівнянь

$$x_1^2 f_{11} + 4x_1 f_1 + 2f = 0, \qquad f f_{11} + f_1^2 + f_{1111} = 0. \tag{18}$$

Перше рівняння системи є нелінійним і його загальний розв'язок добре відомий [5]. Отже, $f = - 12x_1^{-2}$ і рівняння (1) має розв'язок

$$u = - x_1^2 P (x_0) - 12x_1^{-2}. \tag{19}$$

Одночасно одержуємо, що й функція

$$u = - 12x_1^{-2} \tag{20}$$

є розв'язком рівняння Буссінеска.

Знайдемо далі розв'язок рівняння (16), який залежить від x_0 і x_1. Розв'язок будемо шукати у вигляді $f = a(x_0)\ b(x_1) + c(x_0)$, де функції $a(x_0)$ і $c(x_0)$ лінійно незалежні. Підставивши в рівняння (1), знаходимо

$$c^{11} + a^{11}b + a^2(bb^{11} + b^{12}) + acb^{11} + ab^{1111} + +aP(-x_1^{-2}b^{11} - 4x_1b^1 - 2b) - 2Pc = 0. \tag{21}$$

Не вдаючись у деталі міркувань, будемо з самого початку вважати, що $b^{11}=0$. Тоді $b = \alpha x_1 + \beta$, а тому $f = \alpha a(x_0)x_1 + (\beta\ a(x_0) + c(x_0))$. Це означає, що можна покласти $\alpha=1$, $\beta=0$ і рівність (21) набуває вигляду

$$c^{11} + \alpha a^{11}x_1 + a^2 + aP(-4x_1 - 2x_1) - 2Pc = 0.$$

Таким чином,

$$a^{11} - 6Pa = 0, \qquad c^{11} = - a^2 + 2Pc. \tag{22}$$

Рівняння $a^{11} - 6Pa = 0$ є рівнянням Ламе, яке має розв'язок $a = P(x_0)$. Тому загальний розв'язок рівняння Ламе можна записати у вигляді $a = \gamma_1 P(x_0) + \gamma_2 \Lambda(x_0)$, де $P(x_0)$ і $\Lambda(x_0)$ – лінійно незалежні. Звідси випливає, що розглядуваний розв'язок рівняння (1) можна записати у вигляді

$$u = - P(x_0)\,(x_1 - \gamma_1/2)^2 + \gamma_2 x_1 \Lambda(x_0) + (c(x_0) + \gamma_1^2/4P(x_0)\,).$$

Перетвореннями з групи G він зводиться до розв'язку виду

$$u = - x_1^2 P(x_0) + \gamma_2 x_1 \Lambda(x_0) + d(x_0), \tag{23}$$

де функція $d(x_0)$ є розв'язком рівняння $d^{11} = -\gamma_1^2 \Lambda^2 + 2Pd$.

Аналогічно, виходячи з розв'язку (14), будуємо нові класи розв'язків рівняння Буссінеска:

$$u = -x_0^2 x_1^2 - 12x_1^{-2}, \tag{24}$$

$$u = -x_0^2 x_1^2 + c_1 x_0^3 x_1 - \frac{c_1^2}{54} x_0^8 + c_2 x_0^2 + c_3 x_0^{-1}. \tag{25}$$

Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді $u = a(x_0)\, b(x_1) + c(x_0)$, де функції $a(x_0)$ і $c(x_0)$ лінійно незалежні. Підставивши в рівняння (1), одержимо

$$a^{11} b + c^{11} + a^2 (b^{12} + bb^{11}) + acb^{11} + ab^{1111} = 0.$$

Якщо $c^{11} = \alpha a^2$, $a^{11} = 0$, то

$$a^2 (\alpha + b^{12} + bb^{11}) + acb^{11} + ab^{1111} = 0.$$

Звідси випливає, що

$$b^{12} + bb^{11} + \alpha = 0, \qquad b^{11} = 0.$$

Розв'язком такої системи з точністю до перетворень з групи G є функція $b = x_1$, якщо $\alpha = -1$. Тоді з умов $c^{11} = \alpha a^2$, $a^{11} = 0$ одержуємо, що $a = x_0$, $c = -\frac{1}{12} x_0^4 + \gamma x_0 + \delta$. Отже, функція

$$u = x_0 x_1 - \frac{1}{12} x_0^4 + \gamma x_0 + \delta,$$

де γ, δ – довільні дійсні числа, є розв'язком рівняння Буссінеска.

