

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА **з елементами масообміну** **(теорія і практика процесу)**

За редакцією проф. Кулінченка В.Р.

*Затверджено Міністерством освіти і науки
молоді та спорту України як підручник
для студентів вищих навчальних закладів*

Київ, Фенікс 2014

ЗМІСТ

Передмова.....	3
Частина перша. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ.....	4
<i>Розділ 1. Теорія теплопровідності. Загальні дані.....</i>	<i>4</i>
1.1. Температурне поле, градієнт температури і закон Фур'є.....	4
1.2. Теплопровідність речовин.....	5
1.3. Диференціальне рівняння теплопровідності.....	6
1.4. Умови однозначності.....	9
<i>Розділ 2. Стаціонарна теплопровідність.....</i>	<i>11</i>
2.1. Загальне диференціальне рівняння одномірного температурного поля для необмеженої плоскої стінки, необмеженого циліндра і кулі.....	11
2.2. Температурне поле в тілі з постійно діючим внутрішнім джерелом теплоти, питома потужність якого – довільна функція температури.....	12
2.3. Температурне поле в тілі з теплопровідністю, яка залежить від температури, і з постійно діючим внутрішнім джерелом теплоти, питома потужність якого – довільна функція координати.....	14
2.4. Температурне поле в тілі з постійно діючим внутрішнім джерелом теплоти, питома потужність якого – функція температури виду $q_v = w_0(1 + bt)$	16
2.5. Температурне поле в складовій системі з постійними внутрішніми джерелами теплоти.....	18
2.6. Ребристі поверхні.....	22
2.7. Двомірне температурне поле.....	28
<i>Розділ 3. Нестационарні процеси теплопровідності.....</i>	<i>37</i>
3.1. Основні методи розв'язку рівняння нестационарного режиму теплопровідності.....	37
3.2. Нестационарні процеси теплопровідності в необмеженій пластині.....	47
3.3. Кількість теплоти, що сприймається пластиною під час нагрівання.....	55
3.4. Вплив чисел Біо і Фур'є на температурне поле в пластині.....	55
3.5. Теплопровідність у тілах, утворених перерізом пластин.....	57
3.6. Температурне поле пластини з внутрішніми джерелами теплоти.....	59
3.7. Нестационарне температурне поле безмежно довгого циліндра.....	60
3.8. Нестационарне температурне поле кулі.....	66
3.9. Регулярний режим процесів теплопровідності.....	68
3.10. Хвильові теплові процеси.....	72
3.11. Числові методи розв'язку задач теплопровідності.....	74
3.12. Дослідження теплопровідності методом аналогії.....	81
Частина друга. КОНВЕКТИВНИЙ ТЕПЛООБМІН.....	86
<i>Розділ 4. Основні положення конвективного теплообміну.....</i>	<i>86</i>
4.1. Основні положення і визначення.....	86
4.2. Диференціальні рівняння теорії конвективного теплообміну.....	88
4.3. Умови однозначності конвективного теплообміну.....	99
<i>Розділ 5. Основи теорії подібності і розмірності.....</i>	<i>100</i>

5.1. Значення теорії подібності для теорії теплообміну.....	101
5.2. Поняття про подібність фізичних явищ.....	102
5.3. Умови подібності фізичних явищ.....	106
5.4. Числа і рівняння подібності конвективного теплообміну.....	110
5.5. Метод аналізу розмірності.....	118
<i>Розділ 6. Конвективний теплообмін при вимушеному русі рідини</i>	124
6.1. Основи теорії пограничного шару.....	124
6.1.1. Особливості руху в'язкої рідини при великих числах Re.	
Пограничний шар.....	124
6.1.2. Диференціальні рівняння динамічного, теплового і дифузійного пограничних шарів.....	125
6.1.3. Система рівнянь плоского стисливого пограничного шару з урахуванням дифузійних і хімічних реакцій.....	128
6.1.4. Потрійна аналогія.....	135
6.1.5. Інтегральні співвідношення імпульсів, енергії і дифузії.....	135
6.2. Вимушена конвекція при ламінарному режимі течії.....	143
6.2.1. Теплообмін і масообмін при обтіканні пластини потоком нестисливої рідини.....	143
6.2.2. Автомодельні рішення рівнянь динамічного, теплового і дифузійного пограничного шару.....	151
6.2.3. Теплообмін на криволінійній поверхні.....	156
6.2.4. Теплообмін при надзвукових швидкостях руху газу.....	160
6.2.5. Точне рішення рівняння енергії пограничного шару стисливого газу при $dr/dx = 0$ і лінійній залежності в'язкості від температури.....	168
6.2.6. Наближений метод розв'язку за допомогою інтегрального співвідношення енергії.....	171
6.2.7. Тертя і теплообмін на проникливій поверхні.....	172
6.2.8. Теплообмін за наявності хімічних реакцій.....	180
6.3. Вимушена конвекція при турбулентному русі рідини.....	187
6.3.1. Виникнення турбулентної течії.....	187
6.3.2. Рівняння турбулентного пограничного шару.....	189
6.3.3. Турбулентна дотична напрута, тепловий і дифузійний потоки.....	190
6.3.4. Напівемпіричні теорії турбулентного переносу	191
6.3.5. Розподіл швидкостей, температур і концентрацій в плоскому пограничному шарі.....	194
6.3.6. Закони тертя, теплообміну і масообміну.....	198
6.3.7. Вплив стисливості і неізотермічності на закони тертя, теплообміну і масообміну в турбулентному пограничному шарі.....	202
6.3.8. Граничні відносні закони тертя, теплообміну і масообміну в турбулентному пограничному шарі.....	205
6.4. Методи розрахунку теплообміну в турбулентному пограничному шарі.....	212
6.4.1. Розв'язок рівняння енергії турбулентного пограничного шару на непроникливій поверхні.....	213

