МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ НАЦІОНАЛЬНИЙ

УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

М. А. МАРТИНЕНКО О. М. НЕЩАДИМ В. М. САФОНОВ

ВИЩА МАТЕМАТИКА КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
для студентів усіх економічних, спеціальностей денної та заочної
форм навчання

Схвалено
на засіданні кафедри
вищої математики
Протокол № 14 від
06.03.2007

Київ НУХТ 2007

Мартиненко М. А., Нещадим О.М., Сафонов В.М. Вища математика: Конспект лекцій для студ. усіх економ, спец. ден. та заоч. форм навч. - К.: НУХТ, 2007. - 145 с.

Рецензент О.П. Зінькевич, кандидат фіз.-мат, наук

М. А. Мартиненко, доктор фіз.-мат. наук О. М. Нещадим
В. М. Сафонов, кандидата фіз.-мат. наук

Конспект лекцій створено відповідно до навчальної програми дисципліни „Вища математика" для економічних спеціальностей.

Теоретичний матеріал супроводжується достатньою кількістю типових прикладів і задач з економічним змістом. Наприкінці кожної лекції наведено ряд основних теоретичних запитань та практичних завдань з відповідями для самоконтролю.

Розрахований на студентів економічних спеціальностей усіх форм навчання.

Зміст

Вступ

В сучасній науці, техніці та економіці математика відіграє надзвичайно важливу роль. Знання з математики необхідні багатьом фахівцям, зокрема, працюючим в економічній сфері.

Мета викладання дисципліни „Вища математика” - допомогти студентам оволодіти відповідним математичним апаратом, який має бути достатнім для дослідження математичних моделей, пов’язаних із подальшою практичною діяльністю фахівців.

Основне завдання курсу „Вища математика” для економічних спеціальностей - виробити у студентів уміння проводити аналіз економічних процесів, складати їх математичні моделі та розв’язувати економічні задачі, застосовуючи основні математичні методи.

Вища математика є фундаментальною дисципліною. Вона лежить в основі математичної освіти фахівця-економіста і має -дуже велике значення для успішного вивчення інших загальнонаукових та спеціальних дисциплів. Із загальним курсом „Вища математика” безпосередньо зв’язані і є її продовженням курси „Теорія ймовірностей та математична статистика” і „Математичне програмування”, особливо необхідні для освоєння економічних спеціальностей.

Опанувавши вищу математику, студенти повинні вміти застосовувати математичні методи при розв’язанні прикладних задач та під час користування обчислювальною технікою.

Лекція 1. Визначники. Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Визначники та їхні властивості. Розкладання Лапласа. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера. Метод послідовного виключення невідомих.

1.1. Визначники та їхні властивості. Розкладання Лапласа.

Вирази $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1.1)$$

і $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (1.2)$$

називаються визначниками другого і третього порядків, відповідно.

Символами a_{ij} позначаються елементи визначника, причому індекс i показує номер рядка, а індекс j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент. Елементами визначника можуть бути числа, функції тощо.

Схеми обчислення визначників (1.1) і (1.2) безпосередньо випливають з їх означення. Для обчислення визначника третього порядку зручно користуватися правилом Сарюса: дописавши за визначником його перші два стовпці, дістаємо додатні і від'ємні члени виразу (1.2), відповідно, із схем:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \quad \text{та} \quad \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Приклади. 1. $\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) = 26$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-4)\cdot(-2)+(-5)\cdot 2\cdot(-1)+3\cdot 2\cdot 2-$

$$-3\cdot(-4)\cdot(-1)-3\cdot 2\cdot 2-(-5)\cdot 2\cdot(-2)=2\text{, оскільки}$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & -5 & 3 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 3 & -5 & 3 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ називається визначник, який утворюється з даного шляхом викреслення i-того рядка та j-того стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток :

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Приклад. Для елемента $a_{21}=-1$ визначника $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ маємо:

$M_{21}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=5;\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-5.$

Безпосередньо доводиться формула

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}\quad\left(i,j=\overline{1,3}\right).$$

Цей вираз, відомий як розкладання Лапласа, використовується для обчислення визначника.

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -8 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -8 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}-2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-26.$$

Тут розклали визначник за елементами першого рядка.

Той факт, що визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на їхні алгебраїчні доповнення, дає змогу індуктивно ввести означення визначника довільного порядку.

Вираз $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4} =$

$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + a_{4j}A_{4j}$, де $i, j = \overline{1,4}$ і A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}, називається визначником четвертого порядку.

Отже, визначник четвертого порядку виражається через визначники третього порядку, причому алгебраїчні доповнення його елементів визначаються так само, як і для визначників другого та третього порядків. Аналогічно дають означення визначника п'ятого порядку через визначники четвертого порядку і т. д. Таким чином, вважаючи, що встановлено поняття визначника (n – 1)-го порядку, вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}, \left(i, j = \overline{1,n}\right)$$

називається визначником n-го порядку.

Визначники мають такі властивості

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями.

Зауважимо, що оскільки наведена властивість встановлює рівноправність рядків і стовпців визначника, то всі подальші його властивості формулюються лише для рядків, маючи на увазі, що вони одночасно справедливі і для стовпців.

2. Якщо переставити місцями будь-які два рядки, то визначник змінює знак.

3. Якщо один із рядків складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.

4. Якщо визначник має два однакових рядки, то він дорівнює нулю.

5. Спільний множник усіх елементів одного рядка можна винести за знак визначника.

6. Якщо елементи двох рядків пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7. Якщо кожний елемент і-того рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у першого з яких і-й рядок складається з перших доданків, а у другого – з других інші ж елементи всіх трьох визначників однакові.

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне і те саме число.

9. Сума добутків елементів будь-якого рядка визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка дорівнює нулю.

Зазначимо, що всі властивості визначників доводяться безпосередньою перевіркою.

Зауважимо, що при обчисленні визначника на практиці за допомогою цих властивостей перетворюють його так, щоб у деякому рядку чи стовпці всі елементи, крім одного, були нулями, а потім розкладають його за елементами цього рядка чи стовпця.

Приклад. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -\left(1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)\right) +$

$+ 2 \cdot \left(1 \cdot 2 - 2 \cdot 2\right) = -8$, де у першому рядку перетворили всі елементи, крім першого, на нулі, додаючи перший стовпець до третього, а до четвертого – перший, помножений на 2 та розклали визначник четвертого порядку за елементами першого рядка, а потім визначник третього порядку – за елементами другого стовпця.

1.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера.

Однією з основних задач лінійної алгебри є розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1\ x_2\ ...\ x_n$ називається сукупність рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ----------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.3)$$

Числа a_{ij} називаються коефіцієнтами, а числа b_i – вільними членами системи (1.3) , де $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$.

Упорядкований набір n чисел (α_1, α_2, ..., α_n) називається розв'язком системи (1.3), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, ... , x_n$ кожне рівняння системи перетворюється в тотожність.

Система рівнянь (1.3) називається однорідною, якщо $b_1= b_2=...= b_m=0$, і неоднорідною у противному разі. Зауважимо, що однорідна система завжди має розв'язок, а саме $x_1= x_2 = ... = x_n = 0$, який називається тривіальним.

Система (1.3) називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною, якщо вона не має жодного розв'язку. Сумісна система називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок, і невизначеною, якщо вона має більше, ніж один розв'язок. Дві системи лінійних рівнянь, що мають однакові розв'язки, називаються еквівалентними.

