УДК 517.9

Алла М. Ткачук, доцент,
Вікторія В. Могильова, доцент,
Володимир Я. Данілов, доцент.

Про усереднення систем різницевих рівнянь на осі

В даній роботі використовуючи метод усереднення отримано результати про відповідність між точним та усередненим розв'язками системи різницевих рівнянь на осі.

Ключові слова: різницеві рівняння, метод усереднення, положення рівноваги.

A. M. Tkachuk, senior lecturer ,
A. M. Tkachuk, senior lecturer ,
V.V. Mogylova, senior lecturer,
V. J. Danilov, senior lecturer.

About averaging of systems of difference equation on the axis

In present article the results about accordance between accurate and average solutions of systems of difference equation on the axis are obtained.

Key Words: difference equations, average method, equilibrium position.

*E-mail: tkachukam@ukr.net

1 Вступ

В теорії диференціальних рівнянь добре відомий метод усереднення [1] для диференціальних рівнянь з малим параметром, який дозволяє звести дослідження вихідної системи до більш простої усередненої. В подальшому метод усереднення узагальнювався на різні класи систем диференціальних рівнянь, на системи інтегродиференціальних рівнянь, різницевих, рівнянь в частинних похідних, рівнянь в банахових просторах, стохастичних рівнянь. Досить повну бібліографію з цього приводу приведено в [2].

Зауважимо, що узагальнення першої теореми М.М. Боголюбова, в основному, отримані на скінченому інтервалі часу. Щодо обґрунтування методу усереднення на півосі, то М.М. Боголюбовим доведена відповідна теорема для випадку, коли усереднена система має „квазістатичне" положення рівноваги та близькість встановлюється саме для цього розв'язку.

В роботі [3] для звичайних диференціальних рівнянь розглянуто варіант другої теореми М.М. Боголюбова у випадку, коли розв'язок усередненої системи не обов'язково положення рівноваги, більше того, він є лише рівномірно асимптотично стійким.

Основною ціллю даної роботи є отримання аналогічного результату для різницевих рівнянь.

Спочатку ми доведемо аналог другої теореми М.М. Боголюбова для різницевих рівнянь у випадку, коли положення рівноваги усередненої системи лише асимптотично стійке. Далі буде побудовано обмежений розв'язок вихідної системи на осі, що близький до розв'язку усередненої системи.

2 Основні результати

Розглядається система різницевих рівнянь вигляду

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon f_n(x_n), \qquad (1)$$

де $f_n(x)$ визначена при $n = 0,1,2,\ldots$, $x \in D$ (D - деяка область простору R^d), ε - малий параметр. Припустимо, що існує середнє значення послідовності f_n :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f_n(x) = f(x). \qquad (2)$$

Тоді системі (1) ставиться у відповідність усереднена система

$$y_{n+1} = y_n + \varepsilon f(y_n). \qquad (3)$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 1 Нехай $f_n(x)$ визначена при $n = 0,1,2,\ldots$, $x \in D$ і виконуються умови:

1) $f_n(x)$ – обмежена та задовольняє умові Ліпшица по x із сталою L:

$$|f_n(x) - f_n(x')| \le L|x - x'| \qquad (4)$$

$\forall\, x, x' \in D$;

2) рівномірно по $k = 0,1,2,...$ і $x \in D$ існує границя

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{k+N} f_n(x) = f(x); \quad (5)$$

3) розв'язок $y_n(x_0)$ $(y_0(x_0) = x_0(x_0))$ усередненої системи визначений $\forall n \in \mathrm{N}$ і лежить в області D разом із деяким β - околом;

4) розв'язок $y_n(x_0)$ – рівномірно асимптотично стійкий.

Тоді для довільного $\eta > 0$ ($\eta < \beta$) можна вказати таке ε_0, що для $\varepsilon < \varepsilon_0$ при $n \in \mathrm{N}$ справедлива нерівність

$$\left|x_n(x_0) - y_n(x_0)\right| < \eta, \quad (6)$$

де $x_n(x_0)$ – розв'язок точної системи (1) такий, що $y_0(x_0) = x_0(x_0) = x_0$.