6.4.2. Розв'язок рівняння енергії турбулентного пограничного шару на проникливій поверхні.....	216
6.5. Теплообмін при вимушеній течії рідини в трубах.....	217
6.5.1. Теплообмін при вимушеному ламінарному русі рідини в трубах.....	221
6.5.2. Теплообмін при турбулентній течії рідини в трубах.....	244
6.6. Теплообмін при поперечному обтіканні труб.....	266
6.7. Методи теплового захисту тіл від дії високоентальпійного газу.....	271
6.7.1. Конвективний теплообмін при наявності газових завіс.....	271
6.7.2. Пористе охолодження.....	283
6.8. Теплообмін при течії розріджених газів.....	285
<i>Розділ 7. Теплообмін при природній конвекції.....</i>	<i>293</i>
7.1. Теплообмін при природній конвекції у великому об'ємі.....	293
7.1.1. Вертикальна пластина.....	294
7.1.2. Горизонтальний циліндр.....	304
7.2. Теплообмін при вільному русі в обмеженому об'ємі.....	307
7.2.1. Довгі горизонтальні шари.....	307
7.2.2. Вертикальні шари.....	310
Частина третя. ТЕПЛООБМІН ПРИ ЗМІНІ АГРЕГАТНОГО СТАНУ. КОНДЕНСАЦІЯ.....	313
<i>Розділ 8. Поверхневі явища і фазова рівновага.....</i>	<i>313</i>
8.1. Капілярні ефекти першого і другого роду.....	313
8.2. Фазова рівновага.....	320
8.3. Швидкість росту тонкої плівки конденсату.....	326
<i>Розділ 9. Крайові задачі тепломасообміну при конденсації.....</i>	<i>330</i>
9.1. Диференціальні рівняння.....	330
9.2. Умови взаємодії фаз.....	336
9.3. Безрозмірні змінні величини.....	345
<i>Розділ 10. Теплообмін при плівковій конденсації нерухомої чистої пари.....</i>	<i>349</i>
10.1. Ламінарна течія плівки.....	349
10.1.1. Вертикальна плоска поверхня.....	349
10.1.2. Вертикальна труба.....	352
10.1.3. Змінна температура поверхні стінки.....	355
10.1.4. Горизонтальна труба.....	358
10.1.5. Вплив змінності фізичних властивостей конденсату.....	358
10.1.6. Вплив конвективного теплопереносу і інерційних сил.....	361
10.1.7. Вплив хвильового руху плівки.....	363
10.1.8. Порівняння аналітичних і дослідних даних.....	366
10.2. Турбулентна течія конденсату.....	369
10.3. Вплив перегріву і вологості пари.....	372
10.4. Конденсація з натіканням конденсату.....	373
10.5. Конденсація на ребристих поверхнях.....	374
10.6. Конденсація з відсмоктуванням конденсату.....	376
10.7. Відвід конденсату.....	378

<i>Розділ 11. Теплообмін при плівковій конденсації рухомої пари.....</i>	<i>380</i>
11.1. Міжфазне тертя.....	380
11.2. Конденсація на плоскій пластині.....	385
11.3. Зрив конденсату.....	409
11.4. Конденсація в трубі.....	415
11.5. Конденсація на трубі.....	425
11.6. Конденсація на пучці труб.....	432
<i>Розділ 12. Теплообмін при конденсації пари з паро-газової суміші.....</i>	<i>435</i>
12.1. Одномірні задачі дифузії.....	435
12.2. Конденсація на вертикальній стінці.....	438
12.3. Аналогія процесів теплообміну і масообміну.....	441
12.4. Тепломасообмін при конденсації в елементах теплообмінних пристроїв.....	444
<i>Розділ 13. Теплообмін при крапельній конденсації пари</i>	<i>448</i>
13.1. Ліофобізація.....	448
13.2. Механізм процесу.....	449
13.3. Статистичні характеристики.....	453
13.3.1. Рівняння теплообміну.....	453
13.3.2. Рівняння рівноваги.....	454
13.3.3. Рівняння народження крапель.....	457
13.4. Швидкість росту краплі.....	458
13.5. Розподіл крапель за розмірами.....	463
13.6. Теплообмін при конденсації нерухомої чистої пари.....	464
13.7. Теплообмін при конденсації рухомої пари.....	471
13.8. Конденсація пари з паро-газової суміші.....	475
<i>Розділ 14. Теплообмін при конденсації пари на струмені рідини</i>	<i>479</i>
14.1. Тепловий баланс струменя.....	479
14.2. Ламінарний струмінь.....	480
14.3. Турбулентний струмінь.....	489
<i>Розділ 15. Теплообмін при конденсації пари на диспергованому струмені рідини.....</i>	<i>499</i>
15.1. Швидкість прогрівання краплі.....	499
15.2. Статистичні характеристики.....	502
15.3. Теплообмін при конденсації на диспергованій рідині.....	510
<i>Розділ 16. Теплообмін при конденсації суміші парів.....</i>	<i>514</i>
16.1. Особливості процесу.....	514
16.2. Плівкова модель.....	516
16.3. Неплівкове утворення конденсату.....	526
Частина четверта. ТЕПЛООБМІН ПРИ ЗМІНІ АГРЕГАТНОГО СТАНУ. КИПІННЯ.....	528
<i>Розділ 17. Рівновага системи рідина–пара і виникнення в ній парової фази.....</i>	<i>528</i>
17.1. Умови рівноваги.....	528
17.2. Стійкість фаз.....	530

