УДК 539.3

О. А. Звьоздочкіна, В. В. Лисенко

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ У БАГАТОЗВ'ЯЗНІЙ ПІВПЛОЩИНІ, ЩО ВИНИКАЄ ПІД ДІЄЮ ТЕПЛОВОГО ТА МЕХАНІЧНОГО НАВАНТАЖЕНЬ

В работе рассмотрена задача классической несвязанной термоупругости о вдавливании нагретого штампа в полуплоскость с квадратным отверстием, на границе которого заданы механическая нагрузка и температурные условия. Сформулированы основные принципы методики, позволяющей решать такие задачи для полуограниченных тел. Исследовано поле напряжений, возникающее в рассматриваемой области под действием нестационарной температуры, при граничных условиях гармонического типа. Проведен анализ полученных результатов для рассмотренной области при решении несвязанной термоупругой и упругой задач.

RESEARCH OF TENSE CONSISTING OF MULTIPLY CONNECTED HALF-PLANE , THAT ARISE UP UNDER ACTION OF THERMAL AND MECHANICAL LOADINGS

In this paper the task of classic unrelated termoelastic about pressing of the heated stamp in a half-plane with the square aperture on the border of which the mechanical loading and temperature terms are set is considered. Basic principles of method allowing to solve such tasks for semilimited bodies are formulated. The field of tensions, arising up in the examined region under action of unstationary temperature at the scope terms of harmonic type, is explored. The analysis of the got results is conducted for the considered area at the solution of unrelated termoelastic and elastic tasks.

Вступ. Математичне моделювання реальних процесів приводить до розрахункових схем, що містять фактори, які ускладнюють розв'язання задач, зокрема складні типи крайових умов, механічні навантаження, що супроводжуються тепловими впливами. Таким задачам приділяється дуже багато уваги дослідниками [1, 2]. Для розв'язання даного класу задач розроблено та використовується багато різних чисельних методів [3, 4], які в деяких випадках не спроможні розв'язувати задачі для напівнескінченних областей без спрощення математичних моделей досліджуваного процесу.

До задач теорії пружності неоднорідних тіл можна привести різні задачі механіки деформівних твердих тіл. До них зводяться, зокрема, задачі термопружності однорідних пружних тіл при дії високих температур, коли стає істотною залежність пружних властивостей від температури [5]. У випадку, якщо розподіл температури не залежить від напружень, що виникають у пружному тілі як під її впливом, так і під дією заданого навантаження на межах, то одержимо задачу незв'язаної теорії термопружності.

У зв'язку з цим виникає необхідність розробки простих і в той же час досить надійних методів визначення напружено-деформованого стану півплощини, півпростору, напівнескінченних багатозв'язних тіл із прямолінійною та плоскою межею з концентраторами напружень типу отворів та порожнин з вільною від зусиль та жорстко защемленою межею, що дозволяють знаходити напруження і деформації в будь-якій точці області.

Постановка задачі. Розглянемо статичну задачу про деформації ізотропного однорідного тіла, пружні властивості якого залежать від температури, при

неоднорідному температурному полі $T = T(x_s, t)$, де S – область, в якій задане поле температур. Використовуючи зв'язок між напруженнями та деформаціями [5]

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - 3K\alpha(T - T_0)\delta_{ij}$$

і формули Коші, одержимо диференціальні рівняння рівноваги в переміщеннях

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \mu\nabla^2 u_i + \theta\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} + \frac{\partial\mu}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - 3\frac{\partial}{\partial x_i}[K\alpha(T - T_0)] + \rho F_i = 0 \quad (1)$$

та крайові умови

$$\{\lambda\theta\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - 3[K\alpha(T - T_0)]\delta_{ij}\}n_j\Big|_{S_\sigma} = q_i(x_s), \quad (2)$$

$$u_i\Big|_{S_u} = \varphi_i(x_s), \quad (3)$$

де T_0 – початкова температура тіла, яку будемо вважати сталою; α – коефіцієнт лінійного розширення; K – модуль об'ємного стиску; λ, μ – сталі Ламе; S – розглянута область, $S_\sigma \bigcup S_u$ – межа області S; ρ – густина.

