2016

НАУКОВІ ПРАЦІ

НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Том 22 № 1

Журнал
«Наукові праці Національного університету харчових технологій»
засновано в 1993 році

КИЇВ ✧ НУХТ ✧ 2016

УДК 519.21

METHODS FOR SOLVING PROBLEMS IN GEOMETRIC THEORY OF PROBABILITY ON A PLANE

O. Gerasin
National University of Food Technologies

Key words:
Buffon-Sylvester Problem
(n-1)-convex sets
Integral geometry
Geometrical probability

Article history:
Received 01.11.2015
Received in revised form 24.11.2015
Accepted 18.12.2015

Corresponding author:
O. Gerasin
E-mail:
agerasin@ukr.net

ABSTRACT

Some questions of integral geometry and geometric probability are investigated in the article. The problem considered by J.J. Sylvester got the name of Buffon-Sylvester Problem. R. Ambartzumian gave proof of a generalized version of this problem under the condition "If the sets are in general position so that no three endpoints are collinear". It turns out that the use of the (n-1)-convex sets method leads to considerable simplifications. In our case we don't assume any conditions about the position of the sets. The new geometric probability formulas are got and a practical algorithm for the calculation is created.

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ НА ПЛОЩИНІ

О.І. Герасін
Національний університет харчових технологій

У статті досліджено питання інтегральної геометрії і геометричної теорії ймовірностей. Розглянуто варіант узагальненої задачі Бюфона-Сильвестра. Використано апарат (n-1)-опуклих множин, для зняття умови множини знаходяться в загальному положенні. Отримано нові формули геометричної теорії ймовірностей і створено практичний алгоритм для обчислення задач геометричної ймовірності на площині, який використовує властивості 1-опуклих множин.

Ключові слова: *задача Бюфона-Сильвестра, (n-1)-опуклі множини, інтегральна геометрія, геометричні ймовірності.*

Постановка проблеми. А. Реньї (Reny, 1955) і А. Часар (Csaszar, 1955) побудували аксіоматичну теорію ймовірностей, що була використана в задачах геометричної ймовірності. Теорія спирається на аксіоматику А.Н. Колмогорова в комбінації з ідеєю умовних імовірностей, властивості яких постулюються [8].

Оскільки міра геометричних множин встановлена, розв'язування окремих задач проходить без виникнення парадоксів або інших труднощів, які пов'я-

зані з аксіоматизацією. А. Пуанкаре показав, що для того, щоб міра прямих, які перетинають обмежену опуклу множину на площі, була інваріантна відносно поворотів і трансляцій, вона повинна бути пропорційною периметру опуклої множини. Припустимо, що коефіцієнт пропорційності дорівнює одиниці, тому міра прямих, що перетинають, наприклад, коло, дорівнює $2\pi R$.

У 1891 р. Дж. Сильвестр [11] спробував розв`язати задачу, яка стала відома пізніше під назвою «задачі Бюфона-Сильвестра»: на площині зафіксовано n голок $g_1 ... g_n$ в загальному положенні (тобто жодні три вершини голок не лежать на одній прямій). Знайти міру множини $\bigcup_1^n [g_i]$ і $\bigcap_1^n [g_i]$, де $[g]$ — сукупність прямих, що розділяють кінці g.

Дж. Сильвестр довів, що шукані інваріантні міри «виявляються діофантовими лінійними функціями сторін повної $2n$-кутної фігури, вершинами якої служать n пар кінців голок». Повністю задача була розв'язана Р.В. Амбарцумяном [1]. Ним же була розв'язана задача, в якій множину голок було замінено набором опуклих множин. Для множин, що знаходяться у загальному положенні, Р.В. Амбарцумяном була знайдена формула [1], що повністю описує ситуацію. Коли ж множини знаходяться в незагальному положенні, виникають ситуації, що не охоплюються формулою Амбарцумяна.

Мета статті. Знайти міру прямих, що перетинають декілька обмежених множин, та міру прямих, що не перетинають ці множини, але перетинають опуклу оболонку цих множин.