17.3. Утворення парової фази в об'ємі рідини.....	532
17.4. Виникнення зародків на твердій поверхні.....	539
17.5. Особливості поведінки паро-газових зародків.....	544
17.6. Початок кипіння на поверхні нагріву.....	546
<i>Розділ 18. Ріст парових бульбашок.....</i>	<i>555</i>
18.1. Динаміка бульбашок, які ростуть в об'ємі рідини.....	555
18.2. Швидкість росту бульбашок на твердій поверхні.....	565
<i>Розділ 19. Внутрішні характеристики бульбашкового кипіння.....</i>	<i>573</i>
19.1. Відривний розмір парової бульбашки.....	573
19.2. Частота пароутворення.....	579
19.3. Дослідження роботи одиничного центру генерації пари.....	581
19.4. Осереднені внутрішні характеристики чистих рідин і розчинів.....	586
19.5. Співставлення дослідних даних різних авторів.....	595
19.5.1. Вплив тиску на процес кипіння.....	595
19.5.2. Вплив густини теплового потоку.....	598
<i>Розділ 20. Інтенсивність теплообміну при кипінні в умовах</i>	
<i>вільного руху</i>	<i>603</i>
20.1. Загальні дані.....	603
20.2. Криві кипіння.....	606
20.3. Коливання температури поверхні теплообміну і киплячої рідини	
біля центра пароутворення.....	608
20.4. Вплив властивостей поверхні нагріву на теплообмін	
при кипінні.....	612
20.5. Інтенсивність теплообміну при кипінні у великому об'ємі.	
Розрахункові рівняння.....	616
<i>Розділ 21. Окремі випадки кипіння.....</i>	<i>628</i>
21.1. Неізотермічні поверхні нагріву.....	628
21.2. Тепловіддача в пучках гладких і ребристих труб.....	629
21.3. Кипіння у тонких плівках рідини.....	634
21.4. Кипіння у різних гравітаційних полях.....	637
21.5. Кипіння при низьких приведених тисках.....	641
21.6. Суміші і розчини.....	646
<i>Розділ 22. Криза тепловіддачі при кипінні в умовах вільного руху.....</i>	<i>654</i>
22.1. Рівняння подібності для визначення критичних	
теплових навантажень.....	654
22.2. Узагальнення даних для критичного теплового потоку.....	656
22.3. Криза тепловіддачі при раптовому підвищенні	
теплового навантаження.....	661
<i>Розділ 23. Плівкове кипіння.....</i>	<i>667</i>
23.1. Механізм процесу і інтенсивність теплообміну.....	667
23.2. Вплив сил гравітації на $q_{кр1}$	671
23.3. Друга критична густина теплового потоку.....	672
<i>Розділ 24. Теплообмін при кипінні в трубах і каналах</i>	<i>674</i>
24.1. Загальні дані і параметри процесу.....	674

24.2. Гідродинамічний режим і інтенсивність теплообміну при кипінні у трубах.....	678
24.3. Розрахунок оптимального гідродинамічного режиму.....	683
24.4. Теплообмін при кипінні в трубах і каналах.....	687
<i>Розділ 25. Теплообмін при кипінні рідини, не догрітої до температури насичення</i>	704
25.1. Особливості процесу пароутворення і формування пристінного двофазного шару при поверхневому кипінні.....	704
25.2. Інтенсивність теплообміну при поверхневому кипінні в умовах вимушеного руху рідини.....	711
<i>Розділ 26. Погіршені режими тепловіддачі у двофазному потоці</i>	720
26.1. Виникнення погіршеного режиму тепловіддачі.....	720
26.2. Температурний режим парогенеруючих труб при погіршених режимах.....	727
<i>Розділ 27. Критичні теплові потоки при об'ємному і поверхневому кипінні рідини в трубах</i>	736
27.1. Особливості переходу до плівкового кипіння в трубах. Вплив масової швидкості і паровмісту на $q_{кр1}$	736
27.2. Вплив діаметра, довжини і стану поверхні труби на $q_{кр1}$ при об'ємному і поверхневому кипінні.....	739
27.3. Розрахункові залежності по критичним тепловим потокам при кипінні в трубах.....	742
27.4. Криза кипіння в кільцевих каналах і при повздовжньому омиванні пучка труб.....	747
27.5. Критичні теплові потоки і коефіцієнти тепловіддачі при кипінні розчинів, які не утворюють азеотропні суміші.....	751
27.6. Теплообмін при кипінні розчинів, які утворюють азеотропні суміші.....	758
Частина п'ята. ТЕПЛОВЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ	761
<i>Розділ 28. Променевий теплообмін</i>	761
28.1. Основні поняття і визначення.....	762
28.2. Закони теплового випромінювання.....	765
28.2.1. Закон Планка.....	765
28.2.2. Закон зміщення Віна.....	767
28.2.3. Закон Стефана – Больцмана.....	768
28.2.4. Закон Ламберта (закон косинуса).....	771
28.2.5. Закон Кірхгофа.....	773
28.3. Радіаційний теплообмін між тілами, розділеними діатермічним (прозорим) середовищем.....	776
28.3.1. Теплообмін між двома паралельними пластинами.....	776
28.3.2. Радіальний теплообмін між тілом і оболонкою.....	779
28.3.3. Захисні екрани.....	780
28.3.4. Радіаційний теплообмін між довільними поверхнями нагріву.....	782

