УДК 532.529

Кулінченко В.Р. доктор техн. наук
Зав'ялов В.Л. кад. техн. наук, Національний університет харчових технологій
Kulintchenko V.R doctor of science
Zavialov V.L. cand. of science, National university of food technology

Математична модель динаміки росту парової фази (Частина І. Передумови створення математичної моделі, основні положення і рівняння руху, Релея)

Mathematical model of dynamics of growth of steam phase (Part of I. Peredumovi is creation of mathematical model, substantive provisions and equalizations of motion, Releya

Виконаний аналіз літературних першоджерел з динаміки парової і паро-газової бульбашки. Поставлені задачі по створенню математичної моделі процесу росту і захлопування бульбашок в різних режимних умовах ведення процесу. Отримано рівняння руху міжфазної кулястої поверхні, а також доказаний енергетичний зміст рівняння Релея. Аналіз інших факторів, які дають можливість отримати замкнену систему математичних рівнянь для створення надійної математичної моделі буде продовжений в ІІ частині цієї публікації.

***Ключові слова**: модель, бульбашка, тиск, швидкість росту, робота, кінетична енергія, рівняння Релея, рівняння руху.*

The analysis of literary original sources is executed from the dynamics of steam and vapour-gas bubble. Tasks are put on creation of mathematical model of process of growth and slamming of bubbles in the different regime terms of conduct of process. Equalization of motion of with instr phasis spherical surface is got, and also reception power maintenance of equalization of Releya. Analysis of other factors which enable to get the closed system of mathematical equalizations for creation of reliable mathematical model will be prolonged in II part of this publication.

***Keywords**: model, bubble, pressure, speed of growth, robot, kinetic energy, equalization of Releya, equalization of motion.*

Выполнен анализ литературных источников по динамике парового и парогазового пузырька. Поставлены задачи по разработке математической модели процесса роста и схлопывания пузырьков в разных режимных условиях ведения процесса. Получено уравнение движения межфазной сферической поверхности, а так же доказано энергетическое содержание уравнения Релея. Анализ других факторов, влияющих на получение замкнутой системы математических уравнений для создания математической модели будет продлен во II части этой публикации.

***Ключевые слова**: модель, пузырек, давление, скорость роста, работа, кинетическая энергия, уравнение Релея, уравнение движения.*

Аналітичний огляд. Першим теоретичним дослідженням динаміки росту парової фази є робота Релея [1], де розглянуто захлопування в ідеальній рідині раптово утвореної сферичної порожнини без урахування капілярних ефектів. У цій роботі вперше приводиться рівняння радіального руху рідини на границі зі сферичною порожниною, відоме як рівняння Релея

$$\frac{d^2R}{d\tau^2} = \frac{p_R - p_{\ell 0} - \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 \rho_\ell}{\rho_\ell R}, \qquad (1)$$

де R – діаметр бульбашки; τ – час; p – тиск; ρ – густина. Індекси: R – значення параметра в рідині на межі з бульбашкою; ℓ – рідина; 0 – початкове значення.

Рівняння (1) має простий аналітичний розв'язок у вигляді залежності $R = f(\tau)$, який не можна використати на практиці із-за ідеалізації вихідних умов. Різні модифікації (1), які враховують вклад капілярних і в'язкісних складових в нормальне напруження на поверхні бульбашки, розв'язуються тільки чисельними методами [2], і входять майже у всі математичні моделі, що описують динаміку парових і парогазових бульбашок. Без урахування процесів тепло і масообміну бульбашки з рідиною, а також кінетики фазових переходів рівняння цього типу описують тільки інерційну стадію процесу, коли ріст бульбашки обумовлений тільки механічною нерівноваженістю, тобто різницею тисків в обох фазах. Оскільки поведінка бульбашки визначається взаємозв'язаними потенціалами нерівноважних процесів (Δp, ΔT, $\Delta\mu$), використання одного рівняння недостатньо для вирішення реальних задач.

Інший граничний підхід передбачає виключення із розгляду інерційної стадії, вважаючи що в процесі кипіння утворення і ріст парової фази здійснюється виключно в термічній стадії, коли інтенсивність пароутворення визначається тільки швидкістю підведення теплоти від рідини до бульбашки. У цьому випадку термічні моделі процесу, які описують поведінку бульбашок під час об'ємного чи поверхневого кипіння, ґрунтуються на принциповому допущенні про рівність тисків у паровій і рідинній фазах, тобто в умовах відсутності механічної нерівноваженості [3].