Якщо коефіцієнт лінійного розширення сталий, то крайова задача (1), (2) набуде наступного вигляду [5]:

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1 - 2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial x_i} - \frac{2(1 + \nu)}{(1 - 2\nu)}\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha(T - T_0) = 0, \quad (4)$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\nu}{1 - 2\nu}\theta\delta_{ij}\right]n_j\Bigg|_S = \frac{(1 + \nu)(3k + G)}{9KG}q_i(x_s). \quad (5)$$

Рівняння (4), (5) можна розглядати як постановку задачі в переміщеннях для класичної термопружності. При цьому, якщо розподіл температури не залежить від напружень, що виникають у пружному тілі як під її впливом, так і під дією заданого навантаження на межах, то одержимо задачу незв'язаної теорії термопружності.

Нехай на межі півплощини задане гармонійне збудження. При цьому реакція буде залежати від частоти збудженого впливу, а початковими умовами зневажаємо, припускаючи, що перехідний процес завершився і система перейшла в

сталий стан. В роботі розглядаються тільки статичні задачі, тому у випадку завдання такого навантаження одержимо послідовність розв'язків для кожного кроку за часом у даній області для температурної задачі, коли різниця температур змінюється за часом (рис. 1).

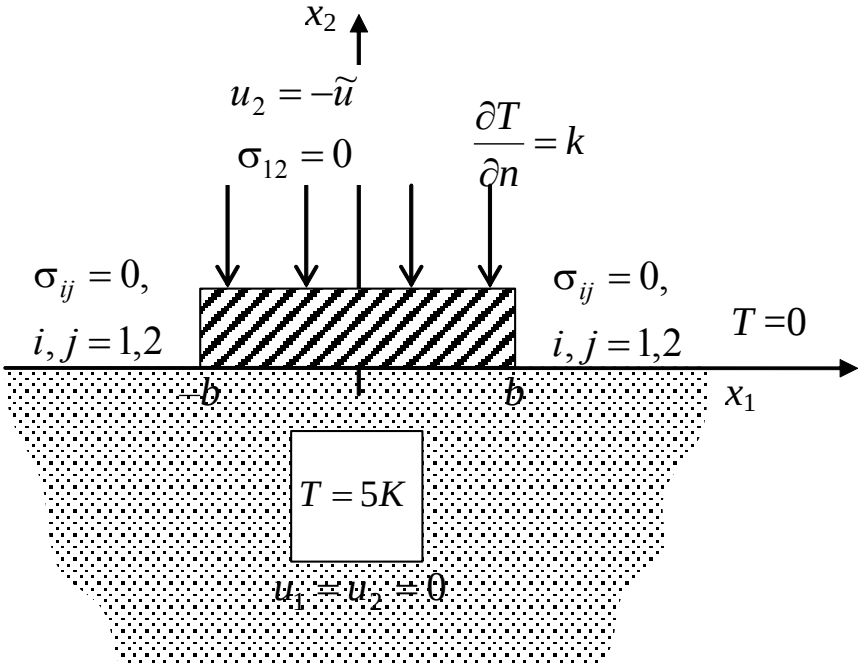


Рис. 1 – Задача про вдавлювання штампа в нагріту багатозв'язну напівнескінченну область із прямолінійною межею

Як відомо [6], в теорії термопружності існує найбільш простий для побудови загального розв'язку випадок, коли відбувається поділ задач: спочатку необхідно визначити температуру, а потім з урахуванням знайденого розподілу температур розв'язати рівняння Ламе, що містить фіктивні масові сили.

Розглянемо таку задачу. Нехай під дією теплового потоку на кінцевій ділянці межі півплощини і температури, заданої на частині контуру, що залишилася, відбувся перерозподіл температури в півплощині. Тепер на тій же ділянці межі відбувається вдавлювання твердого штампа. Інша частина межі вільна від зусиль. Даний процес описується за допомогою двох мішаних задач (рис. 1).

Треба знайти розподіл температури в півплощині, якщо на межі задана функція температури та її похідна, тобто

$$\Delta T(x,t) - \frac{1}{k}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

при таких крайових умовах:

$$T\big|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = k, \tag{7}$$

де k – стала, Δ – оператор Лапласа.

Розв'язок даної задачі, наведений в роботі [7], можна використати як фіктивні масові сили для постановки задачі про вдавлювання штампа у нагріту півплощину, тобто розв'язати рівняння:

$$G\Delta u_j + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \rho b_j = 0 \tag{8}$$

при таких крайових умовах:

$$u_2 = -\tilde{u}\,, \quad |x_1| \le b\,, \quad x_2 = 0\,,$$

$$\sigma_{12} = 0\,, \quad |x_1| < \infty\,, \; x_2 = 0\,,$$

$$\sigma_{22} = 0\,, \quad |x_1| > b\,, \; x_2 = 0\,, \tag{9}$$

де $\tilde{u}$ – задане постійне переміщення.