3. Перейдемо до побудови точних розв'язків рівняння Буссінеска для випадку $n > 1$. Узагальненням рівняння (1) на випадок довільного числа змінних $x_0, x_1, \ldots, x_n$ є рівняння [4]

$$u_{00} + (\nabla u)^2 + u \Delta u + \Delta (\Delta u) = 0, \tag{26}$$

де

$$(\nabla u)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2, \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Розв'язок рівняння (26) шукаємо у вигляді $u = a(x_0)\, b(x_1, \ldots, x_k)$, $k \le n$. Підставивши в рівняння (26), знаходимо

$$a^{11} b + a^2 [b \Delta b + (\nabla b)^2] + a \Delta (\Delta b) = 0.$$

Тому $c^{11} = \alpha a^2 + \beta a$ і в результаті одержуємо таку систему для визначення функції $b(x_1, \ldots, x_k)$:

$$\Delta (\Delta b) + \beta b = 0, \qquad b \Delta b + (\nabla b)^2 + \alpha b = 0.$$

Якщо $b = 0$, то $\alpha \ne 0$ і завжди можна вважати, що $\alpha = 6$. При цих значеннях b і α система має розв'язок $b = -\frac{3}{k+2}(x_1^2 + \ldots + x_k^2)$, а отже, розв'язок рівняння Буссінеска є функції

$$u = -\frac{3}{k+2}(x_1^2 + \ldots + x_k^2)\, P(x_0), \tag{27}$$

$$u = -\frac{3}{k+2}(x_1^2 + \ldots + x_k^2)\, x_0^{-2}. \tag{28}$$

Виходячи з розв'язку (27), побудуємо інший розв'язок рівняння (26). Цей розв'язок будемо шукати у вигляді

$$u = -\frac{3}{k+2}(x_1^2 + \ldots + x_k^2)\, P(x_0) + f(x_0, x_1, \ldots, x_k). \tag{29}$$

Анзац (29) редукує рівняння (26) до рівняння

$$f_{00} + (\nabla f)^2 + f\,\Delta f + \Delta(\Delta f) - P\left[\frac{3}{k+2}(x_1^2 + \ldots + x_k^2)\,\Delta f + \right.$$
$$\left. + (4x_1 f_1 + \ldots + 4x_k f_k) + 2k f\right] = 0. \qquad (30)$$

Якщо в рівнянні (30) f не залежить від змінних $x_1, \ldots, x_k$, то $f_{00} = \frac{6k}{k+2} f$ і тому функція

$$u = -\frac{3}{k+2}(x_1^2 + \ldots + x_k^2)\,P(x_0) + \Lambda(x_0),\ \Lambda'' = \frac{6k}{k+2}P\Lambda, \qquad (31)$$

є розв'язком рівняння (26).

Якщо в рівнянні (30) функція f залежить від всіх змінних $x_0, x_1, \ldots, x_k$, то одержуємо такий розв'язок рівняння (26):

$$u = -\frac{3}{k+2}(x_1^2 + \ldots + x_k^2)\,P(x_0) + \alpha x_1 \Lambda(x_0) + c(x_0), \qquad (32)$$

де $P'' = 6P^2$, $\Lambda'' = (4+2k)P\Lambda$, $c'' = -\alpha^2\Lambda^2 + 2Pc$.

Якщо виходити з розв'язку (28), то аналогічно знаходимо такий розв'язок рівняння (26):

$$u = -\frac{3}{k+2}(x_1^2 + \ldots + x_k^2)\,x_0^{-2} + c_1 x_0^3 x_1 - \frac{k+2}{50k+112}x_0^8 + c_2\,x_0^{\frac{1+\sqrt{\frac{25k+2}{k+2}}}{2}} + c_3\,x_0^{\frac{1-\sqrt{\frac{25k+2}{k+2}}}{2}}$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 – довільні дійсні числа; $k = 1, \ldots, n$.