28.4. Радіаційний теплообмін у поглинальних і випромінюючих середовищах.....	785
28.4.1. Особливості випромінювання у напівпрозорих середовищах.....	785
28.4.2. Об'ємне випромінювання і поглинання.....	788
28.4.3. Перенесення енергії випромінювання у напівпрозорому середовищі.....	791
28.4.4. Ступінь чорноти і поглинальна спроможність газового об'єму.....	795
28.4.5. Радіаційний теплообмін між газом і оболонкою.....	802
28.4.6. Особливості теплообміну в камерах згорання.....	805
28.5. Складний теплообмін.....	808
ДОДАТКИ.....	810
Д.1. Різні способи задавання граничних умов.....	810
Д.2. Формули температурного поля і густини теплового потоку для необмеженої плоскої стінки при $q_v = \text{const}$ (рис.2.1).....	811
Д.3. Формули температурного поля лінійного теплового потоку для необмеженого полого циліндра при $q_v = \text{const}$ (рис.2.2).....	812
Д.4. Формули температурного поля і поля теплового потоку для пологої кулі при $q_v = \text{const}$ (рис.2.3).....	815
Д.5. Коефіцієнти теплопровідності матеріалів покривного шару.....	817
Д.6. Значення поправок при врахуванні покривного шару.....	817
Д.7. Гранична товщина ізоляційних конструкцій паропроводів.....	818
Д.8. Коефіцієнти теплопровідності теплоізоляційних матеріалів.....	818
Д.9. Коефіцієнти теплопровідності сталі.....	820
Д.10. Коефіцієнти теплопровідності металів і сплавів.....	820
Д.11. Коефіцієнти теплопровідності сплавів.....	821
Д.12. Фізичні властивості сухого повітря ($B = 760$ мм рт. ст. = 101 кПа).....	822
Д.13. Температура кипіння води у залежності від тиску.....	823
Д.14. Фізичні властивості води на лінії насичення.....	823
Д.15. Фізичні властивості водяної пари на лінії насичення.....	824
Д.16. Фізичні властивості води при тиску $p = 24$ МПа.....	825
Д.17. Фізичні властивості води при тиску $p = 30$ МПа.....	827
Д.18. Підвищення температури кипіння для чистих і нечистих цукрових розчинів у порівнянні з температурою кипіння води.....	830
Д.19. Густина водних розчинів цукру при температурі 0...60 °С.....	830
Д.20. Питома теплоємність водних розчинів цукру при 20 °С.....	832
Д.21. Теплопровідність водних розчинів цукру.....	832
Д.22. Динамічна в'язкість цукрових розчинів у залежності від концентрації і температури.....	832
Д.23. Динамічна в'язкість цукрових розчинів у залежності від чистоти ($\alpha_{\text{нас}} = 1,00$).....	834
Д.24. Вплив температури и концентрації на коефіцієнт об'ємного розширення водних розчинів цукру.....	834
Д.25. Фізичні властивості диоксиду вуглецю при тиску $p = 10$ МПа.....	835
Д.26. Фізичні властивості димових газів ($B = 0,101$ МПа і вмісті газів:	