Такий підхід вперше використав Плессет і Цвік [4] і Форстер і Зубер [5]. Отримані у цих роботах рівняння лягли в основу загальних теоретичних моделей росту бульбашок у перегрітій рідині, і отримали розповсюдження при вивченні механізму кипіння. Ці моделі для опису швидкості росту парової фази замість (1) використовують рівняння теплового балансу, яке передбачає, що теплота із рідини до поверхні бульбашки йде тільки на пароутворення, а теплообмін бульбашки з рідиною відсутній

$$\frac{d\left(\rho_v R^3\right)}{d\tau} = \frac{3R^2\lambda_\ell}{L}\frac{\partial T_\ell}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{3R^2}{4\pi}q_\ell\,, \tag{2}$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності; L – прихована теплота пароутворення (конденсації); r – радіальна координата; q – інтенсивність теплового потоку. Індекс: v – пара.

За звичай рівняння (2) доповнюється рівнянням конвективної теплопровідності в рідкій фазі, а також емпіричним співвідношенням, що зв'язує тиск насиченої пари з температурою. В [6] уперше знайдено автомодельне вирішення, отримане за умови усталеності густини пари всередині бульбашки [$\rho_v(\tau) = \text{const}$] і показано, що воно дійсне тільки для бульбашки під час її росту. Таке уявлення далеке від реальності, особливо при кипінні сильно перегрітих рідин.

Як показано в [7], усі теоретичні роботи, що стосуються динаміки парових бульбашок, можна розділити на дві категорії, в яких поведінка бульбашок контролюється чи інерційними силами, чи швидкістю теплоперенесення в рідкій фазі. Обговорюючи стан теоретичних досліджень динаміки бульбашки, автори цієї роботи відмічають, що існує два види систем рівнянь, якими можна описати швидкість росту для термічного і інерційного режимів. При заданих теплофізичних параметрах і початкових умовах неможливо без експерименту передбачити, якою із систем рівнянь доцільно користуватися в конкретному випадку. Виконані порівняння розрахунків із швидкості росту бульбашок, отриманих в рамках інерційної і теплової моделей, з результатами досліджень при критичних перегрівах. Оказалося, що дослідна швидкість росту значно менше розрахункової у випадках, коли домінують інерційні сили, і більші за розрахункові значення, коли основну роль відіграє процес теплообміну.

Аналітичний вираз для швидкості росту парових бульбашок при одночасній дії інерційних і термічних ефектів запропоновано в [8]. Ця залежність добре описує результати певної групи дослідів, але для іншої невідповідність між теоретичними і дослідними результатами дуже велика. Задовільне спів падання є наслідком взаємної компенсації дуже

грубих похибок. Перша з яких пов'язана з допущенням: $\rho_v(\tau)$ = const, що суттєво збільшує розрахункову швидкість росту. Друга похибка обумовлена тим, що при оцінюванні тиску пари $p_v = p_{sat}(T_s)$ (тут індекси: sat – значення параметра у стані насичення; s – значення на між фазній поверхні) використовується лінійне наближення формули Клапейрона-Клаузіуса. При порівнянно великих перегрівах це призводить до значного зменшення розрахункової швидкості росту і внаслідок цього компенсує першу із названих похибок. Для тих режимів, коли похибки не компенсуються, розбіжність теорії з дослідом стає значною.

Більш коректний аналітичний розв'язок задачі про швидкість росту парової бульбашки з урахуванням зміни густини пари під час росту і при більш точній апроксимації залежності $p_{sat}(T_s)$ отримано в [6], де задовільне погодження з дослідом спостерігається тільки при дуже малих перегрівах. З метою отримання необхідної для практичних розрахунків простої апроксимаційної залежності $R = f(\tau)$ при гранично високих перегрівах в [9] одночасно використовуються рівняння (1) і (2). Фактично у цьому разі виключається інерційна стадія росту, оскільки в рівнянні Релея нехтують членом $d^2R/d\tau^2$, а при вирішенні рівняння (2) робиться таке допущення $d\rho_v/d\tau = 0$ і $q_\ell = \lambda_\ell(\partial T_\ell/\partial r) \infty \Delta T_\ell/\tau^{0,5}$. Залежність $p_{sat}(T_s)$ подається у вигляді перших двох членів розкладення рівняння Клапейрона-Клаузіуса в ряд Тейлора. Таке спрощення дає можливість отримати розрахункову формулу для швидкості росту бульбашки, яка з точністю біля 20% співпадає з дослідом. На прикладі [9] стає очевидною обмеженість аналітичних рішень ряду авторів конкретних задач динаміки парової бульбашки, оскільки вони свідомо нехтують впливом тих чи інших факторів, які при певних режимних параметрах можуть бути визначальними.