Новий клас розв'язків рівняння (26) побудуємо, якщо використаємо анзац

$$u = -x_1^2 P(x_0) + f(x_0, x_2, x_3). \qquad (33)$$

Підставивши в рівняння (26), знаходимо

$$f_{00} + (\nabla f)^2 + f(\Delta f) + \Delta(\Delta f) - x_1^2 P(\Delta f) - 2Pf = 0.$$

Оскільки функція f не залежить від x_1, то $\Delta f = 0$ і ми одержуємо таку систему рівнянь для визначення функції f:

$$f_{00} + f_2^2 + f_3^2 - 2Pf = 0,$$
$$f_{22} + f_{33} = 0. \qquad (34)$$

Будемо шукати розв'язок системи (34) у вигляді $f = a(x_0)\,x_2 + b(x_0)\,x_3 + c(x_0)$. Підставивши f у перше рівняння системи (34), приходимо до рівняння

$$a''x_2 + b''x_3 + c'' + a^2 + b^2 - 2P(ax_2 + bx_3 + c) = 0.$$

Звідси випливає, що

$$a'' = 2Pa, \qquad b'' = 2Pb, \qquad c'' = -a^2 - b^2 + 2Pc. \qquad (35)$$

Розв'язуючи рівняння (35), знаходимо явний вигляд функції $a(x_0)$, $b(x_0)$, $c(x_0)$, а отже, і розв'язку рівняння (26).

Якщо використати анзац

$$u = -x_1^2 x_0^{-2} + f(x_0, x_2, x_3),$$

то аналогічно будуємо такий розв'язок рівняння (26):

$$u = -x_1^2 x_0^{-2} + (c_1 x_0^2 + c_4 x_0^{-1})\,x_2 + (c_3 x_0^2 + c_4 x_0^{-1})\,x_3 - \frac{c_1^2 + c_3^2}{28}x_0^6 - \frac{c_1 c_2 + c_3 c_4}{2}x_0^3 +$$
$$+ \frac{c_2^2 + c_3^2}{28}$$

Застосовуючи анзац

$$u = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\,P(x_0) + f(x_0, x_3),$$

одержуємо ще один розв'язок рівняння (26):

$$u = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\,P(x_0) + \Lambda(x_0)x_3 + c(x_0),$$

де $\Lambda'' = 2P\Lambda$, $c'' = -\Lambda^2 + 2Pc$.

У випадку, коли використовуємо анзац

$$u = -\frac{1}{2}\,(x_1^2 + x_2^2)\,x_0^{-2} + f(x_0, x_3),$$

знаходимо такий розв'язок рівняння (26):

$$u = -\frac{1}{2}\,(x_1^2 + x_2^2)\,x_0^{-2} + (c_1 x_0^2 + c_2 x_0^{-1})x_3 + \frac{c_1^2}{28}x_0^6 - \frac{c_1 c_2}{2}\,x_0^3 + \frac{c_2^2}{2}.$$

1. Olver P.J., Rosenan Ph. The construction of special solutions to partial differential equations // Phys. Lett. A – 1986. – Vol. 114, № 3. – P. 107-115. **2. Clarkson P., Kruskal M.** New similitary reductions of the Boussinesq equation. // J. Math. Phys. – 1989. – Vol. 30, № 10. – P. 2201-2213. **3. Levi D., Winternitz P.** Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation. // J.Phys. A. – 1989. – Vol. 22. – P. 2915-2924. **4. Фущич В.И., Серов Н.М.** Условная инвариантность и точные решения уравнения Буссинеска. // Симметрия и решения уравнений математической физики. – Киев, 1989. – С. 95-102. **5. Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М., 1976.

A method for constructing exact solutions of the Boussinesq equation, that is based on the separation of variables, is proposed. New exact solutions of this equation are obtained.

Надійшла до редколегії 15 травня 1998 р.

УДК 519.21