CO ₂ =13%, H ₂ O=11%, N ₂ =76%).....	837
Д.27. Фізичні властивості трансформаторного масла в залежності від температури.....	837
Д.28. Фізичні властивості масла МС-20 в залежності від температури.....	838
Д.29. Фізичні властивості масла МК в залежності від температури.....	838
Д.30. Фізичні властивості дизельного масла в залежності від температури.....	839
Д.31. Фізичні властивості турбінного масла УТ в залежності від температури.....	839
Д.32. Фізичні властивості ртуті і деяких розплавлених металів.....	839
Д.33. Области застосування сталей.....	840
Д.34. Коефіцієнти теплопровідності і лінійного розширення деяких сталей і чавунів.....	841
Д.35. Область застосування кольорових металів і сплавів.....	842
Д.36. Коефіцієнти теплопровідності сплавів кольорових металів.....	843
Д.37. Залежність густини ρ , кг/м ³ полікарбонату різної молекулярної маси від температури.....	844
Д.38. Залежність теплоємності c_p , кДж/(кг·К) полікарбонату різної молекулярної маси від температури.....	845
Д.39. Залежність теплопровідності λ , Вт/(м·К) полікарбонату різної молекулярної маси від температури.....	845
Д.40. Залежність температуропровідності $a \cdot 10^7$, м ² /с полікарбонату різної молекулярної маси від температури.....	846
Д.41. Залежність густини ρ , кг/м ³ полісульфону різної молекулярної маси від температури.....	846
Д.42. Залежність теплоємності c_p , кДж/(кг·К) полісульфону різної молекулярної маси від температури.....	848
Д.43. Залежність теплопровідності λ , Вт/(м·К) полісульфону різної молекулярної маси від температури.....	848
Д.44. Залежність температуропровідності $a \cdot 10^9$, м ² /с полісульфону різної молекулярної маси від температури.....	849
Д.45. Фізичні властивості полімерних зв'язуючих склопласти.....	850
Д.46. Сортамент труб сталевих водогазопровідних (розміри в мм) ГОСТ 3262-75.....	851
Д.47. Сортамент труб сталевих безшовних гаряче деформованих (приведений неповністю) ГОСТ 8732-78.....	852
Д.48. Сортамент труб сталевих безшовних холоднодеформованих.....	853
Д.49. Сортамент труб сталевих електрозварних прямошовних.....	853
Д.50. Сортамент труб сталевих електрозварних зі спіральним швом загального призначення.....	854
Д.51. Ступінь чорноти повного випромінювання різних матеріалів.....	855
Д.52. Термінологічний довідник.....	857
Д.53. Довідник літературних першоджерел, які знайшли відображення	
917	
у книзі (розрахований для спеціалістів галузі, студентів, магістрів, аспірантів і докторантів).....	872
Рекомендована література для курсу.....	909

*Присвячується 130-ти річчю
від дня створення
Національного Університету
Харчових Технологій*

ПЕРЕДМОВА

Теорія тепло і масообміну розглядає один із важливих розділів технічної теплофізики. Вона ґрунтується на таких дисциплінах, як фізика, термодинаміка і газова динаміка. Але інтенсивний розвиток теорії теплообміну, пов'язаний в основному з вимогами нової техніки і технології, призводить до того, що практично будь-який, навіть самий новий підручник, не в змозі представити останні досягнення в області теорії теплообміну і ознайомити з сучасними методами розрахунку теплообміну, які використовуються в провідних конструкторських бюро країни.

Виходячи з цього, при викладі основ теорії теплообміну ми намагалися в міру можливості врахувати останні тенденції в цій області. Так, наприклад, в традиційному розділі «Теплопровідність» викладені як методи числового розв'язку диференціальних рівнянь теплопровідності, так і загальні аналітичні методи.

Розділ «Конвективний теплообмін в однорідному середовищі» ґрунтується на теорії теплового пограничного шару, яка в останній час отримала інтенсивний розвиток. Емпіричні критеріальні формули приводяться тільки у тих випадках, коли теорія пограничного шару не дає задовільних результатів (в області відриву пограничного шару, під час поперечного обтікання труб, під час руху рідини в шорстких трубах та ін.).

Розглянуто процеси теплообміну при надзвукових і гіперзвукових швидкостях і хімічних реакціях. Досить докладно розглянуті методи теплового і хімічного захисту (плівкове і пористе охолодження), які представляють великий інтерес для засобів нової техніки і технології.

До розділу «Теплообмін шляхом природної конвекції» включено методи числового розв'язку системи диференціальних рівнянь.

На закінчення автори щиро дякують рецензентів докторів технічних наук, Майстренка О.Ю., Півня О.Н., Шурчкову Ю.О.

*Професори: Віталій Кулінченко, Олександр Шевченко,
Володимир Піддубний*

ЧАСТИНА ПЕРША ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ

Теплопровідністю називається *молекулярний перенос теплоти в суцільному середовищі*. Цей процес виникає внаслідок нерівномірного розподілу температур в середовищі. У цьому випадку теплота передається за рахунок безпосереднього контакту між частинками, які мають різну температуру, що веде до обміну енергії між молекулами, атомами чи вільними електронами.

Розділ 1. ТЕОРІЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ. ЗАГАЛЬНІ ДАНІ

1.1. Температурне поле, градієнт температури і закон Фур'є

Температурним полем тіла (чи системи тіл) називається сукупність значень температури, яка береться по його об'єму у довільний момент часу. Математично поле температур можна розглядати у вигляді рівняння $F(t, x, y, z, \tau) = 0$.

В інженерній практиці приходиться мати справу як з *нестационарними*, так і зі *стационарними* температурними полями. Перше з цих полів змінюється як в просторі, так і в часі, а друге залежить тільки від просторових координат.

Зміна температурного поля в просторі спостерігається тільки в напрямках, що пересікають поверхні з однакою температурою (ізотермічні поверхні); при цьому найбільша зміна має місце в напрямку нормалі до ізотермічної поверхні (рис.1.1).

