

СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ І ДИСИПАТИВНОГО РОЗІГРІВУ ШАРУВАТИХ МЕТАЛОКЕРАМІЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

(Представлено академіком НАН України
Я. М. Григоренком)

Конструкції п'єзоелектричних перетворювачів, які широко використовуються в ультразвуковій техніці, часто містять в собі металічні шари для підвищення жорсткості конструкції, а також для підводу електричної енергії. Такий перетворювач можна вважати неоднорідним тілом, яке складається із електропровідних пружних і діелектричних п'єзопружних шарів. Переміщення u_i та електричний потенціал φ в такому тілі повинні бути неперервними функціями координат x_i ($i=1, 2, 3$).

Метод скінченних елементів для розв'язання задач електропружності використовується в роботах [4, 5]. При гармонічних коливаннях ці задачі зводяться до мінімізації функціоналу [1]:

$$I(u_1, u_2, u_3, \varphi) = \int_V \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - D_i E_i - \rho \omega^2 u_i u_i) dV - \int_{S_\sigma} P_i u_i ds + \int_S q_s \varphi ds \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

при умові, що функції u_1, u_2, u_3, φ задовольняють задані граничні умови. Тут V — об'єм, який займає тіло; S_σ — поверхня тіла, на якій задані поверхневі навантаження; P_i — складові зовнішнього поверхневого навантаження; S — поверхня п'єзоматеріалу; q_s — густина вільного заряду на поверхні п'єзоматеріалу; ω — частота гармонічних коливань. Тензори напружень σ_{ij} , деформацій ε_{ij} і вектори електричної індукції D_i , електричної напруженості E_i зв'язані з вектором переміщень і електричним потенціалом залежностями [1]

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{mij} E_m, \quad D_i = e_{iki} \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{im}^s E_m, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad E_i = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (3)$$

де використано прийняті позначення для жорсткісних коефіцієнтів, п'єзоконстант і діелектричних проникливостей.

На зовнішній поверхні шаруватого тіла задаються механічні граничні умови — переміщення або розподілені навантаження на ділянках S_u і S_σ поверхні S

$$u_i = \bar{u}_i \text{ на } S_u, \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} n_j = P_i \text{ на } S_\sigma. \quad (5)$$

Електричним опором провідників будемо нехтувати і електричний потенціал в усіх точках провідника вважати однаковим. На провідниках може задаватись електричний потенціал або електричний заряд, який змінюється в часі за гармонічним законом; при цьому загальний заряд тіла будемо вважати незмінним. Граничні умови для п'єзокераміки на поверхні, яка є спільною границею S_i з провідником, будуть мати вигляд

$$\varphi = \varphi_i, \quad (6)$$

де φ_i — задане значення потенціалу на i -му провіднику, або

$$\int_{S_i} q_s ds = Q_i, \quad \varphi = \varphi_c, \quad (7)$$

де Q_i — заданий заряд на цьому провіднику; φ_c — невідоме значення потенціалу. На вільній поверхні п'єзоматеріалу приймається, що густина вільного заряду q_s дорівнює нулю. Це дозволяє записати функціонал (1) у вигляді

$$I(u_1, u_2, u_3, \varphi) = \int_V \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - D_i E_i - \rho \omega^2 u_i u_i) dV - \\ - \int_{S_\sigma} P_i u_i + \sum_{j=1}^N Q_j \varphi_j, \quad (8)$$

де N — кількість провідників з невідомим значенням потенціалу.

Оскільки електричне поле зосереджене в п'єзоматеріалі, то в електропровідних шарах скінченної товщини функціонал (8) не залежить від

$$I(u_1, u_2, u_3) = \int_V \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \rho \omega^2 u_i u_i) dV - \int_{S_\sigma} P_i u_i ds. \quad (9)$$

Напилені тонкі електропровідні шари враховуються тільки при формулюванні електричних граничних умов і не враховуються їх маса і механічний опір.

Розсіювання енергії і розігрів п'єзокерамічних тіл при коливаннях враховується шляхом використання в'язкопружних моделей матеріалу [2, 3], що приводить при гармонічних коливаннях до комплексного зображення характеристик матеріалу і амплітудних значень вектора переміщень і електричного потенціалу; при цьому питома потужність розсіювання енергії визначається за формулою

$$D = -\frac{\omega}{2} I_m(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + E_i D_i^*),$$

а для визначення температурного поля T чисельно розв'язується задача теплопровідності.