Розглянемо найбільш важливий і в той же час найбільш простий випадок, коли число невідомих дорівнює числу рівнянь, а саме систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.4)$$

Утворимо визначник системи (1.4) складений із коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Помноживши перше рівняння системи на алгебраїчне доповнення A_{11}, друге - на A_{21} і т.д., останнє на A_{n1} і додавши їх усі, дістанемо $x_1(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\ldots+a_{n1}A_{n1})+x_2(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+\ldots+a_{n2}A_{n1})+\ldots+x_n(a_{1n}A_{11}+$ $+a_{2n}A_{21}+\ldots+a_{nn}A_{n1})=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1}$, або $x_1\cdot\Delta=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1}$, оскільки взяті у дужки коефіцієнти при невідомих $x_2, x_3, \ldots, x_n$ дорівнюють нулю за властивістю 9 визначників, а коефіцієнт при x_1 дорівнює Δ за формулою Лапласа. Позначивши $b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1}=\Delta_1$, де Δ_1 – визначник, який утворюється з визначника Δ заміною першого його стовпця, тобто стовпця коефіцієнтів при невідомому x_1 на стовпець вільних членів, матимемо

$$x_1\cdot\Delta=\Delta_1 \qquad (1.5)$$

Аналогічно отримаємо рівності:

$$x_2\cdot\Delta=\Delta_2,\ldots, x_n\cdot\Delta=\Delta_n, \qquad (1.6)$$

де Δ_i $\left(i=\overline{2,n}\right)$ є визначник, що утворюється з Δ заміною його i-го стовпця стовпцем вільних членів.

Тут можливі такі випадки:

1) $\Delta \neq 0$, тоді система (1.4) визначена і має єдиний розв’язок за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}; \qquad (1.7)$$

2) $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=...=\Delta_n=0$, тоді система (1.4) або невизначена, або несумісна;

3) $\Delta=0$ і хоча б один з визначників Δ_i відмінний від нуля, тоді система (1.4) несумісна.

Зауваження. Щодо випадків 2) і 3), то при $\Delta = 0$ і $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$ система (1.4) є невизначеною, а при n=2 вона також є невизначеною, але за умови $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

Слід зазначити, що формули Крамера не є ефективними при $n\geq 4$, оскільки обчислення визначників є досить кропіткою роботою.

Приклад. Розв’язати систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_3 = -2 \end{cases}$

Розв’язання. Оскільки $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 14 = 15 \neq 0$,

то задана система визначена. Знайдемо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 18 = -15,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 21 = 30,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 21 - 6 = 15,$$

і за формулами Крамера (1.7) матимемо розв’язок системи $x_1 = -\frac{15}{15} = -1$, $x_2 = \frac{30}{15} = 2$, $x_3 = \frac{15}{15} = 1$.

1.3. Метод послідовного виключення.

На практиці при розв’язанні систем лінійних рівнянь використовують значно раціональнішу обчислювальну схему, ніж формули Крамера, а саме -

метод послідовного виключення невідомих (метод Гаусса), який ґрунтується на еквівалентних перетвореннях рівнянь системи, тобто на тих самих елементарних перетвореннях, які виконувалися над рядками і стовпцями матриці при знаходженні її рангу.

Отже, застосовуючи елементарні перетворення до системи (1.3), побудуємо еквівалентну їй систему спеціального вигляду.

Змінимо порядок рівнянь в системі, якщо це потрібно, і виберемо першим те рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 не дорівнює нулю. Тоді не порушуючи загальності, вважатимемо, що $a_{11} \neq 0$. Помножимо перше рівняння на - $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, $\left(i, = \overline{1, n}\right)$ і додамо його почленно до рівнянь з номерами $\left(i, = \overline{2, n}\right)$.

Після такої операції у рівняннях з номерами $i > 1$ буде виключено невідоме x_1. При цьому може статись так, що разом з x_1 будуть виключені невідомі x_2, x_3, ..., x_{k-1}, але знайдеться хоча б одне рівняння, до якого входитиме невідоме x_k. Одне з таких рівнянь візьмемо тепер за друге рівняння системи.

Далі так само скористаємося цим другим рівнянням системи

$$a'_{2k} x_k + a'_{2k+1} x_{k+1} + ... + a'_{2n} x_n = b'_2$$

для виключення невідомого x_k з усіх рівнянь, що залишились, крім першого. Продовжуючи цей процес, після r кроків дістанемо ступінчату систему еквівалентну системі (1.3):

$$\begin{cases} a^*_{11}x_1 + \quad \dots \quad + a^*_{1n}x_n = b^*_1 \\ \qquad a^*_{2k}x_k + \quad \dots \quad + a^*_{2n}x_n = b^*_2 \\ \qquad\qquad a^*_{3p}x_p + \quad \dots \quad + a^*_{3n}x_n = b^*_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a^*_{rs}x_s + \quad \dots \quad + a^*_{rn}x_n = b^*_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b^*_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b^*_m \end{cases} \tag{1.8}$$

де $a^*_{11} = a_{11} \neq 0$, $a^*_{2k} \neq 0$, $a^*_{3p} \neq 0$, ..., $a^*_{rs} \neq 0$; $r \leq m$.

Підводячи підсумок, зазначимо:

1) якщо система (1.8) містить хоча б одне рівняння виду $0 = b_i^*$, де $b_i^* \neq 0$ $\left(i, = \overline{r+1, n}\right)$, то вона, а отже, і еквівалентна їй система (1.3) несумісні;

2) якщо ж система (1.8) не має рівнянь виду $0 = b_i^*$ $\left(b_i^* \neq 0, i = \overline{r+1, n}\right)$ і r < n, то взявши невідомі x_1, x_k, x_p,..., x_s за основні, а решту – за вільні та знайшовши з r-го рівняння x_s і підставивши його в перші r – 1 рівнянь, "піднімаючись по системі вгору", знайдемо всі інші основні невідомі, які, очевидно, виражаються через вільні невідомі, при цьому еквівалентні системи (1.3) і (1.8) мають безліч розв'язків;

3) у разі, коли r = n , система (1.3) зводиться до трикутного виду:

$$\begin{cases} a_{11}^* x_1 + \quad \dots \quad + a_{1n}^* x_n = b_1^* \\ \qquad a_{22}^* x_2 + \dots + a_{2n}^* x_n = b_2^* \\ \quad ------------ \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^* x_n = b_n^* \end{cases} \tag{1.9}$$

в якій всі невідомі - основні і знайшовши x_n з останнього рівняння та знову "піднімаючись по системі вгору", знайдемо всі інші невідомі, причому в цьому випадку система (1.3) має єдиний розв'язок.

Приклад. Розв'язати систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ -x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

Розв'язання. Виконавши елементарні перетворення над рядками розширеної матриці заданої системи і позначивши символом $\rightarrow$ перехід при цьому до відповідної матриці, дістанемо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Таким чином, отримали еквівалентну систему:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 0 \cdot x + y - z = 2 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2 \end{cases},$$

яка, очевидно, разом із заданою є несумісною

Завдання для самоконтролю

1. Що називається визначником другого порядку, третього порядку?

2. Що називається мінором, алгебраїчним доповненням?

3. Сформулюйте основні властивості визначників.

4. Як обчислюються визначники вищих порядків?

5. Що називається системою лінійних алгебраїчних рівнянь ?

6. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною, несумісною, визначеною, невизначеною?

7. Записати формули Крамера. В якому випадку вони застосовуються?

8. Як дослідити і розв’язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса?

9. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. (Відповідь: 0).

10. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. (Відповідь: -3).

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -1 & -x \\ -x & 2x & 1 \end{vmatrix} - 14 = 0$. (Відповідь: $x_1 = -1;\ x_2 = \frac{3}{2}$).

12. $\begin{vmatrix} (0{,}5)^{x^2+6} & 0{,}5 \\ 0{,}0625 & 2^{-2x} \end{vmatrix} = 0$. (Відповідь: $x = -1$).

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ x^2 & -4 & x^4 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} < 0$. (Відповідь: $x \in (-2;-1) \cup (1;2)$).

14. $\begin{vmatrix} |x+1| & 2 \\ 1 & \dfrac{1}{x-2} \end{vmatrix} \ge 0$. (Відповідь: $x \in (2;5]$).