Доведення. Оскільки розв'язок $y_n(x_0)$ усередненої системи (3) рівномірно асимптотично стійкий, то для довільних $\eta > 0$, $n_0 \in \mathrm{N}$ знайдеться $\rho > 0$, що для довільного іншого розв'язку системи (3) $\overline{y}_n$ такого, що

$$\left|y_{n_0} - \overline{y}_{n_0}\right| < \rho \quad (7)$$

випливає як виконання нерівності

$$\left|y_n - \overline{y}_n\right| < \frac{\eta}{2}, \quad \text{при} \quad n \ge n_0 \quad (8)$$

так і виконання граничного співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\left|y_n - \overline{y_n}\right| = 0, \quad (9)$$

причому ρ не залежить від n_0. При цьому можна вважати, що $0 < \rho < \eta$.

Позначимо через $U_\rho(n_0)$ – ρ - окіл точки $y_{n_0}(x_0)$. Покажемо, що співвідношення (9) рівномірне по $x_0 \in U_\rho(n_0)$. Нехай це не так. Тоді $\exists \mu > 0$, що в $U_\rho(0)$ можна вказати збіжну послідовність точок $x^{(k)}$ і послідовність чисел n_k таких, що

$$\left|x^{(k)} - x_0\right| < \rho,$$
$$\left|y_{n_k}(x^{(k)}) - y_{n_k}\right| \ge \mu, \quad n_k \to \infty, \quad (10)$$

де $y_{n_k}(x^{(k)})$ – розв'язок (3) такий, що $y_0(x^{(k)}) = x^{(k)}$. Нехай $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^0$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\left|y_n(x^0) - y_n\right| = 0$ і можна вказати $\overline{\overline{N}} > 0$, щоб виконувалась нерівність

$$\left|y_n(x^0) - y_n\right| < \frac{\sigma(\mu)}{2} \quad (11)$$

для всіх $n \ge \overline{\overline{N}} + n_0$, де $\sigma(\mu)$ – стала, що гарантує включення розв'язків $y_n(x)$ $\left(y_0(x) = x\right)$ системи (3), які починаються в $U_{\sigma(\mu)}(0)$ - околі точки $y_0(0)$, в $\frac{\mu}{2}$ - окіл розв'язку y_n для всіх $n \ge 0$.

В силу неперервної залежності від початкових даних можна вказати таке $N_1 > 0$, щоб виконувалась нерівність

$$\left|y_n(x^{(k)}) - y_n(x^0)\right| < \frac{\sigma(\mu)}{2}, \quad (12)$$

$n \in [n_0, n_0 + \overline{\overline{N}}]$, $k > N_1$. При цьому можна вважати, що $n_k \ge n_0 + \overline{\overline{N}}$ для $k > N_1$. Із (11), (12) випливає

$$\left|y_n(n_0 + \overline{\overline{N}}, x^{(k)}) - y_n(n_0 + \overline{\overline{N}})\right| < \sigma(\mu).$$

Тому

$$\left|y_n(x^{(k)}) - y_n\right| < \frac{\mu}{2}, \quad n \ge n_0 + \overline{\overline{N}}.$$

А отже, при $n = n_k$ маємо, що

$$\left|y_{n_k}(x^{(k)}) - y_{n_k}\right| < \frac{\mu}{2},$$

що суперечить (10).