Розвиток теорії динаміки бульбашок, починаючи з класичних праць Релея [1], Плессета і Цвіка [4], Форстера і Зубера [5], в яких представлено аналітичне вирішення задачі, йшло шляхом урахування в моделях все більшої кількості визначальних факторів, яке вимагало вирішення складних і громіздких систем рівнянь. Тому що у загальній постановці отриманих точних аналітичних вирішення цих рівнянь неможливе, намітилося два шляхи до їх розв'язку. Один із них пов'язаний з отриманням наближених аналітичних оцінок за рахунок певних спрощень, часто фізично необґрунтованих. Другий підхід передбачає чисельне вирішення вихідних рівнянь. Тому один із факторів, що сприяє більш детальному вивченню динаміки парових бульбашок є удосконалення в останні роки комп'ютерної техніки, яка дозволяє чисельними методами розв'язувати складні системи рівнянь з високою точністю за порівнянно короткий час.

Аналіз робіт з динаміки бульбашок показує, що при моделюванні поведінки бульбашок незалежно від прикладної спрямованості моделі найбільш важливим є адекватне представлення міжфазного тепло і масообміну, термодинамічного стану парової фази, а також температурного поля на околиці бульбашки. У строгій послідовності задача динаміки парових, газових і парогазових бульбашок розглянуто в [10]. Але при розробці моделі автори приймають ряд спрощень і припущень, які суттєво зменшують можливість адекватного опису досліджуваних процесів. Поведінка бульбашки під час росту розглядається в квазірівноважному наближені, а інерційна стадія розвитку виключається з розгляду. Основні переваги своєї моделі, яке забезпечує, за їх думкою, більш високу ступінь достовірності у порівнянні з іншими моделями, автори вважають, що необхідно враховувати перенесення теплоти в газовій фазі, при цьому всередині бульбашки $\partial T_b/\partial r \neq 0$ і $\partial \rho_b/\partial r \neq 0$. Урахування цих факторів вимагає великих витрат машинного часу під час розрахунків і суттєво затрудняє можливості аналізу. У подальшому автори виключають з моделі внутрішню задачу теплопровідності, що не погіршує ступінь спів падання розрахункових результатів з дослідними даними, але суттєво полегшують процедуру розрахунку.

Виконаний аналіз літературних першоджерел з динаміки парової бульбашки показує, що, не дивлячись на велику кількість публікацій з розглядуваної проблеми, не існує математичних моделей, які дають можливість точно прогнозувати поведінку індивідуальної

бульбашки і їх ансамблю в любому заданому інтервалі режимних параметрів, що відповідає реальним умовам. Недосконалість існуючих моделей відображує ту обставину, що існуючі традиції такі явища як акустичну і термодинамічну кавітації, об'ємну конденсацію, кипіння при малих перегрівах, раптове скіпання, ріст парових бульбашок у не догрітій рідині і т. ін. розглядають і вивчають як принципово різні розділи теплофізики. Але з фізичної точки зору все це одно і те ж явище, яке характеризує процес релаксації системи "бульбашка – рідина" у термодинамічно рівноважному стані.

Поведінка бульбашки в перерахованих процесах підпорядкована одним і тим же закономірностям і повинна описуватися одними і тими ж рівняннями, але з різними початковими умовами. Виходячи з цього, математична модель динаміки бульбашки, яка враховує всі основні визначальні фактори, повинна в рівному ступені описувати любе із названих явищ. Така модель не може містити у собі специфічних припущень, справедливих тільки для одного із явищ, оскільки нема об'єктивного підґрунтя для установлення чіткої межі, а питання де закінчується кавітація і розпочинається кипіння не має фізичного змісту.

При вивченні динаміки росту парової бульбашки доцільно мати фізично достовірну не громіздку математичну модель, яка без додаткових обмежень і спрощень однаково надійно прогнозувала б поведінку парової чи парогазової бульбашки при любих початкових умовах. Розглянемо принципи побудови такої моделі і обґрунтуємо загальну систему рівнянь.

Передумови створення моделі. При опрацюванні математичної моделі одиничної бульбашки приймаємо наступні припущення: бульбашка має сферичну форму; рідина в'язка і нестислива; всередині бульбашки знаходиться пара, кількість якої відповідає об'єму бульбашки, і неконденсований газ (чи суміш газів), маса якого залишається сталою на протязі всього часу існування бульбашки; пара і газові компоненти всередині бульбашки розглядаються як ідеальний газ.