Використовуючи формули Крамера, розв’язати системи:

15. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

(Відповідь: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$).

16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

(Відповідь: несумісна).

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$

(Відповідь: несумісна).

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

(Відповідь: $x_1 = 3$, $x_2 =4$, $x_3 = 5$).

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$

(Відповідь: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$).

20. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

(Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ $x_3 = -1$ $x_4 = -2$).

Дослідити системи методом Гаусса і у випадку сумісності розв'язати системи:

21. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 1 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

(Відповідь: $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{8}, x_3 = \frac{3}{8}, x_4 = \frac{1}{2}$).

22. $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0 \\ 5x_1 + 21x_3 + 13x_4 = 3 \end{cases}$$

(Відповідь: Несумісна).

23. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 6x_1 - x_2 + 4x_3 - 11x_4 = 6 \end{cases}$$

(Відповідь: Несумісна).

Лекція №2. Вектори. Скалярний, векторний та мішаний добутки.

Лінійні операції над векторами. Вектори в системі координат. Скалярний добуток. Векторний добуток двох векторів. Мішаний добуток векторів.

2.1 Лінійні операції над векторами.

Величини які повністю визначаються своїм числовим значенням, називається скалярним. До них відноситься об’єм, маса, густина, температура, довжина, площа та багато інших. Величини, що характеризуються як числовим значенням так і напрямом, називаються векторними. Такими величинами є сила, швидкість, прискорення тощо.

Будь-яка упорядкована пара точок на площині або в просторі задає напрямний відрізок, який називається вектором. Напрямом вектора вважають напрям від його початку до кінця. Якщо точка A є початком, а точка B – кінцем, то вектор символічно позначається так $\overline{AB}$ (або $\overline{a}$).

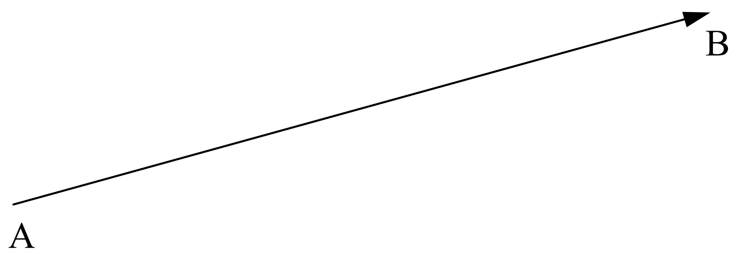


Рис. 2.1

Відстань від початку вектора $\overline{a}$ і його кінцем називають довжиною або модулем вектора і записують таким чином $|\overline{a}|$.

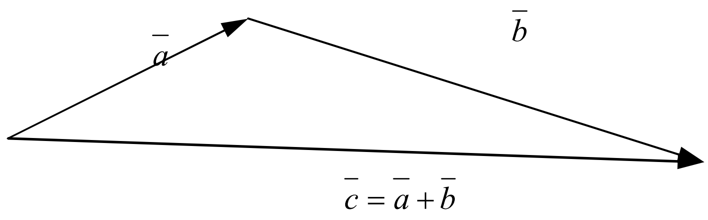
Одиничним називається вектор з довжиною рівною одиниці. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\overline{a}$, називається ортом вектора $\overline{a}$ і позначається через $\overline{a}^0$.

Вектор, у якого початок і кінець збігаються, називається нульовим і позначається так $\overline{0}$. Напрям вектора $\overline{0}$ невизначений.

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються колінеарними і записують $\overline{a} \| \overline{b}$, якщо вони лещать на паралельних прямих. Вектор $\overline{0}$ колінеарний будь-якому вектору. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються рівними і пишуть $\overline{a} = \overline{b}$, якщо вони колінеарні і мають однакові напрями та рівні довжини.

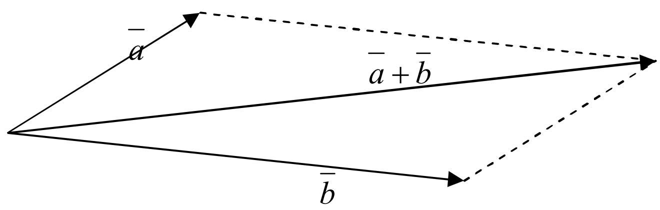
Три вектори називаються компланарними, якщо лежать в паралельних площинах.

Сумою $\overline{a} + \overline{b}$ векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$, направлений з початку вектора $\overline{a}$ в кінець вектора $\overline{b}$, якщо початок вектора $\overline{b}$ збігається з кінцем вектора $\overline{a}$.



правило трикутника

Рис. 2.2



правило паралелограма

Рис. 2.3

Вектор $-\overline{a}$ називається протилежним до вектора $\overline{a}$, якщо ці вектори є колінеарними і мають однакові довжини та протилежні напрями. Різниця векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ визначається таким чином: $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$.

Добутком $\lambda\overline{a}$ вектора $\overline{a}\neq 0$ на число $\lambda\neq 0$ називається вектор з довжиною $|\lambda||\overline{a}|$ і напрямом, який збігається з напрямом вектора $\overline{a}$ при $\lambda>0$, і протилежний йому при $\lambda<0$.

Властивості лінійних операцій над векторами:

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;

2) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$;

3) $\lambda\left(\mu\overline{a}\right)=(\lambda\mu)\overline{a}$;

4) $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$;

5) $\lambda\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$.

Віссю називається будь-яка напрямлена пряма. Заданий на осі напрям називають додатнім.

Проекцією точки A на вісь U називається основа A_1 перпендикуляра AA_1, опущеного з точки A на вісь.

Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь U називають додатне число $\left|\overline{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ і вісь U однаково напрямлені, і від'ємне $-\left|\overline{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ і вісь U протилежно напрямлені. Проекцією позначають так: $np_U\overline{AB}$. Вважають, що $np_U\overline{0}=0$. Кут між вектором $\overline{a}$ і віссю U визначається таким чином: $\left(\overline{a}\,\hat{,}\,U\right)=\varphi$, $0\leq\varphi\leq\pi$.

Властивості проекцій:

1) $np_U\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cos\varphi$ (2.1)

2) $np_U\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=np_U\overline{a}+np_U\overline{b}$ (2.2)

3) $np_U\left(\lambda\overline{a}\right)=\lambda np_U\overline{a}$ (2.3)

Доведемо, наприклад, останню властивість. Нехай $\varphi = \left(\overset{\wedge}{\bar{a}, U}\right)$ і $\psi = \left(\overset{\wedge}{\lambda\bar{a}, U}\right)$. Якщо $\lambda > 0$, то за формулою (2.1) маємо $np_U\left(\lambda\bar{a}\right) = \left|\lambda\bar{a}\right|\cos\psi = \lambda\left|\bar{a}\right|\cos\varphi = \lambda np_U\,\bar{a}$; якщо ж $\lambda < 0$, то $np_U\left(\lambda\bar{a}\right) = \left|\lambda\bar{a}\right|\cos\psi = -\lambda\left|\bar{a}\right|\cos(\pi - \varphi) = \lambda\left|\bar{a}\right|\cos\varphi = \lambda np_U\,\bar{a}$.

Приклад. Знайти $np_{\bar{b}}\,\bar{a}$, якщо $\left|\bar{a}\right| = 4$ і $\left(\overset{\wedge}{\bar{a}, \bar{b}}\right) = 120^0$.

Розв'язання. Дійсно, вважаючи, що вісь U задається вектором $\bar{b}$, який лежить на цій осі і має з нею однаковий напрям, дістанемо за формулою (2.1): $np_{\bar{b}}\,\bar{a} = \left|\bar{a}\right|\cos\left(\overset{\wedge}{\bar{a}, \bar{b}}\right) = 4\cos 120^0 = -2$.

2.2 Вектори в системі координат.