Виклад основного матеріалу. У процесі досліджень, з'ясувалося, що природним апаратом для вирішення задач, пов'язаних з інваріантними мірами, є (n-1)-опуклі множини, які запропонував у 1987 р. Ю.Б. Зелінський [7]. Визначення основних понять, що використовуються в дослідженні, можна знайти в [2—5]. Нам знадобиться поняття (n-1)-опуклої множини [7] та опуклої оболонки [9].

Означення 1. Множина $A \subset R^n$ має назву (n-1)-опукла, якщо через будь-яку точку $x \in R^n / A$ можна провести гіперплощину H, що не перетинає A.

Означення 2. Перетин усіх опуклих множин, що містять задану множину $A \subset R^n$, називають опуклою оболонкою множини A і позначають так:

$$\hat{A} = conv(A) = \bigcap_{K \supset A} K,$$

де K є опуклою множиною.

Так само можна визначити поняття (n-1)-опуклої оболонки.

Означення 3. Перетин усіх (n-1)-опуклих множин, що містять задану множину $A \subset R^n$, називають (n-1)-опуклою оболонкою множини A і позначають так:

$$\hat{A}_{(n-1)} = conv_{(n-1)}(A) = \bigcap_{K \supset A} K,$$

де K є (n-1)-опукла множина.

Використаємо властивості (n-1)-опуклих множин, що досліджені у [2—3].

Означення 4. Нехай $A \subset R^n$ — множина, що складається з двох непорожніх опуклих компонент A_1 і A_2, тоді для опуклої оболонки $\hat{A}$ множини A існує рівність [2]:

$$\hat{A} = conv(A_1 \bigcup A_2) = \bigcup_{\substack{x_1 \in A_1 \\ x_2 \in A_2}} x_1 x_2 .$$

Для кожного відрізка $x_1 x_2$ визначимо точки $f_1 \in \partial \overline{A_1}$ і $f_2 \in \partial \overline{A_2}$, які найбільш близько розташовані до точок $x_1 \in \overline{A_1}$ і $x_2 \in \overline{A_2}$ відповідно. Визначимо множини F_i, $i = 1, 2$ як сукупність точок, побудованих для будь-яких відрізків $x_1 x_2$.

У [2, 3] визначені властивості множин F_i, $i = 1, 2$ для (n-1)-опуклих множин. Наведені нижче теореми 1, 2 характеризують F-множини (n-1)-опуклих множин.

Теорема 1. (Теорема 2 [2]). Нехай $A \subset R^n$ — (n-1)-опукла множина, що складається з двох непорожніх опуклих компонент A_1 *і* A_2. Якщо A_2 — обмежене опукле тіло, то множина $\partial A_2 \setminus F_2$ непорожня і межа множини F_2 гомеоморфна кулі D^{n-1}. Для множин, що не є (n-1)-опуклими, це невірно.

Теорема 2. Нехай $A \subset R^n$ — (n-1)-опукла множина, що складається з двох непорожніх компонент — обмежених опуклих тіл A_1 і A_2, тоді межові точки множин F_i, $i = 1, 2$ не можуть бути точками гладкості [9, с. 101].

Критерій (n-1)-опуклості для множини, що складається з двох не порожніх компонент — обмежених опуклих тіл A_1 *і* A_2, надано у [2].

Теорема 3. (Теорема 5 [2]). Замкнена множина $A \subset R^n$, що складається з двох опуклих тіл — компонент A_1 *і* A_2, і в яких через кожну межову точку проходить хоча б одна гіперплощина, опорна до цієї компоненти та не перетинає іншу компоненту, завжди є (n-1)-опуклою множиною. У статті розглядається 1-опуклі множини як варіант (n-1)-опуклих множин на площині, коли $n = 2$.

Нехай K множина на площині, що складається з двох обмежених компонент K_1 *і* K_2, і нехай L_1 *і* L_2 — довжини їхніх меж. Назвемо зовнішнім шківом C_Z множин L_1 *і* L_2 межу опуклої оболонки $K_1 \bigcup K_2$. Зовнішній шків інтуїтивно можна уявити, як замкнений натягнутий шнур, що охоплює K_1 *і* K_2.