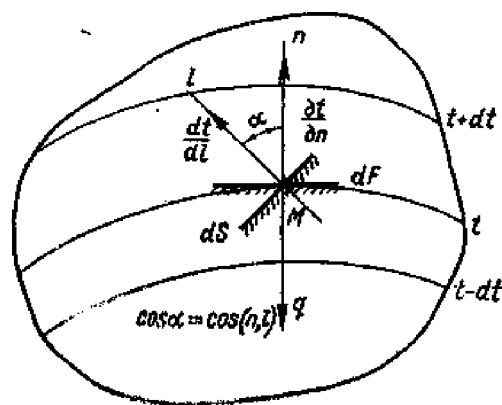


Рис.1.1. До визначення градієнта температур і формулювання закону Фур'є

му напрямку. Вважається $\text{grad } t$ додатним, якщо він спрямований в бік збільшення температури.

У 1804 р. французький вчений Біо висказав гіпотезу, згідно з якою кількість теплоти, що проходить через любую ізотермічну поверхню твердого тіла (нерухомого газу чи рідини) в напрямку другої ізотермічної поверхні, повинно

Границя

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} = \bar{l}_n \frac{\partial t}{\partial n} = \text{grad } t \quad (1.1)$$

називається в теорії теплообміну градієнтом температури, де \bar{l}_n – орт (одичинний вектор) нормалі; n – нормаль до ізотермічної поверхні. Градієнт температури представляє собою вектор, спрямований по нормалі до ізотермічної поверхні і чисельно рівний частинній похідній від температури по цьому

бути прямо пропорціональне часу, площі ізотермічної поверхні, різниці температур і обернено пропорційним відстані між цими ізотермічними поверхнями. У математичній формі це можна записати так:

$$d^2\bar{Q}_t = -\lambda \ell_n \frac{\partial t}{\partial n} dF dt, \quad (1.2)$$

де \bar{Q}_t – вектор кількості теплоти, що проходить крізь тіло, Дж; λ – теплопровідність, Вт/(м·К); F – площа (рис.1.1), перпендикулярна до нормалі ізотермічної поверхні м². (Знак “-” вводиться в формулу тому, що вектор кількості теплоти у відповідності з другим законом термодинаміки повинен бути спрямованим в бік зменшення температури).

Формула (1.2), не дивлячись на те, що вона є узагальненням гіпотези Біо, відома зараз як закон Фур’є.

Величина

$$q = \frac{d^2\bar{Q}_t}{dF dt} = \frac{dQ}{dF} = -\lambda \ell_n \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (1.3)$$

де $Q = d\bar{Q}_t/dt$ – вектор теплового потоку, Дж/с; називається в теорії теплообміну інтенсивністю теплового потоку, Вт/м².

З рис.1.1 видно, що похідна температури по напрямку ℓ зв’язана з градієнтом температури очевидним співвідношенням

$$\frac{dt}{d\ell} = \frac{\partial t}{\partial n} \cos(n, \ell), \quad (1.4)$$

де $\cos(n, \ell)$ – косинус кута між нормаллю до ізотермічної поверхні n і напрямком ℓ .

Необхідно зауважити, що похідна температури по напрямку ℓ визначається через похідні температури за декартовими координатами формулою:

$$\frac{dt}{d\ell} = \frac{\partial t}{\partial x} \cos(x, \ell) + \frac{\partial t}{\partial y} \cos(y, \ell) + \frac{\partial t}{\partial z} \cos(z, \ell), \quad (1.5)$$

де $\cos(x, \ell)$, $\cos(y, \ell)$ і $\cos(z, \ell)$ – косинуси кутів між напрямком ℓ і координатними осями x , y і z .

З урахуванням (1.4) закон Фур’є (1.2) можна записати в такому вигляді:

$$dQ = -\lambda \frac{dt}{d\ell} ds, \quad (1.6)$$

де $ds = dF \cos(n, \ell)$ – елементарна площадка, перпендикулярна до напрямку ℓ .

1.2. Теплопровідність речовин

Теплопровідність λ у формулі (1.2) з математичної точки зору являє собою коефіцієнт пропорційності, чия роль криється в рівнянні розмірності лівої і правої частин закону Фур’є і вимірюється в Вт/(м·К).

З фізичної точки зору теплопровідність – теплофізична характеристика речовини. Для різних речовин при однакових градієнтах температури, поверхнях

За час τ кількість теплоти, яка проходить через тіло, визначається тільки коефіцієнтом λ . Чим більша теплопровідність, тим більшою буде властивість речовини проводити теплоту, і навпаки. Кажучи іншими словами, теплопровідність представляє собою теплофізичний параметр, який визначає здатність тіла проводити теплоту.

Для одного і того ж матеріалу теплопровідність змінюється в досить широкій межі, при цьому характер зміни визначається багатьма факторами: температурою, кількістю домішок, наявністю вологи, тиском та ін. Зазвичай, залежність λ від перерахованих факторів не підлягає строгому аналітичному опису, виходячи з цього основним джерелом отримання достовірних значень теплопровідності залишається експеримент.

1.3. Диференціальне рівняння теплопровідності

Диференціальним рівнянням теплопровідності називається виражений в математичній формі перший закон термодинаміки для тіл, процес взаємодії яких з навколишнім середовищем відбувається без здійснення зовнішньої роботи.