Базисом на площині (у просторі) називається довільна упорядкована пара (трійка) не колінеарних (не компланарних) векторів. Якщо $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – базисні вектори, тобто вектори, які складають базис у просторі, і $\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$, де x, y, z – числа, то це означає, що вектор $\bar{a}$ розкладений за цими базисними векторами, причому x, y, z – його координати в цьому базисі. Зазначимо, що кожний вектор можна розкласти за даним базисом і в цьому випадку його координати визначаються однозначно.

Сукупність точки, яка називається початком координат, і базисних векторів із спільним початком в цій точці називається декартовою системою координат.

Якщо вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ складають базис у просторі і $\left|\bar{i}\right| = \left|\bar{j}\right| = \left|\bar{k}\right| = 1$ та $\left(\overset{\wedge}{\bar{i}, \bar{j}}\right) = \left(\overset{\wedge}{\bar{j}, \bar{k}}\right) = \left(\overset{\wedge}{\bar{k}, \bar{i}}\right) = \frac{\pi}{2}$, то такий базис називається ортонормованим. Вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ утворюють праву трійку, коли з кінця вектора $\bar{k}$ найкоротший поворот від вектора $\bar{i}$ до вектора $\bar{j}$ видно проти годинникової стрілки, в противному разі ці вектори складають ліву трійку.

Прямокутною декартовою системою координат називається Декартові система координат, ортонормованим базис якої утворений правою трійкою векторів. Надалі розглядатиметься лише права прямокутна система координат.

Нехай задана прямокутна система координат $OXYZ$ і довільна точка M в ній.

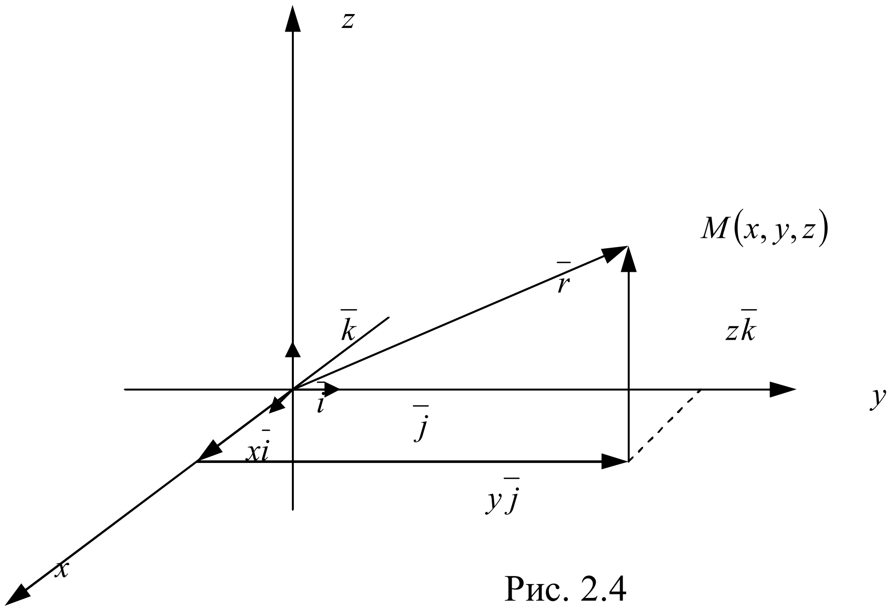


Рис. 2.4

Радіус-вектор $\bar{r} = \overline{OM}$ точки M можна записати у вигляді $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x; y; z)$, де числа x, y, z – його координати. Координатами вектора $\bar{r}$ називаються координати точки M і записують $M(x; y; z)$, причому $x = np_{Ox}\overline{OM}$, $y = np_{Oy}\overline{OM}$, $z = np_{Oz}\overline{OM}$.

Розглянемо в системі координат $OXYZ$ вектор $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$.

Довжини вектора обчислюються так:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (2.4)$$

Якщо початком вектора $\bar{a} = \overline{AB}$ є точка $A(x_1, y_1, z_1)$, а його кінцем – $B(x_2, y_2, z_2)$, то $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$. Отже, маємо $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. (2.5)

Нехай $\alpha = \left(\overline{a}, \hat{\overline{i}}\right), \beta = \left(\overline{a}, \hat{\overline{j}}\right), \gamma = \left(\overline{a}, \hat{\overline{k}}\right)$, де $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$, є кути, які утворює вектор $\overline{a}$ з відповідними осями координат. Величини

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\overline{a}\right|}, \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\overline{a}\right|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\overline{a}\right|} \qquad (2.6)$$

називаються напрямними косинусами.

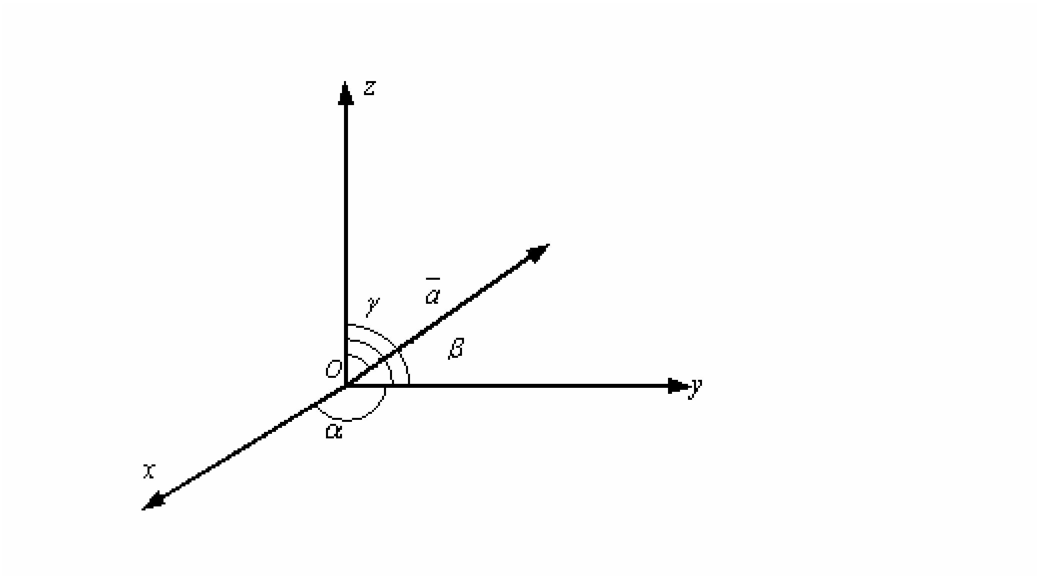


Рис. 2.5

Підносячи обидві частини кожної з рівностей (2.6) до квадрата і додаючи, дістанемо за формулою (2.4) рівність $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. (2.7)

Нехай тепер задано вектори $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z), \overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$ і дійсне число λ. Тоді:

$$\lambda\overline{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) \qquad (2.8)$$

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z) \qquad (2.9)$$

При $\overline{a} = \overline{b}$ маємо $a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$. Якщо ж вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ – колінеарні, то $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ і навпаки.

Приклад. Знайти напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$, якщо $A(0,1,3)$ і $B(1,-1,5)$.

Розв'язання. За формулами (2.5), (2.4) та (2.6) маємо $\overline{AB} = (1,-2,2); \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3; \cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = -\frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}$.

2.3 Скалярний добуток.

Скалярний добуток двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається число, яке позначається та обчислюється так $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi, \varphi = \left(\bar{a}\hat{,}\bar{b}\right)$. (2.10)

Геометричний зміст скалярного добутку виражають формули:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| np_{\bar{b}}\bar{a} \qquad (2.11)$$

Зауваження. Величина $\bar{a}\bar{b}$ називається скалярним добутком тому, що вона скаляр і має деякі властивості звичайного добутку чисел.