Справедливість першого допущення підтверджується аналізом швидкісної кінозйомки процесу кипіння, із якого слідує, що стосовно розглядуваного класу задач бульбашка зберігає практично сферичну форму на всіх стадіях розвитку. Це припущення загальноприйняте і має місце у всіх моделях.

Друге допущення обумовлено намаганням запобігти зайвого ускладнення задачі і невиправданого збільшення затрат машинного часу при виконанні розрахунків. Фактор стисливості рідини важливий при деталізації форми і розповсюдженні імпульсу тиску випромінюваного в рідину бульбашкою в мить кінцевого схлопування. Моделі отримані з урахуванням стисливості рідин не дають точної інформації про динаміка бульбашки, тому що урахування стисливості компенсується неадекватним описом тепломасообмінних процесів і кінетики фазових переходів.

Стосовно третього припущення варто відмітити, що наші дослідження стосуються динаміки парової бульбашки, але математична модель носить загальний характер і враховує наявність домішок неконденсованих газів на поведінку бульбашок. Разом з цим, при відповідних початкових умовах модель без зміни її структури може описувати поведінку як чисто парових бульбашок, так і газонаповнених.

Четверте припущення не є обмежувальним, а суттєво підвищує достовірність моделі при розгляді динамічних ефектів, які мають місце у кавітаційних явищах чи при раптовому закипанні рідини.

Постановка задачі. Задачу можна сформулювати так. Нехай бульбашка з радіусом R_0 містить у собі (загальний випадок), крім пари побічний неконденсований газ з парціальним тиском p_{g0}, знаходиться у рівновазі з рідиною при температурі $T_{\ell 0}$ = const. Умови рівноваги бульбашки в рідині визначаються рівняннями:

$$dA = pdV + \sigma dS = \left(p + \sigma \frac{dS}{dV} \right) dV; \qquad (3)$$

$$T_{v0} - T_{\ell 0} = 0;\ \ \mu_{v0} - \mu_{\ell 0} = 0;\ \ p_{v0} - p_{\ell 0} - \frac{2\sigma}{R} = 0, \tag{4}$$

де A – робота створення сферичної поверхні площею S; σ – поверхневий натяг; V – об'єм сфери; μ – хімічний потенціал.

Із рівнянь (3) і (4) виходить, що початковий тиск у рідині $p_{\ell 0} = p_{b0} - 2\sigma/R_0 = p_{g0} + p_{\text{sat}}(T_{\ell 0}) - 2\sigma/R_0$ (індекс sat – значення параметра у стані насичення). Починаючи з моменту $\tau = 0$, тиск p_ℓ за час $\Delta\tau$ змінюється від величини $p_{\ell 0}$ до величини $p_{\ell f}$ (індекс f – кінцевий стан параметра), і, в залежності від знака $p_{\ell 0} - p_{\ell f}$, бульбашка починає рости чи стискуватися. Часовий інтервал $\Delta\tau$ визначає час акумуляції енергії.

Основною метою є отримання інформації відносно кінематичних, динамічних і енергетичних характеристик бульбашки під час її росту чи захлопуванні, тобто визначенні локальних значень швидкості $W(r,\tau)$, прискорення $dW/d\tau$, тиску $p_\ell(r,\tau)$, питомої кінетичної енергії $E_к(r,\tau)$ у довільній точці об'єму рідини під час росту бульбашки у залежності від вихідних режимних параметрів: $T_{\ell 0}$, $p_{\ell 0}$, $p_{\ell f}$, R_0, m_g, $\Delta\tau$ (m – маса). Крім цього, визначаються біжучі теплофізичні параметри пари чи парогазової суміші всередині бульбашки (T_b, T_s, p_v, p_g, p_b, ρ_v, ρ_g, ρ_b), а також швидкості теплопереносення q і масоперенесення j через міжфазну поверхню, товщина пограничного теплового шару та ін.

Розглянемо рівняння, які описують поведінку виведеної із стану рівноваги системи "бульбашка – рідина" під час її релаксації до нового термодинамічно рівноважного стану.