Для складання диференціального рівняння теплопровідності розглянемо нерівномірно нагріте тіло, наведене на рис.1.2. Вважаємо, що поверхня цього тіла S , а об'єм V .

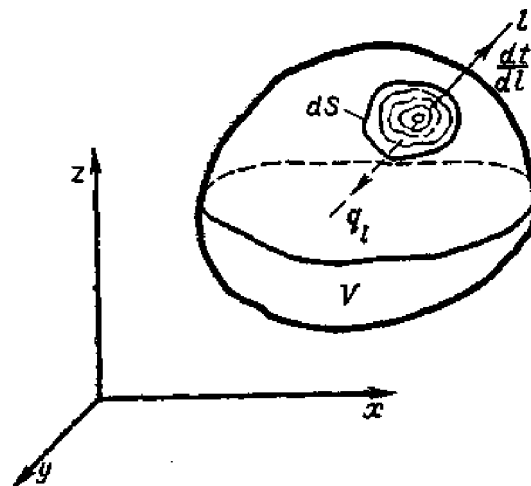


Рис.1.2. До виводу диференціального рівняння теплопровідності

Якщо температура тіла внаслідок певних причин зміниться і стане відмінною від температури навкілля, між тілом і середовищем починається процес теплообміну. Перший закон термодинаміки для цього випадку запишеться в такому вигляді:

$$Q_{ст} + Q_V = \Delta U + W, \quad (1.7)$$

де $Q_{ст}$ – кількість теплоти, отримане (чи віддане) тілом через поверхню; Q_V – кількість теплоти, яка виділяється (чи поглинається) в тілі за рахунок дії

внутрішніх джерел (чи стоків) теплоти; ΔU – зміна внутрішньої енергії; W – робота, виконана тілом в навколишньому середовищі, чи навпаки. У відповідності з прийнятим визначенням механічна робота дорівнює нулю $W=0$.

Кількість теплоти $Q_{ст}$ можна вирахувати за формулою:

$$Q_{ст} = \int_{s_0}^{\tau} \int dQ dt, \quad (1.8)$$

а Q_v визначається за співвідношенням:

$$Q_v = \int_{v_0}^{\tau} \int q_v dV dt, \quad (1.9)$$

де q_v – питома потужність внутрішніх джерел (стоків) теплоти, Вт/м³.

Зміна внутрішньої енергії тіла

$$\Delta U = \int_{v_0}^{\tau} \int c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dV dt. \quad (1.10)$$

З урахуванням рівнянь (1.8), (1.9) і (1.10) залежність (1.7) набуває вигляду

$$\int_{s_0}^{\tau} \int dQ dt + \int_{v_0}^{\tau} \int q_v dV dt = \int_{v_0}^{\tau} \int c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dV dt. \quad (1.11)$$

Перший член лівої частини (1.11) у відповідності з формулами (1.5) і (1.6) можна представити в розгорнутому вигляді:

$$\int_{s_0}^{\tau} \int dQ dt = - \int_{s_0}^{\tau} \int \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \cos(x, \ell) + \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \cos(y, \ell) + \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \cos(z, \ell) \right] dS dt. \quad (1.12)$$

Застосувавши до (1.12) перетворення Остроградського, отримаємо:

$$\int_{s_0}^{\tau} \int dQ dt = \int_{v_0}^{\tau} \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] dV dt. \quad (1.13)$$

Далі підставляємо (1.13) в (1.11), отримаємо:

$$\int_{v_0}^{\tau} \int \left[c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) - q_v \right] dV dt = 0. \quad (1.14)$$

Якщо всі члени рівняння (1.14) – безперервні функції координат і часу, то інтеграл дорівнює нулю при рівності нулю підінтегрального виразу. У цьому разі

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q_v. \quad (1.15)$$

Диференціальне рівняння (1.15) називається диференціальним рівнянням Фур'є – Кірхгофа, яке виявляє зв'язок між часовою і просторовою зміною температури у довільній точці тіла. При усталеній теплопровідності рівняння (1.15) спрощується:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_v \rho}, \quad (1.16)$$

де $a = \lambda / (c_v \rho)$ – ізохорна температуропровідність, m^2/s .

Ізохорна температуропровідність, яка входить в (1.16) є теплофізичним параметром. Вона характеризує спроможність речовини вирівнювати температуру. Це значить, що тіла, які мають велику температуропровідність, нагріваються (охолоджуються) скоріше в порівнянні з тілами, що мають меншу температуропровідність.

Рівняння (1.16) є лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку параболічного типу. Для анізотропних тіл, у яких теплопровідність залежить від напрямку, рівняння Фур'є – Кірхгофа набуває наступного вигляду:

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) + q_v. \quad (1.17)$$

Якщо величини λ і c_v в анізотропному тілі не залежать від температури, то рівняння (1.17) після перетворення, приймаючи що $x_i = x'_i \sqrt{a}$ можна привести до вигляду (1.16).