Покажемо тепер, що функція $f(x)$, із умови теореми, ліпшицева. Нехай x, x' – довільні точки із D. Тоді для довільного $\mu > 0$ можна вказати числа N', N'', що при $N > \max\{N', N''\}$ мають місце нерівності

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\mu}{2}; \quad \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f_n(x') - f(x')\right| < \frac{\mu}{2}.$$

Тоді

$$\left|f(x) - f(x')\right| = \left|f(x) - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f_n(x) + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f_n(x) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f_n(x') + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f_n(x') - f(x')\right| \le$$
$$\le \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\left|f_n(x) - f_n(x')\right| \le \mu + L\left|x - x'\right|.$$

Звідки, в силу довільності μ, отримаємо:

$$\left|f(x) - f(x')\right| \le L\left|x - x'\right|.$$

Таким чином, виконані умови теореми про усереднення на скінченому проміжку [4]. Отже, для довільних $\rho > 0$, $L > 0$, $n_0 \in \mathrm{N}$ можна вказати таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$ для розв'язків x_n і y_n – точної та усередненої систем таких, що $x_{n_0} = y_{n_0}$, буде справедливою нерівність

$$|x_n - y_n| < \frac{\rho}{2} \qquad (13)$$

при $n \in \mathrm{N}$ таких, що $n_0 \le n \le n_0 + \frac{L}{\varepsilon}$.

В силу рівномірної асимптотичної стійкості розв'язку $y_n(x_0)$ можна вказати таке $\overline{L} > 0$ (вибір $\overline{L}$ не залежить від n_0), що при $n \ge n_0 + \left[\overline{L}\right]$ буде виконуватися нерівність

$$\left|y_n - \overline{y}_n\right| < \frac{\rho}{2}. \qquad (14)$$

За даними $\eta,\ \rho,\ \overline{L}$ виберемо ε_0 так, щоб при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на інтервалах довжини $\left[\frac{\overline{L}}{\varepsilon}\right]$ ($[\bullet]$ - ціла частина числа) для відповідних розв'язків точної та усередненої систем виконувалась нерівність (13). Враховуючи те, що ρ можна вибрати меншим η, можемо стверджувати, що нерівність (6) справедлива при $n \le \left[\frac{\overline{L}}{\varepsilon}\right],\ \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Розіб'ємо піввісь точками виду $n\left[\overline{L}\right]$, $n = 1,2,3,\ldots$. Нехай точка $\widetilde{n}\left[\overline{L}\right]$ - найбільша із цілих точок, що належать відрізку $\left[0; \left[\frac{\overline{L}}{\varepsilon}\right]\right]$.

Розглянемо розв'язок $\overline{y}_n$ усередненої системи такий, що $\overline{y}_{\widetilde{n}[\overline{L}]} = x_{\widetilde{n}[\overline{L}]}$. Із нерівностей (8), (13), (14) отримаємо, що при $n \in \left[\widetilde{n}[\overline{L}],\ (\widetilde{n}+1)[\overline{L}]\right]$ справедливі оцінки:

$$\left|x_n(x_0) - \overline{y}_n\right| < \frac{\rho}{2}, \qquad (15)$$

$$\left|y_n(x_0) - \overline{y}_n\right| < \frac{\eta}{2}, \qquad (16)$$

$$\left|y_{(\widetilde{n}+1)[\overline{L}]}(x_0) - \overline{y}_{(\widetilde{n}+1)[\overline{L}]}\right| < \frac{\rho}{2}. \qquad (17)$$

Тому при $n \in \left[\widetilde{n}[\overline{L}],\ (\widetilde{n}+1)[\overline{L}]\right]$ маємо

$$|x_n - y_n| \le \left|x_n - \overline{y}_n\right| + \left|\overline{y}_n - y_n\right| < \frac{\rho}{2} + \frac{\eta}{2} < \eta.$$

Отже, нерівність (6) справедлива. Крім того, при $n = (\widetilde{n}+1)[\overline{L}]$ маємо $|x_n(x_0) - y_n(x_0)| \le$ $\le \left|x_n(x_0) - \overline{y}_n\right| + \left|\overline{y}_n - y_n(x_0)\right| < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho$, тобто точка $x_{(\widetilde{n}+1)[\overline{L}]}$ потрапляє в „зону" асимптотичної стійкості розв'язку $y_n(x_0)$ усередненої системи.