Рівняння руху. У відповідності з прийнятим допущенням про сферичність форми поверхні парової бульбашки, помістимо початок сферичних координат у її центр. На підставі сферичної симетрії рух рідини навколо бульбашки, викликаний рухом її поверхні, буде безвихровим, а потенціал поля швидкостей $\varphi(r, \tau)$, як і швидкість руху рідини $W(r, \tau)$, залежить тільки від радіальної координати r і часу τ. Розв'язуючи рівняння Лапласа при $\Delta\varphi = 0$ в сферичних координатах відносно $\varphi(r, \tau)$ і враховуючи, що швидкість руху рідини $W(r, \tau)$ на відстані r від центру бульбашки в довільний момент часу зв'язана з потенціалом у цій точці залежністю $W(r, \tau) = \partial\varphi(r, \tau)/\partial r$, отримаємо рівняння нерозривності у вигляді $Wr^2 = f(\tau)$, де $f(\tau)$ – довільна функція часу, біжуче значення якої однакове у всьому об'ємі рідини. Якщо відома радіальна швидкість рідини на границі з бульбашкою $W_R(\tau) = W(R, \tau)$, то можна записати, що $f(\tau) = W_R(\tau)R^2$ і рівняння нерозривності набуде такого вигляду $Wr^2 = W_R R^2$. Значення швидкості рідини і потенціалу поля швидкостей у довільній точці рідини в момент часу τ визначаються виразами:

$$W(r,\tau) = \frac{W_R R^2}{r^2};\ \ \varphi(r,\tau) = -\frac{W_R R^2}{r}.$$

Рух в'язкої рідини підпорядковується рівнянню Нав'є-Стокса, яке у векторній формі має вигляд:

$$\frac{dW}{d\tau} = -\frac{\text{grad}\, p_\ell}{\rho_\ell} + \nu\frac{\text{grad div}\, W}{3} + \nu\Delta W. \tag{5}$$

Для нев'язкої рідини ($\nu = 0$) останні два члена правої частини (5) зникають і рівняння Нав'є-Стокса перетворюється у рівняння руху Ейлера для ідеальної рідини. Якщо рідина в'язка, але нестислива (div $W = 0$), із правої частини (5) вилучається другий член.

Припущення про безвихровий характер течії рідини в межах бульбашки дозволяє використати рівняння Ейлера для опису течії в'язких рідин. Дійсно, для любої потенціальної течії $\Delta\varphi = 0$ і $W = \text{grad}\,\varphi$. Векторний аналіз показує, що $\Delta W = \Delta(\text{grad}\,\varphi) = \text{grad}\,\varphi$. Тому із правої частини (5) можна вилучити в'язкісний член $\nu\Delta W$, навіть якщо $\nu \neq 0$. Отриманий результат приводить до парадоксального, на перший погляд, висновку, що рух в'язкої рідини підпорядковується рівнянню руху ідеальної рідини, тому що обидва члена (5), які містять у собі в'язкість, стають тотожно рівними нулю. Перший із них зникає внаслідок апріорного

припущення про нестисливість рідини, а другий член випадає завдяки припущенню про безвихровий характер течії.

У загальному випадку припущення про безвихровий рух в'язкої рідини неправомірне. Дійсно внутрішнє тертя в реальній рідині, обумовлене її в'язкістю, служить головною причиною виникнення і затухання вихорів. Але у нашому випадку сферично симетричної течії вихровий характер поля швидкостей в'язкої рідини не забороняє формально вилучити в'язкісний член із рівняння (5). Справа в тому, що у рідині в'язкісні сили викликають внутрішнє тертя, яке проявляється у вигляді дотичних напружень, що діють в площині дотикання шарів рідини. У відповідності з реологічними залежностями для реальної рідини дотичні напруження виникають тільки у тому випадку, коли відрізняються від нуля похідні по швидкості за напрямком нормальним до площин. У більшості випадків руху реальної рідини ці умови виконуються, за винятком невеликої кількості прикладів безвихрових потоків при відсутності граничних поверхонь чи на достатній відстані від них

Розглядувана нами задача про течію рідини на межі з бульбашкою є одним із небагатьох прикладів, коли реальний рух є повністю потенціальним і рівняння динаміки ідеальної рідини можна використовувати без обмежень. Оскільки швидкість руху залежить тільки від координати r, то похідні швидкості по напрямкам нормальним до цієї координати дорівнюють нулю. Внаслідок цього в реальних рідинах взагалі відсутні дотичні напруження і ефекти внутрішнього тертя не проявляються.