Диференціальне рівняння теплопровідності (1.15) має вид: в циліндричній системі координат (рис.1.3, а)

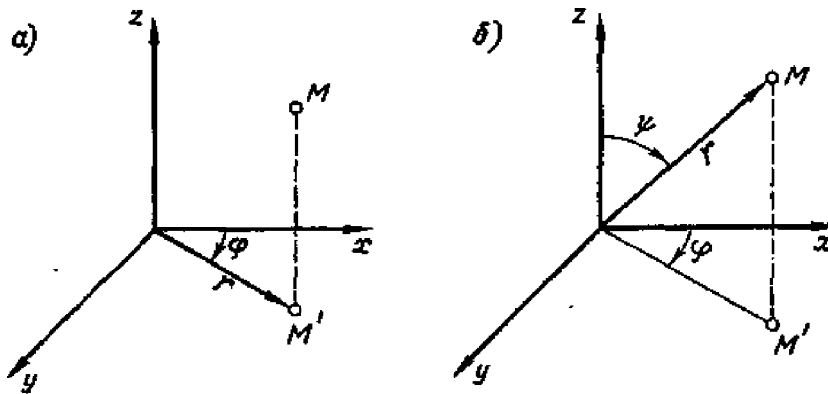


Рис.1.3.Циліндричні (а) і сферичні (б) координати

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q_v \quad (1.18)$$

і при $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_v \rho}; \quad (1.19)$$

у сферичній системі координат (рис.1.3, б)

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{2\lambda}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\lambda \sin \psi \frac{\partial t}{\partial \psi} \right) + q_v \quad (1.20)$$

і при $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial t}{\partial \psi} \right) \right] + \frac{q_v}{c_v \rho}. \quad (1.21)$$

1.4. Умови однозначності

Отримане диференціальне рівняння (1.15) описує множину явищ теплопровідності. Щоб із безмежної кількості цих явищ виділити одне і дати його повний математичний опис, до диференціального рівняння теплопровідності необхідно додати умови однозначності, які містять у собі геометричні, фізичні, часові і граничні умови.

Геометричні умови визначають форму і розміри тіла, в якому відбувається досліджуваний процес.

Фізичні умови задаються теплофізичними параметрами тіла λ , c_v і розподілом внутрішніх джерел теплоти.

Часові (початкові) умови містять розподіл температури в тілі в початковий момент часу.

Граничні умови визначають особливості проходження процесу на поверхні тіла. Граничні умови можуть задаватися декількома способами.

Граничні умови I роду. У цьому випадку задається розподіл температури на поверхні тіла для кожного моменту часу:

$$t_{ct} = f(x_{ct}, y_{ct}, z_{ct}, \tau), \quad (1.22)$$

де t_{ct} – температура поверхні тіла; x_{ct} , y_{ct} , z_{ct} – координати поверхні тіла.

В окремих випадках, коли температура на поверхні тіла не змінюється в часі $t_{ct} = f(x_{ct}, y_{ct}, z_{ct})$, і якщо вона постійна на поверхні, то $t_{ct} = \text{const}$.

Граничні умови II роду. У цьому випадку задається величина теплового потоку для кожної точки поверхні тіла в довільний момент часу, цебто

$$q_{ct} = f(x_{ct}, y_{ct}, z_{ct}, \tau). \quad (1.23)$$

В окремих випадках, наприклад при нагріванні металевих виробів у високотемпературних печах $q_{ct} = \text{const}$.

Граничні умови III роду. У цьому випадку задаються температури середовища t_0 і умови теплообміну цього середовища з поверхнею тіла.

Процеси теплообміну між середовищем і тілом є винятково складними і залежать від багатьох факторів. Докладніше вони розглянуті у другій частині книги. Для опису інтенсивності теплообміну між поверхнею тіла і середовищем використовується гіпотеза Ньютона – Ріхмана, згідно з якою

$$q_{ct} = \alpha(t_{ct} - t_0), \quad (1.24)$$

де α – коефіцієнт пропорційності, названий коефіцієнтом тепловіддачі, Вт/(м²·К).

Як видно із формули (1.24), коефіцієнт тепловіддачі чисельно рівний кількості теплоти, яка віддається (чи сприймається) одиницею поверхні тіла в

одиницю часу при різниці температур між поверхнею тіла і навколишнім середовищем, рівною 1 град.

З урахуванням (1.24) і (1.3) гранична умова III роду записується так:

$$\left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_{ст} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_{ст} - t_0). \quad (1.25)$$

У разі, коли коефіцієнт тепловіддачі має великі значення (наприклад, під час кипіння рідини на поверхні тіла), граничні умови III роду переходять в граничні умови I роду, тому що у цьому випадку температура поверхні тіла стає практично рівною температурі рідини.

Граничні умови IV роду формуються на основі рівності теплових потоків, які проходять крізь прилеглі одна до іншої поверхні тіл, тоді

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_{ст1} = \lambda_2 \left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_{ст2}. \quad (1.26)$$

При досконалому тепловому контакті обидва тіла на поверхні дотику мають однакову температуру, це значить, що ізотерми безперервно переходять з одного тіла до іншого, при цьому градієнти температур у цих точках задовольняють умову (1.26)

Диференціальне рівняння (1.15) разом з умовами однозначності дають повне математичне формулювання конкретної задачі теплопровідності. Розв'язок цієї задачі може виконуватися аналітичним, чисельним чи дослідним методами. В останньому випадку використовуються методи подібності і аналогій.