Далі розглянемо розв'язок $\overline{\overline{y}}_n$ усередненої системи такий, що $\overline{\overline{y}}_{(\widetilde{n}+1)[\overline{L}]} = x_{(\widetilde{n}+1)[\overline{L}]}$. Проводячи для нього аналогічні дослідження, отримаємо, що на інтервалі $\left[(\widetilde{n}+1)[\overline{L}],\ (\widetilde{n}+2)[\overline{L}]\right]$ справедлива нерівність $|x_n(x_0) - y_n(x_0)| < \eta$, а при $n = (\widetilde{n}+2)[\overline{L}]$ нерівність $|x_n(x_0) - y_n(x_0)| < \rho$. Останні дві нерівності означають, що нерівність (6), яку потрібно було довести, справедлива для $n \in \left[(\widetilde{n}+1)[\overline{L}],\ (\widetilde{n}+2)[\overline{L}]\right]$, а при $n = (\widetilde{n}+2)[\overline{L}]$ точка $x_n(x_0)$ потрапляє в „зону" асимптотичної стійкості розв'язку $y_n(x_0)$.

Продовжуючи даний процес отримаємо, що для довільного $m \in \mathrm{N}$ на інтервалі $\left[(\widetilde{n}+m)[\overline{L}],\ (\widetilde{n}+m+1)[\overline{L}]\right]$ справедлива нерівність (6), а при $n = (\widetilde{n}+m+1)[\overline{L}]$ нерівність

$$|x_n(x_0) - y_n(x_0)| < \rho.$$

В силу того, що $m \in \mathrm{N}$ - довільне, теорему доведено.

Для подальших досліджень нам потрібна буде лема. Розглянемо автономну систему різницевих рівнянь виду

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon f(x_n), \qquad (18)$$

де $f(x)$ – визначена та ліпшицева із сталою L функція в деякій області $D \subset R^d$. Нехай $x_0 \in D$ - положення рівноваги системи (18), тобто $f(x_0) = 0$. Позначимо через $\Pi(x_0)$ – область протягування x_0, тобто множину точок $y_0 \in D$ таких, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n(y_0) = x_0, \qquad (19)$$

де $x_n(y_0)$ - розв'язок (18) такий, що $x_0(y_0) = y_0$.

Лема Якщо x_0 - асимптотично стійке положення рівноваги системи (18), то довільний її розв'язок $x_n(y_0)$, де $y_0 \in \Pi(x_0)$, є рівномірно асимптотично стійким.

Доведення. Покажемо спочатку стійкість $x_n(y_0)$. Оскільки x_0 - асимптотично стійке положення рівноваги, то, в силу автономності системи (18), x_0 - рівномірно асимптотично стійке. Тому $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, що якщо для деякого n_1 розв'язок $x_n(x_1)$ системи (18) задовольняє умову $\left|x_{n_1}(x_1)-x_0\right|<\dfrac{\delta}{2}$, то справедлива нерівність

$$\left|x_n(x_1)-x_0\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ при } n\ge n_1. \qquad (20)$$

Крім того існує $\delta_1>0$, що якщо

$$\left|x_{n_1}(x_1)-x_0\right|<\delta_1, \qquad \text{то}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n(x_1)=x_0. \qquad (21)$$

Із того, що $y_0\in\Pi(x_0)$ випливає існування моменту $n(y_0)$, що

$$\left|x_{n(y_0)}(y_0)-x_0\right|<\frac{\delta}{2}, \qquad (22)$$

а тому

$$\left|x_n(y_0)-x_0\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ при } n\ge n(y_0). \qquad (23)$$