В задачах з граничними умовами вигляду (7) значення потенціалу φ на провіднику потрібно визначити. Для розв'язку такої задачі в роботі [4] пропонується підхід, при якому в рамках загальної процедури методу скінченних елементів будується розв'язуюча система алгебраїчних рівнянь без врахування умов екіпотенціальності, а потім ця система перетворюється шляхом виключення зайвих ступенів вільності. Одержана система рівнянь, залишаючись симетрично, має менший порядок, але ширина стрічки ненульових елементів при цьому суттєво збільшується. В роботі [6] для реалізації граничних умов (7) запропоновано в скінченних елементах для діелектрика, які прилягають до екіпотенціальної поверхні, використати пробні функції, які задовольняють умови сталості потенціалу вздовж екіпотенціальної поверхні, що приводить до тієї ж системи розв'язуючих рівнянь.

Цей самий результат можна одержати прямим використанням звичайного підходу методу скінченних елементів, при цьому гранична умова (7) враховується при визначенні глобального вектора невідомих для задачі — в ньому тільки одна невідома зображує потенціал в усіх вузлах на екіпотенціальній поверхні. Вигляд глобальної матриці системи рівнянь, яка відповідає цьому вектору, залежить від порядку нумерації невідомих в ньому. Стрічкову форму матриці, яка необхідна для ефективного розв'язку задачі, можна одержати тільки в окремих випадках. В загальному випадку можна одержати матрицю блоково-

го типу, коли тільки основний блок приводиться до стрічкового типу. Для цього невідомі для потенціалів на провідниках необхідно розташувати в кінці глобального вектора невідомих, а положення невідомих, які відповідають іншим ступеням вільності в вузлах сітки, вибрати із умови мінімуму ширини стрічки в блоці, що відповідає цим елементам.

Для апробації і оцінки точності описаного підходу розглянемо задачу про електропружні коливання тришарової пластини. Кругла стальна пластина радіусом 160 мм та товщиною 6 мм з обох боків

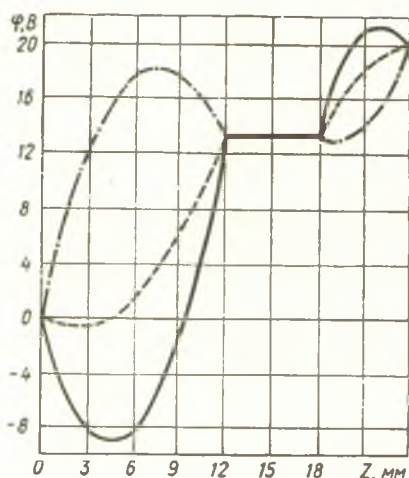


Рис. 1. Зміна електричного потенціалу за товщиною

покрита п'єзокерамічними шарами товщиною 6 і 12 мм. Матеріал шарів—ЦТС₇БС-2 [7]. Вектор попередньої поляризації в кожному шарі має нап-

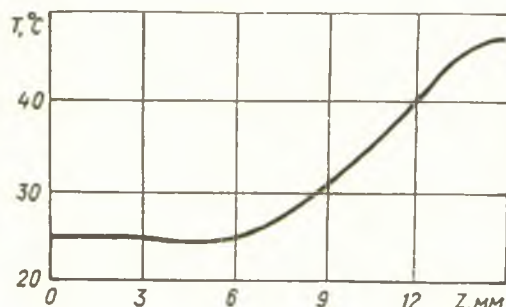


Рис. 2. Температура розігріву циліндричної оболонки

рям, перпендикулярний до поверхні стальної пластини, тобто п'єзокерамічні шари поляризовані в протилежних напрямках. Поверхневий електрод товстої пластини заземлений, електричний потенціал на ньому вважається рівним нулю. На поверхневому електроді тонкої п'єзокерамічної пластинки задана електрична напруга, яка змінюється за гармонійним законом з амплітудою 20 В.

Для розрахунків використовувався метод скінченних елементів з трикутними тривузловими елементами. При розбивці прямокутної області, яка відповідає половині діаметрального перерізу, сіткою з 413 вузлами для пластинки, жорсткозакріпленої по контуру визначена резонансна частота $f=1602,1$ Гц.