Методика розв'язання задачі. Оскільки у поставленій задачі (6), (7) об'ємні сили можуть не дорівнювати нулю, то нижче приведемо процедури, що дозволяють оцінити їхній вплив. Якщо враховувати температуру, то необхідно перейти до деякої модифікації закону Гука [6]. Тоді одержимо співвідношення для напружень через деформації:

$$\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\theta - \alpha\left(T - T_0\right), \quad \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}\,, \tag{10}$$

$$\sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda\theta - \alpha\left(T - T_0\right), \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\,. \tag{11}$$

При цьому, крайове інтегральне рівняння буде мати такий вигляд [8]

$$c_{ij}(\xi)u_i(\xi) + \int_\Gamma p^*_{ij}(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) =$$

$$= \int_\Gamma u^*_{ij}(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) + 2G\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\int_\Omega u^*_{ik,k}(\xi,x)Td\Omega\,, \tag{12}$$

де T – різниця температур $T - T_0$, задана в області Ω; G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона; α – коефіцієнт лінійного температурного розширення; $c_{ij}(\xi) = \delta_{ij}/2$ – для гладких поверхонь; δ_{ij} – символ Кронекера; $u^*_{ij}(\xi,x)$ – фундаментальний розв'язок Кельвіна; $p^*_{ij}(\xi,x)$ – фундаментальні напруження;

$u_i(\xi)$, $u_j(x)$ та $p_j(x)$ – задані та невідомі крайові умови.

Далі застосовуючи метод крайових елементів, будується розв'язок незв'язаної термопружної задачі.

Якщо об'ємні сили розглядаються відповідно до рівняння (12), то при розрахунку знадобиться обчислювати інтеграли по об'єму, що потребує при інтегруванні розбивати розглянуту область на внутрішні комірки. В деяких конкретних випадках інтеграл по області можна звести до поверхневого інтеграла, який можна обчислити чисельно разом із крайовими інтегралами. У випадку сталої теплопровідності може бути використана процедура, що дозволяє перетворити об'ємний інтеграл у крайовий інтеграл виду [8]

$$B_i = G\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\int_{\Gamma}(G^*_{ik,kj}T - G^*_{ik,k}T_{,j})n_j d\Gamma, \tag{13}$$

де $G^*_{ik,kj}n_j = \frac{1}{4\pi G}\left[\left(\ln\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)n_i - r_{,i}r_{,k}n_k\right]$; $G^*_{ik,k} = \frac{1}{4\pi G}rr_{,i}\left(\ln\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)$; n_j – напрямні косинуси; r – відстань між двома точками.

Вирази (13) можна продиференціювати та одержати напруження у внутрішніх точках. У цьому випадку використовується закон Гука у вигляді [8]

$$\sigma_{ij} = \sigma^e_{ij} - 2G\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T\delta_{ij}, \tag{14}$$

де $\sigma^e_{ij} = \int_{\Gamma} S_{ij}Td\Gamma - \int_{\Gamma} V_{ij}T_{,k}n_k d\Gamma$, а у свою чергу

$$S_{ij} = \frac{1+\nu}{2\pi(1-\nu)r}\alpha G\left[n_m r_{,m}\left(\frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} - 2r_{,i}r_{,j}\right) + n_i r_{,j} + n_j r_{,i}\right],$$

$$V_{ij} = \frac{1+\nu}{2\pi(1-\nu)}\alpha G\left[\frac{\delta_{ij}}{1-2\nu}\left(\frac{1+2\nu}{2} - \ln\frac{1}{r}\right) + r_{,j}r_{,i}\right].$$

Усі представлені вище вирази для плоскої деформації будуть справедливі і для плоского напруженого стану, якщо замінити відповідні ν і α.

У зв'язку з тим, що для приведених нижче задач область є багатозв'язною, то в загальному вигляді інтеграли бралися по області за допомогою квадратурної формули Гауса. Пружні сталі при розрахунку були прийняті такі: ν = 0,1; G = 2,6·10^5 кг/см^2; α = 2,4·10^{-6}К$^{-1}$, що відповідають природному матеріалові – бетону, $a_0 = \omega b / C_2$=8, де ν – коефіцієнт Пуассона; G – модуль пружності при

зсуві; α – коефіцієнт лінійного температурного розширення; a_0 – безрозмірна частота; C_2 – прискорення хвилі зсуву в ґрунті; b – половина основи штампа, що лежить на межі півплощини; ω – частота [8].