Аналогічно існує момент $n_1(y_0)$, що

$$\left|x_{n_1(y_0)}\ (y_0)-x_0\right|<\frac{\delta_1}{2}.$$

Із сумарних зображень розв'язків $x_n(y_0)$ та $x_n(y_1)$ системи (18) отримаємо оцінку для їх різниці:

$$\left|x_n(y_0)-x_n(y_1)\right|\le\left|y_0-y_1\right|+\varepsilon\left|\sum_{p=0}^{n-1}f(x_p(y_0))-\right.$$

$$\left.-\sum_{p=0}^{n-1}f(x_p(y_1))\right|\le\left|y_0-y_1\right|+$$

$$+\varepsilon\sum_{p=0}^{n-1}\left|f(x_p(y_0))-f(x_p(y_1))\right|\le$$

$$\le\left|y_0-y_1\right|+L\varepsilon\sum_{p=0}^{n-1}\left|x_p(y_0)-x_p(y_1)\right|.$$

Звідси та з [5] маємо:

$$\left|x_n(y_0)-x_n(y_1)\right|\le\left|y_0-y_1\right|(1+L\varepsilon)^n. \qquad (24)$$

Вибором досить малого μ, із врахуванням (24), для кожного $\bar{n}\in\left[0,\, n(y_0)\right]$ можна отримати оцінку

$$\left|x_n(y_0)-x_n(y_1)\right|\le\frac{\delta}{2},$$

для $n\in\left[\bar{n},\, n(y_0)\right]$, якщо $\left|x_{\bar{n}}(y_0)-y_{\bar{n}}(y_1)\right|\le\mu.$

Із (20), (22) та (23) отримаємо стійкість $x_n(y_0)$. Рівномірна стійкість розв'язку $x_n(y_0)$ випливає із рівномірної оцінки (24) для $n\in\left[0,\, n(y_0)\right]$ та рівномірної стійкості x_0.

Аналогічно, вибором малого μ_1, для кожного $\bar{n}\in\left[0,\, n_1(y_0)\right]$ можна отримати оцінку

$$\left|x_n(y_0)-x_n(y_1)\right|\le\frac{\delta_1}{2},$$

при $n\in\left[\bar{n},\, n_1(y_0)\right]$, якщо $\left|x_{\bar{n}}(y_0)-x_{\bar{n}}(y_1)\right|\le\mu_1$, причому μ_1 не залежить від $\bar{n}$. Із (21) отримаємо асимптотичну стійкість розв'язку $x_n(y_0)$. Лему доведено.

Має місце теорема.

Теорема 2 Нехай усереднена система (3) має асимптотично стійке положення рівноваги $x_0\in D$ та виконуються умови 1) і 2) теореми 1. Тоді справедливий висновок теореми 1 для розв'язків $x_n(y_0)$ та $y_n(y_0)$ систем (1) та (3) відповідно таких, що $y_0(y_0)=x_0(y_0)=y_0$, а $y_0\in\Pi(x_0)$.

Доведення даної теореми безпосередньо випливає із леми 1 та теореми 1.

Теорема 3 Нехай $f_n(x)$ визначена при $n\in Z$, $x\in D$ і виконуються умови:

1) $f_n(x)$ – обмежена та задовольняє умові Ліпшиця по x із сталою L;

2)рівномірно по $k\in Z, x\in D$ існує границя (5);

3) усереднена система (3) має асимптотично стійке положення рівноваги x^0.

Тоді для довільного $\eta>0$ можна вказати таке ε_0, що для $\varepsilon<\varepsilon_0$ точна система (1) має розв'язок x_n, для якого справедлива нерівність

$$\left|x_n-x^0\right|<\eta, \quad \text{при} \quad n\in Z. \qquad (25)$$

Доведення. Зафіксуємо довільне $\eta>0$ та побудуємо розв'язок x_n точної системи, який задовольняє умову (25).