Використовуючи правила векторного аналізу, рівняння Ейлера у формі

$$\frac{dW}{d\tau}+\left(W\nabla\right)W+\frac{\mathrm{grad}p_\ell}{\rho_\ell}=0$$

можна привести до відомого інтегралу Лагранжа-Коші

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\frac{W^2}{2}+\frac{p}{\rho_\ell}=f\left(\tau\right), \tag{6}$$

який зв'язує швидкість неусталеного руху в довільній точці r з тиском у цій точці. Функція $\varphi(\tau)$ в (6) є довільною функцією часу, визначається з граничних умов, при цьому значення цієї функції у всій області руху рідини.

Перетворимо рівняння (6), підставивши в нього отримані вище вирази для потенціалу і швидкості, отримаємо:

$$W\left(r\right)=\frac{W_R R^2}{r^2};\;\; \varphi\left(r\right)=\frac{W_R R^2}{r};\;\; \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=-\frac{1}{r}\left(\frac{dW_R}{d\tau}R^2+2RW_R\frac{dR}{d\tau}\right). \tag{7}$$

У цьому разі (6) набуває наступного вигляду:

$$-\frac{1}{r}\left(\frac{dW_R}{d\tau}R^2+2RW_R\frac{dR}{d\tau}\right)+\frac{W_R^2R^4}{2r^4}+\frac{p_\ell}{\rho_\ell}=f\left(\tau\right). \tag{8}$$

У зв'язку з тим, що функція $f(\tau)$ в (6) не залежить від просторових координат, визначити її можна, використовуючи любе із двох граничних умов – чи на нескінченності від бульбашки, чи на границі з бульбашкою. При $r \to \infty$ тиск p_ℓ набуває значення p_∞ рівному зовнішньому тиску, прикладеному до рідини. Підставимо значення p_ℓ у (8) і знайдемо значення $f(\tau) = p_\infty/p_\ell$. Очевидно, тиск p_∞ може бути любою заданою функцією часу, у тому числі і сталою величиною. Підставляючи значення $f(\tau) = p_\infty/p_\ell$ у (8), отримаємо:

$$\frac{p_\ell\left(r,\tau\right)-p_\infty}{\rho_\ell}+\frac{W_R^2R^4}{2r^4}-\frac{1}{r}\left(\frac{dW_R}{d\tau}R^2+2RW_R\frac{dR}{d\tau}\right)=0. \tag{9}$$

Це рівняння дозволяє розрахувати для любого моменту часу поле тиску $p_\ell(r,\tau)$ біля бульбашки, коли відомі біжучі значення його радіуса $R(\tau)$ і швидкість рідини біля її поверхні W_R.

Для визначення функції $W_R(\tau)$ можна використати ще одну граничну умову для тиску, підставивши в (9) замість $p_\ell(r,\tau)$ значення тиску рідини на поверхні бульбашки $p_\ell(r,\tau) = p_R(\tau)$, яке домовимося поки що вважати відомою функцією часу. В результаті отримаємо диференціальне рівняння, вирішення якого дає можливість знайти невідому функцію $W_R(\tau)$.

$$\frac{dW_R}{d\tau} = \frac{p_R - p_\infty - \rho_\ell W_R\left(2\frac{dR}{d\tau} - \frac{W_R}{2}\right)}{\rho_\ell R}. \qquad (10)$$

Якщо прийняти, що $dR/d\tau = W_R$, то рівняння (10) спрощується

$$\frac{dW_R}{d\tau} = \frac{p_R - p_\infty - 1{,}5\rho_\ell W_R^2}{\rho_\ell R}. \qquad (11)$$

Допущення, що $dR/d\tau = W_R$, повністю справедливе тільки у випадку відсутності фазових переходів на поверхні бульбашки. При інтенсивному випаровуванні чи конденсації на міжфазній поверхні різниця між цими величинами незначна, за винятком екстремальних випадків. Підставляючи в (11) замість W_R величину $dR/d\tau$, приходимо до класичного рівняння Релея (1), яке описує динаміку захлопування раптово утвореної порожнини в рідині під дією різниці тисків $p_\infty - p_R$. Рівняння Релея має аналітичний розв'язок за умови, що p_∞ і p_R сталі величини. Це саме стосується і рівнянь (10) і (11), які при допущенні $dR/d\tau = W_R$ тотожні (1). У дійсності умова сталості тиску в задачах росту чи захлопування бульбашок не відбувається навіть у грубому наближені, і отримати аналітичне вирішення задачі неможливо, за винятком класичної задачі Релея про захлопування сферичної вакуумної порожнини ($p_R = 0$) в ідеальній рідині при відсутності капілярних сил.