При вимушених коливаннях з частотою 1600 Гц, які викликані електричною напругою 20 В, на металевій пластині встановлюється напруга 13,42 В. Це значення використано при перевірці розрахунків, де при цьому напруга 13,42 В задавалась на внутрішніх поверхнях п'єзоелектричних шарів. Із збігу результатів випливає, що перетворення матриці системи розв'язуючих рівнянь, виконане в першому розрахунку, не приводить до втрати точності розв'язку. Ці ж результати для задачі по визначенню невідомого потенціалу на електроді можна одержати за методикою розрахунку п'єзокерамічних елементів з заданими значеннями потенціалу на електроді. Для цього замість металевого шару вводиться діелектричний шар, характеристики жорсткості c_{ij} якого збігаються з характеристиками жорсткості металу, а діелектричні проникливості ϵ_{ij} збільшуються на кілька порядків порівняно з їх величинами в суміжних п'єзокерамічних шарах. Одержане в розрахунках поле D в такій багатошаровій конструкції буде неперервним і в зовнішніх п'єзокерамічних шарах буде близьким до попереднього рівня, а поле E в фіктивному п'єзокерамічному шарі буде близьким до нуля.

Результати розрахунку, проведеного при $\epsilon_{11}^s = \epsilon_{33}^s = 10^9 \cdot \epsilon_0$, збіглися з результатами попередніх розрахунків. Це дає змогу використати

програми розв'язання задач електропружності з заданими електричними граничними умовами на електродах для розв'язування обернених задач, в яких визначається потенціал на електродах і виконується інтегральна гранична умова (7).

Зміна електричного потенціалу по товщині у трьох перерізах пластини при $R=0$, $R=80$ мм та $R=160$ мм наведена на рис. 1 відповідно суцільними, штриховими та штрих-пунктирними лініями.

Для ілюстрації можливості розв'язку задач термоелектров'язкопружності для багат шарових тіл розглянута задача про коливання біморфного циліндра. Розглянутий циліндр довжини 30 мм, середнього радіуса 10 мм та товщини 4 мм. Його коливання збуджуються змінною електричною напругою $U = \pm 15$ В, прикладеною до електродів на зовнішній та внутрішній поверхнях циліндра. В одношаровому циліндрі з поляризацією по товщині важко збуджуються коливання згину. Для їх ефективного збудження використовується біморфна конструкція, в якій циліндричною поверхнею радіуса 10 мм розділяються зони з протилежним напрямком поляризації. Розрахунок проводився при частоті $\omega = 347650$ 1/с, близькій до частоти резонансу згину.

Густина матеріалу g дорівнювала 7520 кг/м³. Початкова температура та температура навколишнього середовища прийнята рівною 20°C ; коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 1,25$ Вт/м·град; коефіцієнт температуропровідності $a = 0,4 \cdot 10^{-6}$ м²/с; коефіцієнт тепловіддачі на внутрішній і зовнішній поверхнях $\alpha = 300$ Вт/м²·град.

Графік зміни усталеної температури на серединній поверхні зображено на рис. 2. Найбільшого значення температура досягає в торцевому перерізі циліндра, оскільки в цьому перерізі при згині найбільша амплітуда коливань і, відповідно, дисипативна функція набуває найбільшого значення.

1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5.— Киев: Наук. думка, 1989.—280 с.
2. Карнаухов В. Г., Козлов В. И. Конечноэлементный метод решения термоэлектровязкоупругости для тел вращения при гармоническом нагружении // Прикл. механика.—1986.—22, № 7.— С. 9—17.
3. Козлов В. И., Михайленко В. В. Диссипативный разогрев вязкоупругого пьезокерамического полого цилиндра конечной длины при гармоническом электрическом возбуждении // Там же.—1988.—24, № 7.— С. 37—43.
4. Allik H., Hughes T. J. R. Finite element method for piezoelectric vibration // Int. J. Numer. Meth. Eng.—1970.—2.— P. 151—157.
5. Boucher D., Lagier M., Maerfeld C. Computation of the vibration modes for piezoelectric array transducers used a mixed finite element — perturbation method // JEEE Trans. Sonics and Ultrasonics.—1981.— SU-28, N 5.— P. 318—330.
6. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел.— Киев: Наук. думка, 1990.—228 с.
7. Болкисев А. М. Диссипация энергии при гармоническом нагружении вязкоупругого пьезокерамического материала // Прикл. механика.—1987.—23, № 3.— С. 48—53.

Інститут механіки ім. П. С. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло 23.06.93

Приведена вариационная формулировка задач, в которых граничные условия на поверхности пьезоматериала заданы в интегральной форме — на электродах задается общий заряд, а значение электрического потенциала подлежит определению. Методом конечных элементов решены задачи о колебаниях трехслойной пластинки и диссипативный разогрев двухслойного цилиндра.

The article presents a variational formulation of problems wherein boundary conditions on the surface of a piezomaterial are given in the integral form — on electrodes the total charge is given while the value of an electrical potential is to be determined. By the method of finite elements the problems about vibration of a threelayered plate and dissipative heating up a two-shell cylinder have been solved.