Якщо $K_1 \bigcap K_2 = \varnothing$ (рис. 1), маємо змогу розглядати внутрішній шків C_V, отриманий як замкнений натягнений шнур, що охоплює K_1 *і* K_2, але такий, що має точку перетину O. Точки A, B, C, D — суть точки дотику дотичних AB і CD відповідно до множин K_1 *і* K_2.

Позначимо як L_Z, L_V довжину, відповідно, зовнішнього та внутрішнього шківів C_Z, C_V, тоді міра множини всіх прямих, що розділяють множини K_1 *і* K_2, дорівнює:

$$\mu(> K_1, K_2 <) = L_V - (L_1 + L_2). \quad (1)$$

Доведення представлено у [10].

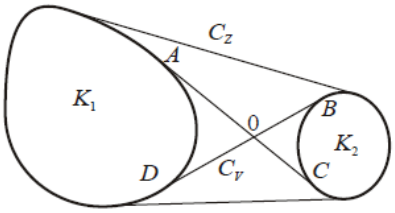

Рис. 1. Зовнішній і внутрішній шківи

Зауваження 1. З рис. 1 випливає, що міра множини всіх прямих, що розділяють множини K_1 *і* K_2, дорівнює сумі довжин двох дотичних, мінус довжини дуг $\cup AD$, $\cup BC$. Дуги $\cup AD$, $\cup BC$ гладкі криві, що належать до F-множин 1-опуклої оболонки множини $K_1 \bigcup K_2$. З теореми 3 випливає, що кожна опорна пряма до точок цих дуг не перетинає внутрішніх точок K_1 *і* K_2:

$$\mu(> K_1, K_2 <) = |AC| + |BD| - (|\cup AD| + |\cup BC|). \quad (2)$$

Після цього отримаємо:

а) міра множини всіх прямих, що перетинають множину K_1 і не перетинають K_2, дорівнює $L_1 - (L_V + L_Z)$; міра множини всіх прямих, що перетинають множину K_2 і не перетинають K_1, дорівнює $L_2 - (L_V + L_Z)$;

б) міра множини всіх прямих, що перетинають множини K_1 і K_2, дорівнює $L_V - L_Z$;

в) міра множини всіх прямих, що перетинають хоча б одну з множин K_1 і K_2, дорівнює $L_1 + L_2 - (L_V - L_Z)$.

Остання формула в) випливає з теорії міри:

$$\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \bigcap B).$$

У термінах геометричної ймовірності ці результати можуть бути сформульованими таким чином: нехай K_1 *і* K_2 — дві обмежені множини на площині. Якщо H' — випадково вибрана пряма, що перетинає опуклу оболонку множин $K_1 \bigcup K_2$, то:

а) ймовірність того, що пряма H' перетинає множину K_1 і не перетинає K_2, дорівнює:

$$P(H' \bigcap L_1 \neq \varnothing, H' \bigcap L_2 = \varnothing) = \frac{L_1 - (L_V + L_Z)}{L_Z};$$

і, аналогічно, що пряма H' перетинає множину K_2 і не перетинає K_1, дорівнює:

$$P(H' \bigcap L_2 \neq \varnothing, H' \bigcap L_1 = \varnothing) = \frac{L_2 - (L_V + L_Z)}{L_Z};$$

б) ймовірність того, що пряма H' перетинає множини K_1 *і* K_2 дорівнює:

$$P(H' \bigcap K_1 \bigcap K_2 \neq \varnothing) = \frac{L_V - L_Z}{L_Z};$$

в) ймовірність того, що пряма H' розділяє множини K_1 *і* K_2, дорівнює:

$$P(H' \bigcap L_2 = \varnothing,\ H' \bigcap L_1 = \varnothing) = \frac{L_V - (L_1 + L_2)}{L_Z};$$

г) ймовірність того, що пряма H' перетинає хоча б одну з множин K_1 *і* K_2, дорівнює:

$$P(H' \bigcap K_1 \bigcup K_2 \neq \varnothing) = \frac{L_1 + L_2 - (L_V - L_Z)}{L_Z}.$$

Розв'язок узагальненої задачі Сильвестра.