Дослідження напруженого стану багатозв'язної півплощини, що піддається механічному і температурному впливам. Нижче представлені чисельні результати розв'язання задачі незв'язаної термопружності (5)–(9) з такими крайовими умовами:

1) для температурної задачі:

$$T\big|_{\Gamma_2} = 0\,,\ \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = 20e^{-a_0 t}\,,\ T\big|_{t=0} = 0\,; \tag{15}$$

2) для пружної задачі:

$$u_2 = -\tilde{u}\sin a_0 t\,,\quad |x_1| \le b\,,\quad x_2 = 0\,;$$

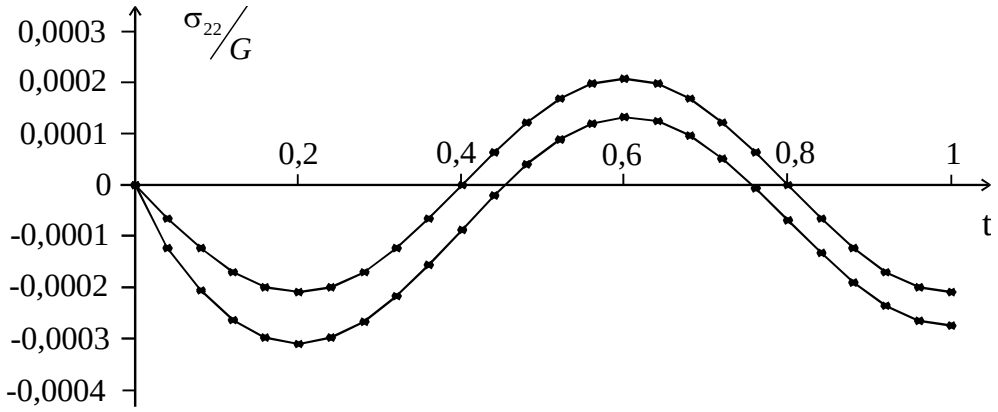
$$\sigma_{12} = 0\,,\quad |x_1| < \infty\,,\ x_2 = 0\,;$$

$$\sigma_{22} = 0\,,\quad |x_1| > b\,,\ x_2 = 0\,, \tag{16}$$

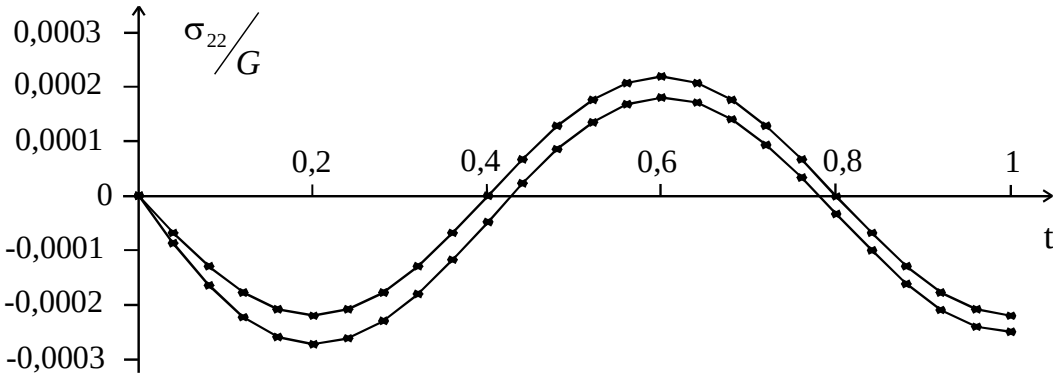
де $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ – межа півплощини.

В якості теплового впливу використовувався розв'язок задачі нестаціонарної теплопровідності для багатозв'язної області, отриманий в роботі [7]. На рис. 2 представлений розв'язок задач (15), (16) у порівнянні з розв'язком, отриманим для задач (8), (9), (16).