Оскільки x^0 – асимптотично стійке положення рівноваги, то для даного $\eta>0$ можна вказати $\delta>0$ та $\tilde{n}\in N$, що для довільного розв'язку $\tilde{y}_n$ системи (3) такого, що $\left|\tilde{y}_{n_0}-x^0\right|<\delta$ будуть справедливими нерівності

$$\left|\tilde{y}_n-x^0\right|<\frac{\eta}{2}, \text{ при } n\ge n_0 \qquad (26)$$

$$\left|\tilde{y}_n-x^0\right|<\frac{\delta}{4}, \text{ при } n\ge n_0+\tilde{n}, \qquad (27)$$

причому δ та $\tilde{n}$ не залежать від n_0.

Нехай ξ_0 - довільна точка із δ - околу x^0. Розглянемо розв'язок x_n точної системи, який при $n=-\tilde{n}$ виходить із точки ξ_0. В силу теореми про усереднення на скінченому проміжку [4] за даними δ та $\widetilde{n}$ можна вибрати ε_0, щоб при $\varepsilon < \varepsilon_0$ виконувалась нерівність

$$\left| x_n - \widetilde{y}_n \right| < \frac{\delta}{4}, \qquad n \in [-\widetilde{n}; 0], \qquad (28)$$

де $\widetilde{y}_n$ - розв'язок усередненої системи такий, що $\widetilde{y}_{-\widetilde{n}} = \xi_0$.

Із (26), (27) та (28) випливає, що

$$\left| x_n - x^0 \right| < \eta, \quad \text{при} \quad n \in [-\widetilde{n}; 0] \qquad (29)$$

та $\left| x_0 - x^0 \right| < \dfrac{\delta}{2}$.

Тому при $\varepsilon < \varepsilon_0$ всі розв'язки точної системи, які починаються при $n = -\widetilde{n}$ в δ - околі x^0, не виходячи із її η - околу, потрапляють при $n = 0$ в $\dfrac{\delta}{2}$ - окіл цієї точки.

Аналогічно, в силу умови 2) даної теореми, можна показати, що при $\varepsilon < \varepsilon_1$ розв'язок точної системи, який починається при $n = -k\widetilde{n}$ в δ - околі x^0, не виходить при $n \in [-k\widetilde{n}; -(k-1)\widetilde{n}]$ із її η - околу, а при $n = -(k-1)\widetilde{n}$ потрапляє в $\dfrac{\delta}{2}$ - окіл точки x^0 для $k \in \mathrm{N}$.

Позначимо через $S_k(\varepsilon)$ – множину значень розв'язків точної системи при $n = 0$, які при $n = -k\widetilde{n}$ знаходяться в δ - околі x^0. На підставі викладеного вище ця множина не є порожньою для довільного натурального k та $\varepsilon < \varepsilon_0$ і при цьому справедливе включення $S_k(\varepsilon) \subset S_{k-1}(\varepsilon)$.

Нехай $\xi_0(\varepsilon)$ - спільна для всіх $S_k(\varepsilon)$ точка. Розглянемо тепер розв'язок x_n точної системи, який при $n = 0$ виходить із точки $\xi_0(\varepsilon)$. Даний розв'язок за своєю побудовою продовжуваний вліво і в точках виду $-k\widetilde{n}$ належить δ - околу точки x^0 для довільного натурального k. Тому він необмежено продовжуваний вліво і для довільного $n \le 0$ справедлива оцінка (25) при $\varepsilon < \varepsilon_0$. Його продовжуваність вправо і справедливість оцінки (25) для $n \in \mathrm{N}$ є очевидними. Теорему доведено.

Список використаних джерел

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука. 1974. -501 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наукова думка. 1971. – 440 с.
3. *Самойленко А. М., Станжицкий А. М.* Об усреднении дифференциальных уравнений на бесконечном интервале// Диф. уравн. т.42, № 4 (2006), с. 1- 7.
4. *Белан Е. П.* О методе усреднения в теории конечно-разностных уравнений // Укр. мат. журн. т. 19, № 3 (1967), с. 85-90.
5. *Мартинюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Наукова думка. 1972. – 246 с.