Властивості скалярного добутку:

1. $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$
2. $(\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$
3. $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$
4. Якщо $\bar{a}, \bar{b} \neq 0$, то кут $\varphi = \left(\bar{a}\hat{,}\bar{b}\right)$ – гострий при $\bar{a}\bar{b} > 0$ і φ – тупий при $\bar{a}\bar{b} < 0$
5. Скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.
6. $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$ або $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

Доведемо, наприклад, третю властивість. Дійсно, маємо $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}| np_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}| np_{\bar{a}}\bar{b} + |\bar{a}| np_{\bar{a}}\bar{c} = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$. Обчислимо скалярний добуток інакше. $\bar{a}\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = a_x b_x \bar{i}^2 + a_x b_y \bar{i}\bar{j} + a_x b_z \bar{i}\bar{k} + a_y b_x \bar{i}\bar{j} +$

$+ a_y b_y \bar{j}^2 + a_x b_y \bar{j}\bar{k} + a_z b_x \bar{k}\bar{i} + a_z b_y \bar{k}\bar{j} + a_z b_z \bar{k}^2$. Оскільки $\bar{i} \perp \bar{j}$, $\bar{j} \perp \bar{k}$, $\bar{i} \perp \bar{k}$, $\bar{i}\bar{j} = \bar{i}\bar{k} = \bar{j}\bar{k} = 0$, $\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1$. Отже, $\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. (2.12)

Звідки необхідною та достатньою умовою перпендикулярності векторів є рівність:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \qquad (2.13)$$

Кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ визначається таким чином:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (2.14)$$

Приклад. Знайти внутрішній кут при вершині A трикутника, заданого вершинами $A(-1;2;3)$, $B(0;0;1)$, $C(-3;4;0)$.

Розв'язання. Дійсно, $\overline{AB} = (1;-2;-2)$, $\overline{AC} = (-2;2;-3)$; за формулою (2.14) маємо: $\cos\varphi = \frac{1(-2)+(-2)2+(-2)(-3)}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{4+4+9}} = 0$. Отже, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

2.4. Векторний добуток двох векторів.

Векторним добутком вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$, який визначається умовами:

1) $|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$, $\varphi = (\overline{a}, \overline{b})$;

2) $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$;

3) $\overline{c} \neq 0$ і $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ утворюють праву трійку векторів.

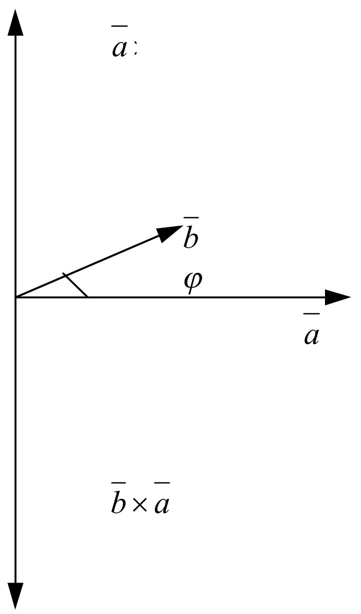


Рис. 2.6

Властивості векторного добутку:

1) $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$.

2) $\lambda\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a} \times \lambda\overline{b} = \lambda(\overline{a} \times \overline{b})$.

3) $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$.

4) Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні.

5) Модуль $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$ векторного добутку не колінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ віднесених до спільного початку: $S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$. (2.15)

Знайдемо формулу для обчислення векторного добутку.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\right)\times\left(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}\right)=a_xb_x\left(\bar{i}\times\bar{i}\right)+a_xb_y\left(\bar{i}\times\bar{j}\right)+a_xb_z\left(\bar{i}\times\bar{k}\right)+a_yb_x\left(\bar{j}\times\bar{i}\right)+$$
$$+a_yb_y\left(\bar{j}\times\bar{j}\right)+a_yb_z\left(\bar{j}\times\bar{k}\right)+a_zb_x\left(\bar{k}\times\bar{i}\right)+a_zb_y\left(\bar{k}\times\bar{j}\right)+a_zb_z\left(\bar{k}\times\bar{k}\right)=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\bar{i}-\left(a_xb_z-a_zb_z\right)\bar{j}+$$
$$+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\bar{k}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\bar{k}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

тут скористались означенням та властивостями 1)-3) векторного добутку. Отже,

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \quad (2.16)$$

Приклад. Знайти площу трикутника заданого вершинами $A(1;2;0)$, $B(0;2;0)$, $C(1;0;2)$.

Розв'язання. Оскільки $\overline{AB}=(-1;0;0)$, $\overline{AC}=(0;-2;2)$ то за формулою (2.16) маємо $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=-(-1)\begin{vmatrix}\bar{j} & \bar{k}\\ -2 & 2\end{vmatrix}=2\bar{j}+2\bar{k}=(0;2;2)$. Отже, за формулою (2.15) дістанемо $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+2^2+2^2}=\sqrt{2}$.

2.5. Мішаний добуток.

Мішаним добутком векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ називається число яке позначається і обчислюється таким чином $\overline{abc}=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\bar{c}$, тобто мішаний добуток векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – це скалярний добуток вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$.

Знайдемо мішаний добуток векторів заданих своїми координатами: $\bar{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\bar{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, $\bar{c}=\left(c_x,c_y,c_z\right)$.

Оскільки $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k}$ то

$$(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k}=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким чином, маємо $\overline{abc}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$. (2.17)

Властивості мішаного добутку:

1) Якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то він змінить знак: $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}=-(\bar{b}\times\bar{a})\bar{c}$.

2) При циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється: $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}=(\bar{b}\times\bar{c})\bar{a}=(\bar{c}\times\bar{a})\bar{b}$.

3) У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна міняти місцями: $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}=\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})$.

4) Модуль мішаного добутку $\overline{abc}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, віднесених до спільного початку: $V=\left|\overline{abc}\right|$. (2.18)

5) Якщо $\overline{abc}>0$, то вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ утворюють праву трійку, якщо ж $\overline{abc}<0$, то вони складають ліву трійку векторів.

6) Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $\overline{abc}=0$.

Доведемо, наприклад, останню властивість. Якщо $\overline{abc}=0$, то вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ і лежить з векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ в одній площині. Тобто вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ є компланарними. якщо ж $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ – компланарні вектори, то вони лежать в паралельних площинах, тобто, можна вважати, в одній площині і тому $\left(\bar{a}\times\bar{b}\,\hat{,}\,\bar{c}\right)=\frac{\pi}{2}$, отже, $\overline{abc}=0$.

Приклад. Довести, що точки $A(0;1;2)$, $B(-2;0;-1)$, $C(-1;5;8)$, $D(1;6;11)$ лежать в одній площині.

Розв’язання. Знаходимо вектори $\overline{AB} = (-2;-1;-3)$, $\overline{AC} = (-1;4;6)$, $\overline{AD} = (1;5;9)$ та їх мішаний добуток за формулою (2.17): $\overline{AB}\overline{AC}\overline{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$. Отже, за властивістю 6) $\overline{AB}\overline{AC}\overline{AD}$ компланарні, і тому точки A, B, C, D лежать в одній площині.

Запитання для самоконтролю:

1. Що називається вектором?
2. Які вектори називають колінеарними, компланарними?
3. Що називається проекцією вектора на вісь?
4. Яка система координат називається правою?
5. Що називається напрямними косинусами вектора?
6. Як визначаються лінійні з векторами, заданими своїми координатами?
7. Що називається скалярним добутком двох векторів?
8. У чому полягає геометричний зміст скалярного добутку?
9. Що називається векторним добутком двох векторів?
10. За якою формулою обчислюється векторний добуток?
11. Що називається мішаним добутком?
12. Як обчислюється мішаний добуток?
13. У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?
14. У чому полягає умова компланарності двох векторів?

Завдання для самостійної роботи:

1) У прямокутній системі координат OXY побудувати точки $A(1;2)$, $B(-2;-3)$.