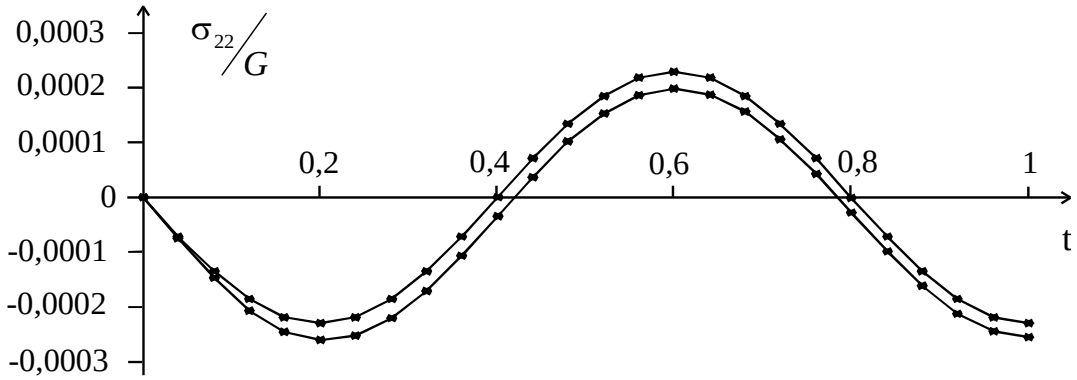
Висновки. З одержаних результатів слідує, що завдання природних умов на межі дії штампу привело к поступовому нагріву основи штампу, і, як наслідок, максимального значення напруження досягли під штампом в точці (0; 0) з деяким запізненням, тобто через 0,2 години. Потім напруження почали зменшуватися, оскільки потік, заданий на межі півплощини, поступово, за експоненціальним законом у часі, знижується та прямує до нуля. Таку ж картину можна спостерігати в інших точках, для яких побудовані розподіли напружень. Так, в точці $x_2 = -1$ максимальних змін напруження отримали в момент часу 0,6; в точці $x_2 = -1{,}5$ – в момент часу, який знаходиться за межею 0,8. Тобто можна встановити таку закономірність, що при заданій природній умові в півплощині спостерігається такий же поступовий перерозподіл напружень експоненціального характеру із запізненням у часі.



