63. ПРО НАЛЕЖНІСТЬ ЦІЛИХ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ДО КЛАСІВ ЗБІЖНОСТІ

Оксана Мулява
Національний університет харчових технологій

Вступ. Нехай

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k \tag{1}$$

\- ціла трансцендентна функція, $M(r,f)=\max\{|f(z)|:\ |z|=r\}$ і $\mu(r,f)=\max\{|a_k|:\ k\geq 0\}$ - максимальний член ряду (1). Через Ω позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty;+\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є додатною, неперервною і зростає до $+\infty$ на $(-\infty;+\infty)$. Як і в $[1]$, будемо говорити , що ціла функція (1) належить до Φ -класу збіжності, якщо

$$\int_{r_0}^{+\infty}\frac{\Phi'(\ln r)\ln M(r,f)}{\Phi^2(\ln r)}d\ln r<+\infty. \tag{2}$$

Зауважимо, що якщо функція (1) має порядок $\rho\in(0;+\infty)$, то, вибираючи $\Phi(\sigma)=e^{\rho\sigma}$, з (2) отримуємо

$$\int_{r_0}^{+\infty}\frac{\ln M(r,f)}{r^{\rho+1}}dr<+\infty, \tag{3}$$

тобто f належить до валіронового класу збіжності.

Методи. В $[1]$ отримано такий результат.

Твердження 1. Нехай $\Phi\in\Omega$ і

$$\int_{r_0}^{+\infty}\frac{\Phi'(\sigma)\ln\Phi'(\sigma)}{\Phi^2(\sigma)}d\sigma<+\infty\cdot \tag{4}$$

Тоді для того, щоб функція (1) належала до Φ -класу збіжності, необхідно і досить, щоб

$$\int_{r_0}^{+\infty}\frac{\Phi'(\ln r)\ln\mu(r,f)}{\Phi^2(\ln r)}d\ln r<+\infty \tag{5}$$

З іншого боку, з теореми 1 з $[3]$ випливає наступне твердження.

Твердження 2. Нехай $\Phi\in\Omega$ і

$$0<h\le\frac{\Phi''(\sigma)\Phi(\sigma)}{(\Phi'(\sigma))^2}\le H<+\infty, \tag{6}$$

Тоді для того, щоб було правильне співвідношення (5), необхідно, а у випадку, коли $|a_k|/|a_{k+1}|\nearrow+\infty$ при $k_0\le k\to\infty$, і достатньо, щоб

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Phi'\left(\frac{1}{k}\ln\frac{1}{|a_k|}\right)}<+\infty. \tag{7}$$

Зауважимо, що з умови (6) випливає умова (4).

Результати.. Тут буде перенесено цей результат на цілі функції багатьох комплексних змінних. Нехай $Z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$, а $\overline{G}_{\mathbb{R}}\in\mathbb{C}^n$ - сім'я замкнених полікругових областей, залежна від параметра $R>0$ і має таку властивість: $Z\in\overline{G}_{\mathbb{R}}$ тоді і тільки тоді, коли $Z/R\in G_1=\overline{G}$.

Позначимо $d_{\overline{G}}(k_1,...,k_n)=\max\left\{|z|_1^{k_1}...|z|_n^{k_n} : Z\in\overline{G}\right\}$ і вважатимемо. що якщо $Z=(z_1,...,z_n)\in\overline{G}$, то $|z_j|\ge l>0$ для всіх $j=1,...,n$.

Нехай

$$f(Z)=f(z_1,z_2,...,z_n)=\sum_{k_1...k_n=0}^{\infty} a_{k_1,...,k_n} z_1^{k_1}...z_n^{k_n} \tag{8}$$

- ціла трансцендентна функція. Приймемо $M_{\overline{G}}(R,f)=\max\left\{|f(Z)|: Z\in\overline{G}_R\right\}$ і будемо говорити, що функція (8) належить до Φ -класу збіжності $(\Phi\in\Omega)$, якщо

$$\int_{R_0}^{\infty}\frac{\Phi'(\ln R)\ln M_{\overline{G}}(R,f)}{\Phi^2(\ln R)}d\ln R<+\infty . \tag{9}$$

Теорема 3. Нехай функція $\Phi\in\Omega$ задовольняє умови (6). а $\Phi'(\sigma+O(1))=O(\Phi'(\sigma))$ і $\Phi'(\sigma)=O(\Phi'(\sigma+O(1)))$ при $\sigma\to+\infty$. Приймемо $A_k=\max\left\{|a_{k_1,...,k_n}| : k_1+...+k_n=k\right\}$. Тоді для того, щоб функція (8) належала до Φ - класу збіжності, необхідно. а у випадку, коли $|A_k|/|A_{k+1}|\nearrow+\infty$ при $k_0\le k\to\infty$, і достатньо, щоб

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{\Phi'\left(\frac{1}{k}\ln\frac{1}{|A_k|}\right)}<+\infty . \tag{10}$$

Наведемо деякі наслідки доведеної теореми:

Наслідок 1. Нехай функція $\Phi\in\Omega$ задовольняє умови (6) і $\Phi'(\sigma+O(1))=O(\Phi'(\sigma))$ і $\Phi'(\sigma)=O(\Phi'(\sigma+O(1)))$ при $\sigma\to+\infty$. Тоді. якщо функція (8) належить до Φ -класу збіжності, то

$$\sum_{k_1...k_n=0}^{\infty}\frac{1}{\Phi'\left(\frac{1}{k_1+...+k_n}\ln\frac{1}{|a_{k_1,...,k_n}|}\right)}<+\infty .$$

Умови теореми і наслідку 1 задовольняє функція $\Phi(\sigma)=e^{\rho\sigma},\quad 0<\rho<+\infty$. Тому для функцій скінченного порядку правильні наступні твердження.

Наслідок 2. Нехай $A_k=\max\left\{|a_{k_1,...,k_n}| : k_1+...+k_n=k\right\}$. Тоді для того, щоб

$$\int_{R_0}^{+\infty}\frac{\ln M_{\overline{G}}(R,f)}{R^{\rho+1}}dR<+\infty , \tag{11}$$

необхідно, а у випадку, коли $|A_k|/|A_{k+1}|\nearrow+\infty$ при $k_0\le k\to\infty$, і достатньо, щоб

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |A_k|^{\rho/k} < +\infty .$$

Наслідок 3. Якщо виконується умова (11), то

$$\sum_{k_1 \ldots k_n = 0}^{\infty} \left| a_{k_1,\ldots,k_n} \right|^{\rho/(k_1+\ldots+k_n)} < +\infty$$

щоб одержати подібні результати для цілих функцій скінченого логарифмічного порядку $p \in (1; +\infty)$, досить вибрати $\Phi(\sigma) = \sigma^p$ для $\sigma \geq \sigma_0$.

Висновки. Доведено теорему, яка є перенесенням результатів з $[3]$ на цілі функції багатьох комплексних змінних та наведено деякі її наслідки..

ЛІТЕРАТУРА

1. Filevych, P. V.On a convergence class entire functions / P. V. Filevych, M. M. Sheremeta // Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz 53 Ser. Rech. Deform. – 2003. – Vol. 40. – P. 5-16.

2. Mulyava, O. M. On a convergence class for Dirichlet series / O. M. Mulyava, M.M. Sheremeta // Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz 50 Ser. Rech. Deform.-2000. – Vol. 30. – P. 23-30.