2) Знайти вектор $\overline{a} = (a_x;-1;a_z)$, колінеарний вектору $\overline{b} = (1;-2;3)$. (Відповідь: $a_x = \frac{1}{2}$, $a_z = \frac{3}{2}$)

3) Задані вектори $\overline{a}=(2;0;-2)$ і $\overline{b}=(-2;1;2)$. Знайти проекцію вектора $\overline{c}=2\overline{a}+\overline{b}$ на вектор $\overline{b}$. (Відповідь: $np_{\overline{b}}\overline{c}=-\frac{7}{3}$)

4) Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}=2\overline{i}-\overline{j}$, $\overline{b}=-\overline{j}+2\overline{k}$. (Відповідь: $\varphi=\frac{\pi}{2}$)

5) Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}=\overline{m}-2\overline{n}$, $\overline{b}=2\overline{m}+3\overline{n}$, якщо $|\overline{m}|=|\overline{n}|=1$, $\left(\overline{m}\,\hat{,}\,\overline{n}\right)=\frac{\pi}{6}$. (Відповідь: $S=3{,}5$)

6) Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(2;-1;0)$, $B(5;5;3)$, $C(3;2;-2)$, $D(4;1;2)$. (Відповідь: $V=3$)

Лекція №3. Пряма на площині і у просторі. Площина.

Мета: Вивчення студентами рівнянь прямої та площини для використання при розв'язанні задач економічної теорії.

План: 1. Різні види рівнянь прямої.
2. Кут між двома прямими.
3. Відстань від точки до прямої.
4. Рівняння площини.
5. Кут між двома площинами.
6. Кут між прямою та площиною.
7. Відстань від точки до площини.

3.1 Різні види рівнянь прямої на площині (і у просторі).

Рівняння $F(x,y)=0$ називається рівнянням лінії l на площині відносно певної системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати x і y кожної точки лінії l і не задовольняють координати інших точок площини. Рівняння $F(x,y)=0$ лінії l цілком визначає її на площині.

Якщо лінію розглядати як траєкторію рухомої точки (причому можна не тільки на площині а й у просторі), то її задають векторним параметричним рівнянням $\bar{r}=\bar{r}(t)$, де t – параметр. Таким чином, при зміні параметру t рівняння $\bar{r}=\bar{r}(t)$ задає деяку множину векторів, кінці яких утворюють геометричне місце точок, що визначає деяку лінію l.

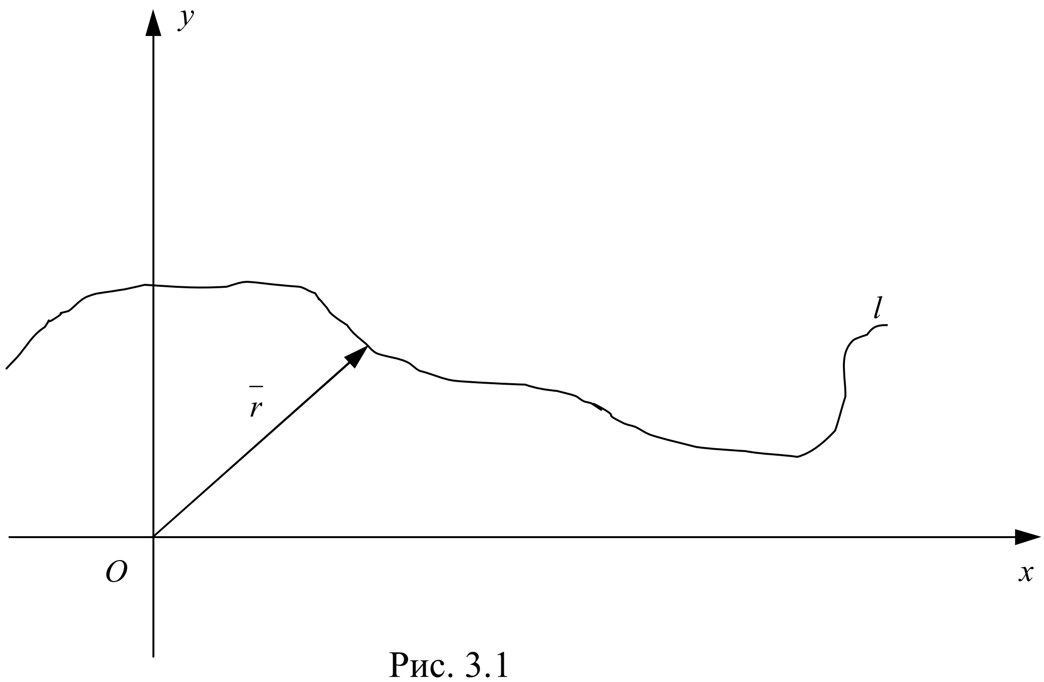


Рис. 3.1

Векторному параметричному рівнянню $\bar{r} = \bar{r}(t)$ в системі координат OXY (або $OXYZ$) відповідають скалярні рівняння $x = x(t)$, $y = y(t)$ (або ще і $z = z(t)$) – його проекції на осі координат, які є параметричними рівняннями лінії.

Нехай пряма l (на площині чи в просторі) проходить через задану точку M_0 паралельно заданому не нульовому вектору $\bar{s}$, який називається напрямним, M – довільна точка прямої.

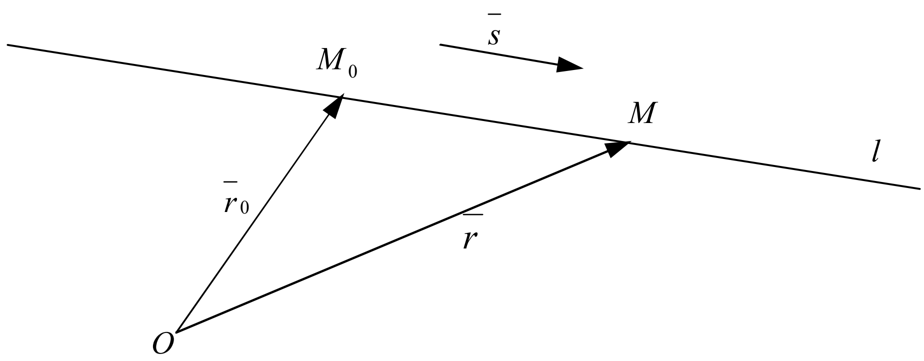


Рис. 3.2

Оскільки $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$ і $\bar{s}$ – колінеарні вектори, то $\bar{r} - \bar{r}_0 = \bar{s}t$, де t – параметр. Звідки

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{s}t, \tag{3.1}$$

яке називається векторним параметричним рівнянням прямої і яке має однаковий вигляд як на площині, так і в просторі.

Якщо пряма l на площині задається точкою $M_0(x_0, y_0)$ і напрямним вектором $\bar{s} = (m, n)$ (або у просторі точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\bar{s} = (m, n, p)$) то прирівнявши відповідні координати векторів $\bar{r}$ і $\bar{r}_0 + \bar{s}t$ дістанемо параметричні рівняння прямої

$$x = x_0 + mt, \; y = y_0 + nt, \tag{3.2}$$

звідки маємо її канонічне рівняння

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \tag{3.3}$$

зауваження. Для прямої в просторі параметричні (3.2) та канонічне (3.3) рівняння відповідно мають вигляд $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + pt$ і $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