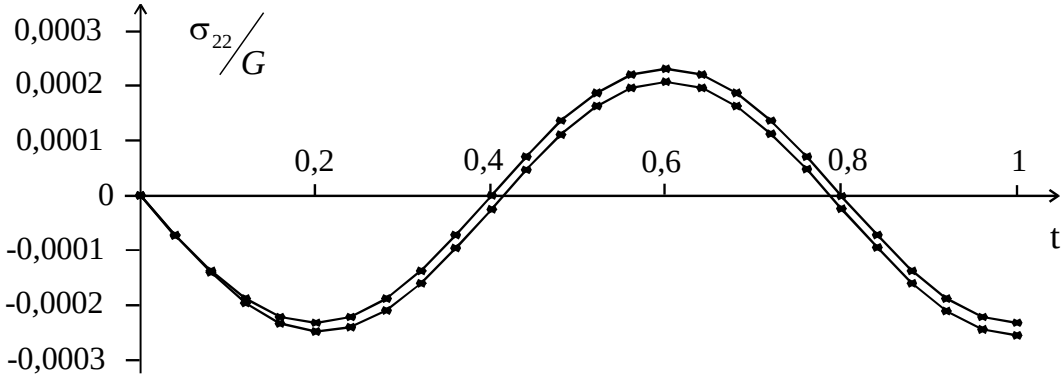
а) x_2=0



б) x_2 =–0,25

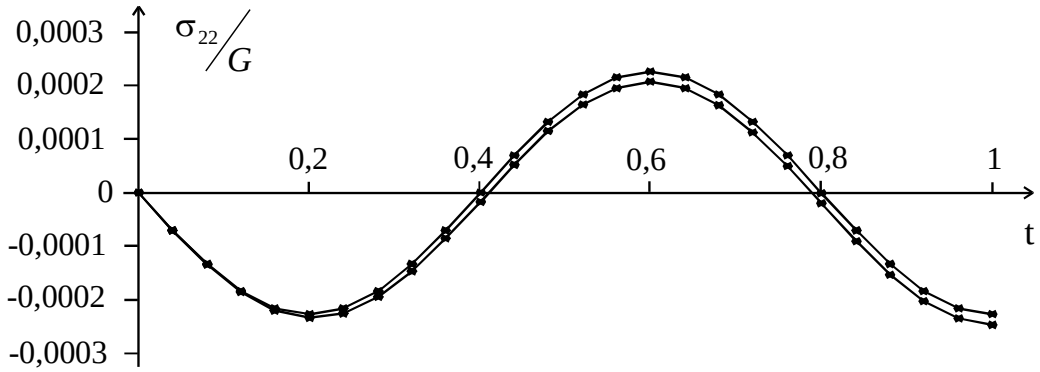


в) x_2=–0,5

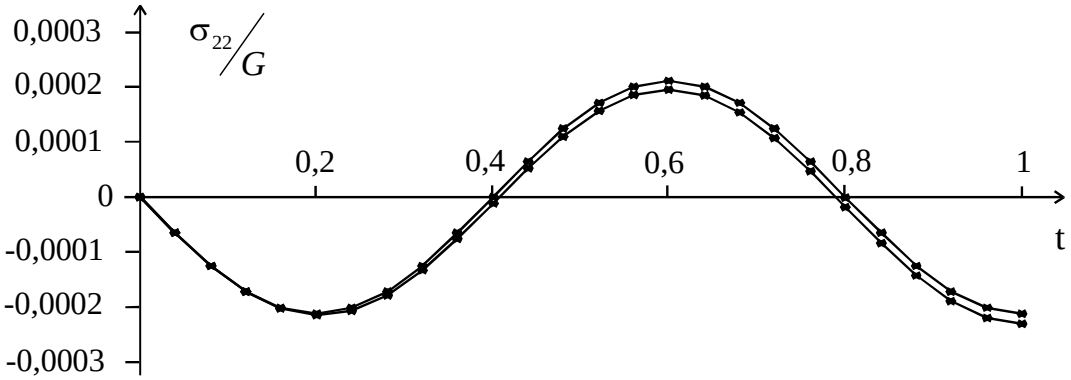


г) x_2=–0,75

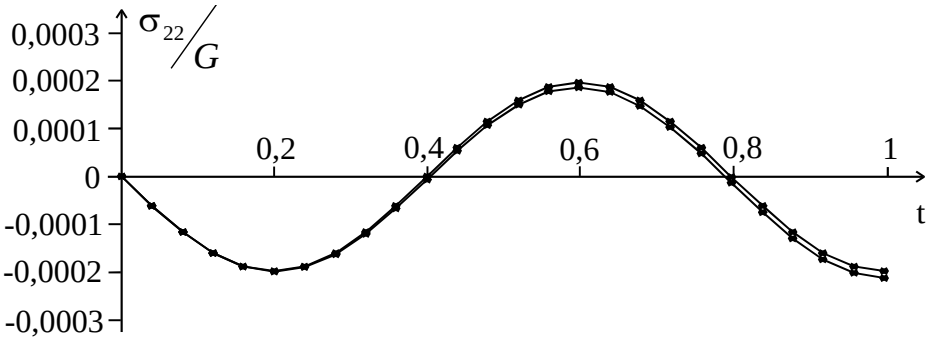
Рис. 2 – Розподіл напружень у точках по осі Ox_2 із кроком 0,25 у півплощині



д) x_2=–1



е) x_2=–1,25



ж) x_2 =–1,5

Продовження рис. 2 – Розподіл напружень у точках по осі Ox_2 із кроком 0,25 у півплощині

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Булавацький В. М. Розв’язок незв’язної динамічної задачі термопружності для півпростіру на основі параболічної моделі теплопровідності // Доп. НАН України, 1998. – №9. – С. 50-53.
2. Шевченко В.П., Гольцев А.С. Термоупругость локально нагретых ортотропных оболочек // Вісник Дніпропетр. ун-ту. – 2001. – Вип. 4, Т. 1. – С. 208-213.
3. Трайтак С.Д. Методы решения краевых задач в областях с многосвязной границей // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2003. – №4. – Т. 9. – С. 495-521.
4. Головач Н.П., Дияк І.І. Прямий метод граничних елементів чисельного розв'язування задачі термопружності // Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат. – Львів, 1996. – № 44. – С. 57-62.
5. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. – М., 1976. – 367 с.
6. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости: Учебное пособие. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
7. Звьоздочкіна О.А., Толок В.О. Розв'язок пружної задачі з нестаціонарним тепловим навантаженням для півплощини з включенням // Вісник Запорізького ун-ту, серія фіз.-мат. науки. – Запоріжжя, 1999. – №1. – С. 49-53.
8. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В МНОГОСВЯЗНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ЧТО ВОЗНИКАЕТ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕПЛОВОЙ И МЕХАНИЧЕСКОЙ НАГРУЗОК

В работе рассмотрена задача классической несвязанной термоупругости о вдавливании нагретого штампа в полуплоскость с квадратным отверстием, на границе которого заданы механическая нагрузка и температурные условия. Сформулированы основные принципы методики, позволяющей решать такие задачи для полуограниченных тел. Исследовано поле напряжений, возникающее в рассматриваемой области под действием нестационарной температуры при граничных условиях гармонического типа. Проведен анализ полученных результатов для рассмотренной области при решении несвязанной термоупругой и упругой задач.