Доцільно привести рівняння руху для випадку коли бульбашка знаходиться не в безмежному об'ємі рідини, а в центрі обмеженого сферичного об'єму із зовнішнім радіусом R_2, наприклад, всередині краплі рідини. Тоді, підставляючи в (8) відповідні граничні умови для тиску: $p_\ell(R_2) = p_2$ і $p_\ell(R) = p_R$, отримаємо замість (11) наступне рівняння:

$$\frac{dW_R}{d\tau} = \frac{p_R - p_2 - 1{,}5\left(dR/d\tau\right)^2}{\rho_\ell R} + \frac{W_R^2\left[1 + \left(R/R_2\right) + \left(R/R_2\right)^2\right]}{2R_2}. \qquad (12)$$

При $R_2 \to \infty$ це рівняння зводиться до (11).Оскільки другий член правої частини (12) завжди додатний, очевидно, що, при інших рівних умовах, швидкість росту бульбашки в обмеженому об'ємі завжди буде більшою, ніж у безмежному просторі, а швидкість захлопування меншою. Варто врахувати, що із зміною радіуса бульбашки величина R_2 змінюється за законом:

$$R_2 = \left[R^3(\tau) + R_{2_0}^3 - R_0^3\right]^{1/3}.$$

Рівняння (12) доцільно використовувати при аналізі вибухового руйнування крапель сильно перегрітої рідини у метастабільному стані, що дає можливості інтенсифікації процесів тепло і масообміну при кипінні рідин.

Енергетичний зміст рівняння Релея. Можна показати, що рівняння (11) виражає закон збереження механічної енергії в рідині при релаксації системи до термодинамічного рівноважного стану.

Проаналізуємо рух нестисливої рідини біля сферичної бульбашки при її рості чи захлопуванні в безмежному об'ємі. Розглянемо тонкий кульовий шар в рідині товщиною dr на відстані r від центра бульбашки. Під час радіального руху бульбашки швидкість рідини безпосередньо біля її поверхні $W_R = dR/d\tau$. Із цього слідує, що швидкість руху кульового шару $W(r, \tau) = W_R(\tau)R^2/r^2$, а кінетична енергія шару буде:

$$dE_k = \frac{dmW^2}{2} = \frac{\left(4\pi R^2\rho_\ell dr\right)W^2}{2} = \frac{4\pi R\rho_\ell W_R^2 r^2 dr}{4r^4} = \left(2\pi R^4\rho_\ell W_R^2\right)\frac{dr}{r^2}. \qquad (13)$$

Кінетична енергія безмежного об'єму рідини, яка оточує бульбашку, визначається інтегруванням правої частини (13) по всьому об'єму рідини. У цьому разі

$$E_k = \left(2\pi R^4 \rho_\ell W_R^2\right)\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = 2\pi R^3 \rho_\ell W_R^2. \tag{14}$$

Це рівняння можна представити і в такому вигляді:

$$E_k = 3\left(\frac{4\pi}{3}R^3\rho_\ell\right)\frac{W_R^2}{2} = m_{tff}\frac{W_R^2}{2}. \tag{15}$$

Із (14) і (15) виходить, що кінетична енергія безмежного об'єму рідини є величиною кінцевою і рівною добутку ефективної маси рідини m_{eff}, яка знаходиться в об'ємі рівному потроєному об'єму бульбашки, на швидкість руху поверхні бульбашки. Іншими словами, з енергетичної точки зору вся маса рідини навколо бульбашки еквівалентна масі рідини, що знаходиться в потроєному об'ємі бульбашки. Якщо об'єм рідини обмежений і представляє сферу з радіусом $R_2 > R$, то інтегрування виконується в межах від R до R_2 і тоді кінетична енергія буде:

$$\mathring{A}_k = 2\pi R^4 \rho_\ell W_R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}\right) = m_{eff}\frac{W_R^2}{2}\left(1 - \frac{R}{R_2}\right). \tag{16}$$

Очевидно, що при $R_2 \to \infty$ (16) перетворюється на (15).

При зміні розміру бульбашки маса m_{eff} змінюється пропорційно R^3. Тому радіальне переміщення рідини, викликане рухом границі бульбашки, можна формально розглядати як рух тіла із змінною масою $m_{eff} = f(\tau)$. Якщо допустити, що швидкість росту чи захлопування бульбашки $dR/d\tau \equiv W_R = \text{const}$, кінетична енергія рідини $E_k = m_{eff}W^2_R/2$ все рівно буде змінюватися за рахунок зміни m_{eff}. Під час росту бульбашки з постійною швидкістю величина E_k збільшується, а при захлопуванні з постійною швидкістю – зменшується, у відповідності із зміною m_{eff}.