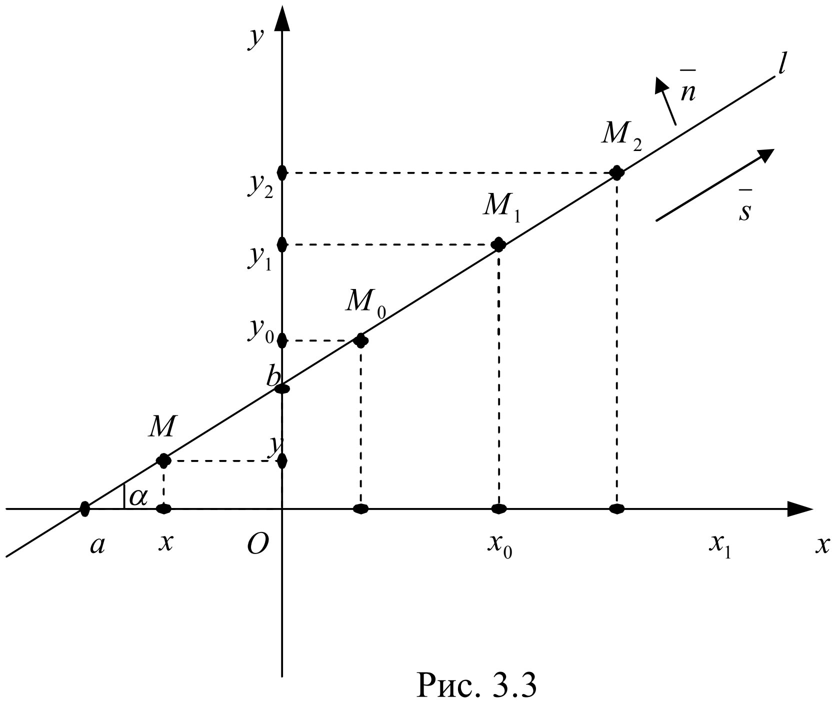


Рис. 3.3

Якщо пряма є перпендикулярна до осі OX, то можна записати $y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0)$ або $y = \frac{n}{m}x + \left(y_0 - \frac{n}{m}x_0\right)$. Позначивши $k = \frac{n}{m} = tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт, $b = y_0 - \frac{n}{m}x_0$, дістанемо рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 і має кутовий коефіцієнт k:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (3.4)$$

або

$$y = kx + b \qquad (3.5)$$

зазначимо, що коли пряма проходить через початок координат, то її рівняння (3.5) набирає вигляду $y = kx$.

Якщо пряма проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ то тоді $\bar{s} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ і її рівняння має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (3.6)$$

Зауважимо, що в просторі маємо $\bar{s} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, де $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – точки, через які проходить пряма і тоді рівняння (3.6) набирає вигляду

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

У разі коли пряма проходить через точки $(a,0)$ та $(0,b)$, то $\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}$ або $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. (3.7)

Рівняння (3.7) називається рівнянням прямої у відрізках.

Розглянемо пряму, яка проходить через задану точку $M_1(x_1, y_1)$ перпендикулярно до заданого ненульового вектора $\bar{n} = (A, B)$, який називається нормальним. Якщо $M(x, y)$ – довільна точка прямої, то $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1) \perp \bar{n}$ і $\overline{M_1M}\bar{n} = 0$, тобто $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ (3.8) – нормальне рівняння прямої.

З (3.8) маємо $Ax + By + (-Ax_1 - By_1) = 0$. Позначивши $C = -Ax_1 - By_1$, дістанемо загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ (3.9).

Кожне з рівнянь (3.2)-(3.8) зводиться до рівняння (3.9), отже, кожна пряма задається лінійним рівнянням (3.9), і, кожне рівняння (3.9) визначає на площині пряму. Таким чином, кожна пряма є лінією першого порядку, і навпаки.

Якщо в загальному рівнянні (3.9) буде $A = 0, B \neq 0$, то воно має вигляд $y = -\frac{C}{B}$ і пряма паралельна осі OX, зокрема при $C = 0$ маємо рівняння прямої $y = 0$, яке визначає вісь OX. Якщо ж буде $A \neq 0, B = 0$, то рівняння прямої набирає вигляду $x = -\frac{C}{A}$, а сама пряма паралельна осі OY. Коли при цьому $C = 0$ то рівняння $x = 0$ задає вісь OY.

У разі коли $C = 0$ рівняння (3.9) перетворюється в рівняння прямої $y = -\frac{A}{B}x$, яка проходить через початок координат.

Приклад. Транспортні витрати перевезення одиниці вантажу y залізничним та автомобільним транспортом на відстань x (вимірюється десятками кілометрів) знаходять за формулами $y = \frac{x}{2} + 7$ та $y = x + 2$. Визначити рентабельність кожного виду транспорту.

Розв'язання. Побудуємо графіки транспортних витрат перевезення:

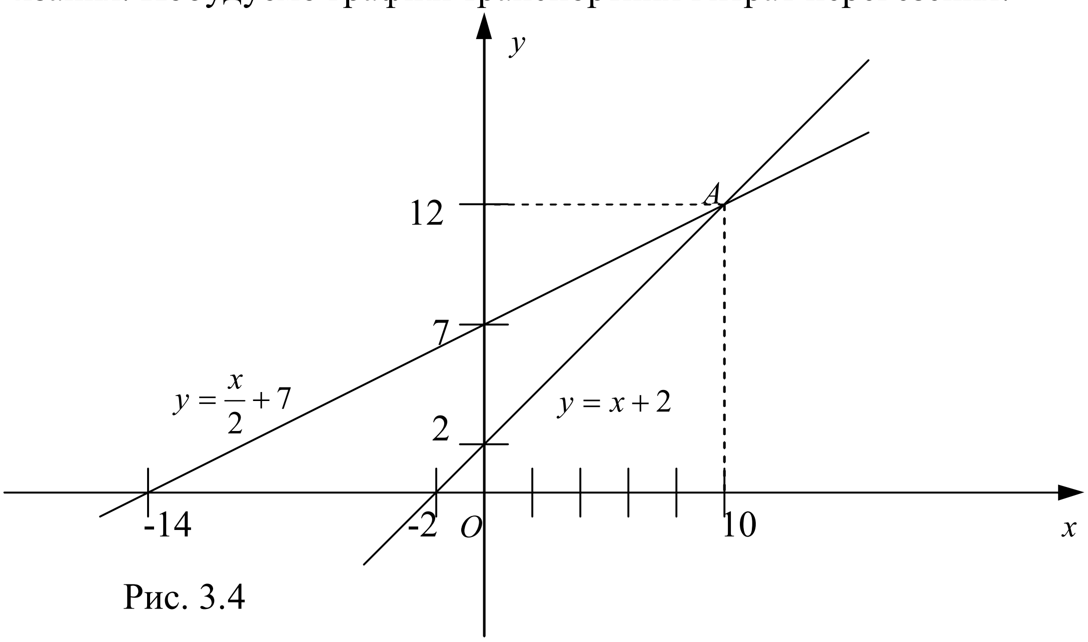


Рис. 3.4

Знайдемо їх точку перетину A, розв'язавши за формулами Крамера систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - y = -7 \\ x - y = -2 \end{cases}.$$

Отже, маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = 0{,}5;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 7 - 2 = 5; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 + 7 = 6;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{0{,}5} = 10; \ y = \frac{6}{0{,}5} = 12; \ A(10{,}12).$$

Звідси випливає:

1) якщо $x \in (0;10)$, тобто $x < 100км$, транспортні витрати перевезення y автотранспортом нижче витрат перевезення залізницею;
2) якщо ж $x \in (10;\infty)$, тобто $x > 100км$, то більш рентабельним буде залізничний транспорт.

3.2 Кут між двома прямими.

Кут між двома прямими l_1 і l_2 вважається кутом між їхніми напрямними векторами $\bar{s}_1$ і $\bar{s}_2$. Якщо прямі задані канонічними рівняннями $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}$ та $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}$ (або в просторі: $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ і $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$) і $\varphi = \left(\bar{s}_1 \hat{,} \bar{s}_2\right) = \left(l_1 \hat{,} l_2\right)$, $0 < \varphi < \pi$, $\bar{s}_1 = (m_1, n_1)$, $\bar{s}_2 = (m_2, n_2)$ (у просторі: $\bar{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ та $\bar{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$), то за формулою (2.14) маємо

$$\cos\varphi = \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2}{|s_1||s_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \qquad (3.10)$$

(у просторовому випадку: $\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$). У разі коли $l_1 \parallel l_2$ дістанемо умову паралельності двох прямих: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ (3.11) (у просторі $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$). Якщо ж $l_1 \perp l_2$, то умова перпендикулярності двох прямих має вигляд $m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ (3.12) (у просторі: $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$).