Нехай K сукупність опуклих множин і K_i $i = 1, n$, її компоненти, що не перетинаються на площині. Розглянемо тільки ті прямі, які мають не менше двох точок дотику до множини K (рис. 2), а також випадок, коли на дотичній прямій знаходиться сторона багатокутника або лінійна частина межі опуклої множини. У результаті отримаємо зв'язок голок і дотичних прямих на площині, де голка — відрізок на площині, який поєднує компоненти K. Пряма, на якій знаходиться голка, має назву афінної оболонки голки.

Розглянемо множину прямих дотичних до компонент K. Оскільки умова про «загальне положення» ігнорується, то множина прямих складається з чотирьох категорій.

Будь-яка пряма H' поділяє площину на дві напівплощини $\bar{H}_1$ і $\bar{H}_2$. Нехай підмножина $K' \subset K$ знаходиться на напівплощині $\bar{H}_1$ і торкається H', а $K'' \subset K$ знаходиться на напівплощині $\bar{H}_2$:

1. Якщо множина $K'' \subset K$ порожня, то можна стверджувати, що пряма H' має тип Z. Тобто множина Z — це множина прямих, дотичних до межі $conv(K)$. Голки, що лежать на прямій Z, мають той же тип, що й пряма.

2. Якщо множина $K'' \subset K$ не порожня, але її компоненти не торкаются прямої H', то можна стверджувати, що пряма H' має тип F. Голки, що лежать на прямій F, мають той же тип, що й пряма.

3. Якщо множина $K'' \subset K$ не порожня, та її компоненти торкаются прямої H', маємо два випадки. Дві компоненти знаходяться в різних напівплощинах (рис. 2, тип V) пряма H' має тип V. Тільки одна голка, що поєднує дві компоненти з різних напівплощин, має назву голка типу V.

4. Якщо множина $K'' \subset K$ не порожня, її компоненти торкаються прямої H' і три компоненти по черзі знаходяться в різних напівплощинах (рис. 2, тип C), то можна стверджувати, що пряма H' має тип C. Голки, що лежать на прямій C, мають той же тип, що й пряма.

Тип Z, або F Тип V Тип C

Рис. 2. Типи дотичних прямих

Нехай сукупність K_i $i=1,n$ багатокутники. У випадку, коли хоч одна з множин не є багатокутником, граничний перехід дає бажаний результат. На рис. 3 зображено систему з двох багатокутників.

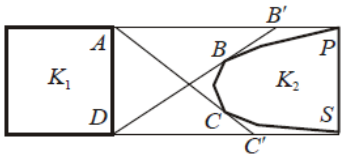

Рис. 3. Система з двох багатокутників

З формули 2 отримуємо формулу для міри прямих, що розділяють багатокутники K_1 і K_2:

$$\mu(>K_1,K_2<)=|AC|+|BD|-(|AD|+|\vee BC|), \quad (3)$$

де $\vee BC$ — ламана; а $|\vee BC|$ — довжина ламаної.

Криволінійні трикутники $BB'P$ і $CC'S$ мають таку властивість: крізь будь-яку точку цих трикутників не можна провести пряму, що не перетинає K_1 і K_2, тому ці трикутники не належать 1-опуклій оболонці $K_1 \bigcup K_2$, а ламані BP і CS не належать до межі 1-опуклої оболонки $K_1 \bigcup K_2$. Тобто 1-опукла оболонка $K_1 \bigcup K_2$ — це сукупність прямокутника K_1 і семикутника $BB'PSC'C$. Ламана BC входить до *F*-множини 1-опуклої оболонки $K_1 \bigcup K_2$.

Повернемось до розгляду сукупності K_i $i=1,n$. Розглянемо множину прямих $\{H'\}$, що розділяють компоненти K на дві підмножини $K'' \subset K$ і $K' \subset K$, але не торкаються K. Слід зазначити, що прямі належать до одного атома, якщо вони розділяють однакові підмножини K. Якщо множина $K'' \subset K$ порожня, то прямі належать до нульового атома $\{H'\}_0$. Апарат 1-опуклих множин дозволяє спрощено знайти міру кожного атома. Мінімальна сукупність голок, довжини яких беруть участь в обчисленні, називатиметься *z*-каркас атома. *z*-каркас атома $\{H'\}_0$ — межа множини $conv(K)$, тобто сукупність голок типу *Z* і сторін багатокутників K_i $i=1,n$, що знаходяться на прямих типу *Z*.