У разі відсутності в'язкісної дисипації зміна кінетичної енергії зв'язана з перетворенням в потенціальну енергію. Стосовно до руху рідини при розширенні чи стисненні бульбашки зміна потенціальної енергії обумовлена роботою зовнішніх сил $dA = \Delta p_\ell(\tau)dV$, де $\Delta p_\ell = p_R - p_\infty$ – сумарний тиск прикладений до рідини, а dV – зміна об'єму бульбашки. Робота виконувана рідиною в інтервалі часу від 0 до τ, визначається виразом:

$$A = \int_0^\tau \Delta p(\tau)\left(\frac{dV}{d\tau}\right)d\tau = \int_0^\tau 4\pi R^2 \Delta p(\tau)\left(\frac{dR}{d\tau}\right)d\tau. \tag{17}$$

Із закону збереження енергії слідує, що $d(E_k + A)/d\tau = 0$. Підставимо у цей вираз значення E_k і A із (14) і (17), отримаємо рівняння збереження енергії у диференціальній формі запису:

$$\frac{d\left[2\pi R^3(\tau)\rho_\ell W_R^2(\tau)\right]}{d\tau} = 4\pi R^2(\tau)\Delta p_\ell(\tau)\frac{dR}{d\tau}. \tag{18}$$

Виконавши диференціювання лівої частини (18), отримаємо такий вираз:

$$\rho_\ell\left(\frac{3}{2}\frac{dR}{d\tau}W_R^2 + RW_R\frac{dW_R}{d\tau}\right) = \Delta p_\ell(\tau)\frac{dR}{d\tau}.$$

Вважаючи, що $W_R = dR/d\tau$, перетворимо останнє рівняння, скоротивши обидві частини на величину $dR/d\tau$. Далі розв'яжемо отриманий вираз відносно $dW_R/d\tau$, отримаємо рівняння Релея у такому вигляді:

$$\frac{dW_R}{d\tau} = \frac{p_R - p_2 - 1{,}5\rho_\ell W_R^2}{\rho_\ell R}. \tag{19}$$

Таким чином, рівняння Релея записане у формі (11) отримано безпосередньо із рівняння збереження механічної енергії (18).

Висновок

На підставі виконаного термодинамічного аналізу розглянуто принципи побудови універсальної математичної моделі динаміки парових і парогазових бульбашок, який дозволяє прогнозувати еволюцію бульбашки в рідині при порушенні умов термодинамічної рівноваги в двохфазній системі рідина – пара, а також для опису різних форм поведінки бульбашки у залежності від початкових умов.

Література

1. Raleigh. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // Phil. Mag.– 1917.– Vol.34.– P.94-98.

2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1.– М.: Наука, 1987.– 464 с.

3. Авдеев А.А., Зудин Ю.Б. Тепловая энергетическая схема роста парового пузыря (универсальное приближенное решение) //ТВТ.– 2002.– Т.40, №2.– С.292-299.

4. Pltsset M.S., Zwick S.A. The growth of vapor bubbles in superheated liquids //J. Appl. Phys.– 1954.– Vol.25, №4.– P.493-500.

5. Forster H.V., Zuber J. Growth of a vapor bubble in liquid-gas solution // J. Appl. Phys.– 1954.– Vol.25, №4.– P.501-514.

6. Theofanos T.G., Patel P.D. Universal relations for bubble growth //Int. J. Heat Mass Transfer.– 1976.– Vol.19, №4.– P.425-429.

7. Mikic B.B., Rohsenow W.M., Griffith P. On Bubble Growth Rates // Int. J. Heat Mass Transfer.– 1970.– Vol.13, №4.– P.657.

8. Гаврилов П.М., Кузьмин А.В. Расчет динамики поверхностных пузырьков в процессах с аварийной разгерметизацией ядерного реактора //Труды III Минского международного форума по тепломассообмену (Тепломассообмен ММФ-92).– Том 4.– Минск: ИТМО АНБ.– 1992.– С. 88-91.

9. Ягов В.В. О предельном законе роста паровых пузырей в области весьма низких давлений (большие числа Якоба) //ТВТ.– 1988.– Т.26, №2.– С. 335-341.

10. Nigmatulin R.I., Khabeev N.S., Nagiev F.B. Dynamics, heat and mass transfer of vapour-gas bubbles in f liquid // Int. J. Heat Mass Transfer.– 1981.– Vol.24, №6.– P.1033-1041.