Розглянемо довільний атом. Опуклу оболонку множин K_i, що знаходяться з одного боку, назвемо K_1, з іншого — K_2 (рис. 3), де *z*-каркас довільного атому визначає певну сукупність голок. Це дві дотичні типу *V* (позначимо V_1 і V_2), що перетинають атом, і ламані F_1 і F_2. Тобто сукупність дотичних типу V і сторін багатокутників K_i, що входять до відповідних *F*-множин. Формулу (2) можна записати у такому вигляді:

$$\mu(>K_1,K_2<)=|V_1|+|V_2|-(|F_1|+|F_2|). \quad (4)$$

Розглянемо сукупність усіх атомів множини K_i $i=1,n$ і відповідні *z*-каркаси цих атомів. Множини *z*-каркасів різних атомів не перетинаються. Об'єднання z-каркасів усіх атомів множини K можна називати *z*-каркасом множини *K*. До нього належать усі голки, що лежать на прямий *Z* та *F* і мають той самий тип, що й прямі. До z-каркасу входить тільки по одній голці з кожної прямої типу *V*. Це голки типу *V*. Інші голки, що належать

прямій V, а також голки, що належать прямій C, до z-каркасу не входять. Тобто z-каркас складається з голок і урізаних багатокутників K_i^U $i=1, n$. Урізаний багатокутник K_i^U — це ламана, що створена такими сторонами відповідного багатокутника K_i, що їх афінна оболонка не перетинає внутрішні точки K і не належить до прямих типу V і C.

Якщо якась компонента не є багатокутником і межа опуклої множини D_i — крива лінія, тоді урізана компонента D_i^U не має таких дуг, у точках гладкості яких дотична перетинає внутрішні точки K або збігається з прямими типу V і C.

З викладеного вище випливають такі твердження1, 2, 3.

Твердження 1. Для сукупності K_i $i=1, n.$ — n багатокутників, що не перетинаються на площині, міра множини всіх прямих, що перетинають опуклу оболонку множин $\bigcup K_i$ $i=1, n$ і не перетинають жодної множини K_i $i=1, n$, дорівнює:

$$\mu(>\bigcup_i K_i\, i=1\,,\, n<) = \sum_V |g_i| - (\sum_F |\vee K| + \sum_F |g_i|), \tag{4}$$

де $\sum_T |g_i|$ — сума довжин голок типу T. T набуває значення V, Z, F, $\sum_F |\vee K|$ — сума довжин сторін багатокутників K типу F.

Твердження 2. Для сукупності K_i $i=1, n.$ — n багатокутників, що не перетинаються на площині, міра множини всіх прямих, що перетинають хоча б одну компоненту K, дорівнює:

$$\mu(> H' \cap (\bigcup_i K_i\, i=1\,,\, n) \neq \varnothing <) = \sum_Z |g_i| + \sum_{i=1}^{n} \left|K_i^U\right| + \sum_F |g_i| - \sum_V |g_i|, \tag{5}$$

де $\sum_{i=1}^{n} \left|K_i^U\right|$ — сума периметрів урізаних багатокутників.

При процедурі граничного переходу будь-яка (небагатокутна) множина D_i повинна бути замінена послідовністю $D_i^{(n)}$, $D_i^{(n)} \subset D_i$ багатокутників, що апроксимують D_i. Далі записується диофантове розкладення [1, с. 110] для міри $\mu(f(D_i^{(n)}))$ і обчислюється його границя, коли $n \to \infty$.

Твердження 3. Нехай множина D — система опуклих областей D_i $i=1, n$, що не перетинаються на площині, тоді міра множини всіх прямих, що перетинають опуклу оболонку множин $\bigcup D_i$ $i=1, n$ і не перетинають жодної множини D_i $i=1, n$, дорівнює:

$$\mu(>\bigcup_i D_i\, i=1\,,\, n<) = \sum_V |g_i| - (\sum_F |\cup D| + \sum_F |g_i|), \tag{6}$$

де $\sum_F |\cup D|$ — сума довжин дуг областей D, що належать до F-множин.

Міра множини всіх прямих, що перетинають хоча б одну компоненту D, дорівнює:

$$\mu(< H' \cap (\bigcup_i D_i\, i=1\,,\, n >) \neq \varnothing <) = \sum_Z |g_i| + \sum_{i=1}^{n} \left| D_i^U \right| - \sum_V |g_i|, \qquad (7)$$

де $\sum_K \left| P_i^U(D) \right|$ — сума периметрів урізаних областей D.

Приклад 1. Нехай множина складається з трьох квадратів, довжиною сторони 4. Координати вершин першого квадрата K_1 є $A(2,4)$, $B(6,4)$, $C(6,0)$, $D(2,0)$. Центр квадрата $C_1^*(4,2)$. Другий квадрат $K_2 = A_1B_1C_1D_1$ отримано паралельним переносом до центру $C_2^*(14,2)$, а третій $K_3 = A_2B_2C_2D_2$ до центру $C_3^*(9,-2)$.

Сторони DC, A_2B_2, D_1C_1 належать прямій типу C, тому в обчисленнях не беруть участь.

Голки типу S мають довжину:

$$|BD_2| = |A_1C_2| = \sqrt{8^2+1} = \sqrt{65}\,,\ |CA_1| = |BD_1| = \sqrt{4^2+6^2} = \sqrt{52}\,.$$

Голки типу F мають довжину:

$$|BB_2| = |A_1A_2| = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}\,,\ |BC| = |A_2D_2| = |A_1D_1| = |B_2C_2| = 4\,.$$

F-множина $\vee K = BC \cup A_2D_2 \cup A_1D_2 \cup B_2C_2$. Сума $\sum_F |\vee K| = 16$.

Спочатку обчислимо множини всіх прямих, що перетинають опуклу оболонку множин $\bigcup K_i$ $i = 1,\ 3$ і не перетинають жодної множини K_i.

Формула 4 має вигляд:

$$\mu(> \bigcup_i K_i\, i=1\,,\, 3 <) = \sum_V |g_i| - (\sum_F |g_i| + \sum_F |\vee K|) = 2(\sqrt{65} + \sqrt{52}) - 2(\sqrt{41} + 8)\,. \quad (8)$$

Визначимо міру множини всіх прямих, що перетинають хоча б одну компоненту K. Формула 5 має вигляд:

$$\mu(> H' \cap (\bigcup_i K_i\, i=1\,,\, n) \neq \varnothing <) = \sum_Z |g_i| + \sum_{i=1}^{n} \left| K_i^U \right| + \sum_F |g_i| - \sum_V |g_i|,$$

K_1^U — ламана $DABC$; K_2^U — ламана $D_1A_1B_1C_1$; K_3^U — ламана $B_2C_2D_2A_2$. Відсутні сторони знаходяться на прямій типу C (афінна оболонка відрізка DC_1). Зовнішні голки, які не належать K, це BA_1, $|BA_1| = 6$, C_1C_2, D_2D, $|C_1C_2| = |D_2D| = \sqrt{41}$.

Оскільки $|BB_2| = |A_1A_2| = \sqrt{41}$, то $\sum_F |g_i| = 2\sqrt{41}$, $\sum_{i=1}^{3} \left| K_i^U \right| = 36$. Звідси

$$\mu(< H' \cap (\bigcup_i K_i\, i=1\,,\, 3 >) \neq \varnothing <) = 4\sqrt{41} + 42 - 2(\sqrt{65} + \sqrt{52})\,.$$

Знаходимо опуклу оболонку K і її периметр:

$$\left| conv(> \bigcup_i K_i \, i=1\,,\,3 <) \right| = 26 + 2\sqrt{41} \ .$$

Основний результат: отримано формули і створено алгоритм обчислення задач геометричної ймовірності на площині.

Нехай H' — випадково вибрана пряма, що перетинає опуклу оболонку множини K. Ймовірність того, що:

- вона не перетинає жодної з компонент:

$$P(H' \cap K_1 = \varnothing, H' \cap K_2 = \varnothing, H' \cap K_3 = \varnothing) = \frac{\mu(> \bigcup_i K_i \, i=1\,,\,3 <)}{\left| conv(> \bigcup_i K_i \, i=1\,,\,3 <) \right|} =$$

$$= \frac{\sqrt{65} + \sqrt{52} - (\sqrt{41} + 8)}{13 + \sqrt{41}};$$

- вона перетинає хоча б одну компоненту:

$$P(H' \cap \bigcup K_i \, i = 1,3) = \frac{\mu(> H' \cap \bigcup_i K_i \, i=1\,,\,3 <)}{\left| conv(> \bigcup_i K_i \, i=1\,,\,3 <) \right|} = \frac{2\sqrt{41} + 21 - (\sqrt{65} + \sqrt{52})}{13 + \sqrt{41}}.$$

Висновки

У 1955 р. побудовано аксіоматичну теорію ймовірностей, що використовується в задачах геометричної ймовірності. Теорія спирається на аксіоматику Колмогорова в комбінації з ідеєю умовних ймовірностей, властивості яких постулюються. Міра геометричних множин встановлена, розв'язування окремих задач проходить без виникнення парадоксів або інших труднощів, які пов'язані з аксіоматизацією. В статті розглянуто варіант узагальненої задачі Бюфона-Сильвестра. Використано апарат (n-1)-опуклих множин, для зняття умови множини знаходяться в загальному положенні. Отримано нові формули геометричної теорії ймовірностей і створено практичний алгоритм для обчислення задач геометричної ймовірності на площині, який використовує властивості 1-опуклих множин.

Література

1. *Амбарцумян Р.В.* Введение в стохастическую геометрию / Р.В. Амбарцумян, Л. Мекке, Л. Штоян. — М.: Наука, 1989. — 400 с.

2. *Герасин А.И.* Об (n-1)-выпуклых множествах / А.И. Герасин // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии: Сб. Науч. Тр. Киев: Ин-тут математики АН УССР, 1988. — С. 8—14.

3. *Герасин А.И.* Обозримость (n-1)-выпуклых множеств / А.И. Герасин // Комплексный анализ, алгебра и топология: Сб. Науч. Тр. Киев: Ин-тут математики АН УССР. — 1990. — С. 20—28.

4. *Герасин А.И.* О мерах на (n-1)-выпуклых множествах / А.И. Герасин. — Киев, 1994. — 28 с.

5. *Герасин А.И.* Об инвариантных мерах / А.И. Герасин. — Киев, 1994. — 6 с.

6. *Герасін О.І.* Інваріантні міри на системах багатогранників /О.І. Герасін // Праці міжнародного геометричного центру. — 2014. — Том 7. — № 4.— С. 83—92.

7. *Зелинский Ю.Б.* Многозначные отображения в анализе / Ю.Б. Зелинский. — Киев: Наук. думка, 1993. — 264 с.

8. *Кендалл М.* Геометрические вероятности / М. Кендалл, П. Моран. — М. Наука, 1972. — 192 с.

9. *Лехтвейс К.* Выпуклые множества / К. Лехтвейс. — М.: Наука, 1965. — 336 с.

10. *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности / Л. Сантало. — М.: Наука, 1983. — 360 с.

11. *Sylvester J.J.* On a funicular solution of Buffon's "Problem of the needle" in its most general form / J.J. Sylvester // Acta Math. — 1890. — 14. — P. 185—205.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

А.И. Герасин
Национальный университет пищевых технологий

В статье исследованы некоторые вопросы интегральной геометрии и геометрической теории вероятностей. Рассмотрен вариант обобщенной задачи Бюфона-Сильвестра. Использован аппарат (n-1)-выпуклых множеств, для снятия условия множества находятся в общем положении. Получены новые формулы геометрической теории вероятностей и создан практический алгоритм для вычисления задач геометрической вероятности на плоскости, который использует свойства 1-выпуклых множеств.

Ключевые слова: *задача Бюффона-Сильвестра, (n-1)-выпуклые множества, интегральная геометрия, геометрическая вероятность.*