Нехай тепер прямі задані загальними рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. Тоді $\varphi = \left(\bar{n}_1, \bar{n}_2\right) = (l_1, l_2)$, де $\bar{n}_1 = (A_1, B_1)$ і $\bar{n}_2 = (A_2, B_2)$. Звідси аналогічно дістанемо:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}; \qquad (3.13)$$

умову паралельності: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$; (3.14)

умову перпендикулярності: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. (3.15)

Нарешті нехай прямі задані рівняннями $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$, де $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$.

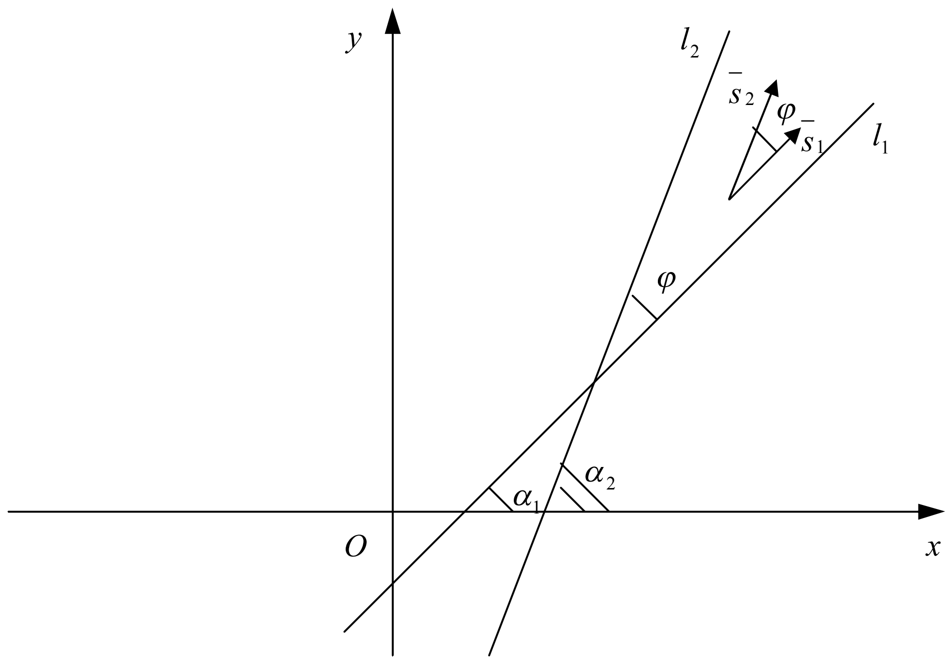


Рис. 3.5

Тоді $tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$ або $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$. (3.16)

Формула (3.16) визначає кут, на який потрібно повернути пряму l_1 проти годинникової стрілки, щоб вона збігалась з прямою l_2. Формули (3.10), (3.13) та (3.16) визначають один із двох суміжних кутів між двома прямими; інший кут дорівнює $\pi - 4$. Якщо тут $l_1 \parallel l_2$, то $tg\varphi = 0$ $(\varphi = 0)$ і умова паралельності прямих має вигляд: $k_1 = k_2$ (3.17).

Якщо ж $l_1 \perp l_2$, то тоді $tg\varphi$ не існує $(\varphi = 90^0)$ і умова перпендикулярності: $k_1k_2 + 1 = 0$ або $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ (3.18).

Приклад. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $(-8,1)$ перпендикулярно прямій $2x - y + 7 = 0$.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння прямої l_1 так: $y = 2x + 7$. Отже, кутовий коефіцієнт прямої $k_1 = 2$. Оскільки шукана пряма l_2 перпендикулярна прямій l_1, то за формулою (3.18) маємо $k_2 = -\frac{1}{2}$.

Скориставшись рівнянням прямої (3.4) дістанемо $y-1=-\frac{1}{2}(x+8)$ або $x+2y+6=0$ – шукане рівняння.

3.3 Відстань від точки до прямої.

Нехай задано пряму l рівнянням $Ax+By+C=0$ і точку $M_0(x_0,y_0)$.

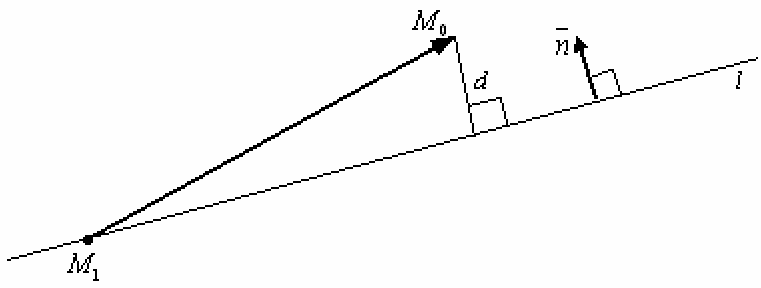


Рис. 3.6

Якщо $M_1(x_1,y_1)$ – довільна точка прямої l, то $d=\left|np_{\bar{n}}\overline{M_1M_0}\right|=\frac{\left|\overline{M_1M_0}\,\bar{n}\right|}{\left|\bar{n}\right|}=\frac{\left|Ax_0+By_0-Ax_1-By_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Оскільки $Ax_1+By_1+C=0$, то $-Ax_1-By_1=C$ і тому маємо

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3.19)$$

Приклад. Знайти площу квадрата, сторони якого лежать на прямих $4x-3y-10=0$ і $8x-6y+15=0$.

Розв’язання. Оскільки дві прямі є паралельними, то довжину d сторони квадрата відшукаємо як відстань від довільної точки однієї прямої до другої прямої. Нехай $x=1$, тоді $4\cdot1-3y-10=0$, звідки $y=-2$ і точка $M_0(1,-2)$ лежить на прямій з рівнянням $4x-3y-10=0$. За формулою (3.19) дістанемо $d=\frac{\left|8\cdot1-6\cdot(-2)+15\right|}{\sqrt{8^2+(-6)^2}}=\frac{35}{10}=\frac{7}{2}$. Таким чином, площа квадрата $S=d^2=\frac{49}{4}$.

3.4 Рівняння площини.

Нехай в прямокутній системі координат $OXYZ$ задано площину Π точкою $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і вектором $\bar{n}=(A,B,C)$, який перпендикулярний до цієї площини і який з цього приводу називається нормальним вектором. Якщо $M(x,y,z)$ – будь-яка точка площини, то $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ і $\overline{M_0M}\perp\bar{n}$. Звідки $\overline{M_0M}\,\bar{n}=0$ або

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (3.20)$$

або

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (3.21)$$

де $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Рівняння (3.20) і (3.21) називається відповідно рівнянням площини, яка проходить через задану точку M_0 перпендикулярно до заданого вектора $\bar{n}$ та загальним рівнянням площини.

Зазначимо, що всяка площина визначається рівнянням першого степеня (3.21), і навпаки, кожне алгебраїчне рівняння першого степеня із змінними x, y і z є рівнянням площини.

Якщо $D = 0$, то рівняння (3.21) набирає вигляду $Ax + By + Cz = 0$ і визначає площину, яка проходить через початок координат.

У разі коли $A = B = 0$ і $C, D \neq 0$ маємо $z = -\dfrac{D}{C}$, і таке рівняння визначає площину, паралельну площині OXY, зокрема при $D = 0$ рівняння $z = 0$ задає площину OXY.

Аналогічно площини з рівнянням $x = -\dfrac{D}{A}$ і $y = -\dfrac{D}{B}$ визначають площини паралельні відповідно площинам OYZ та OXZ, причому площини $x = 0$ і $y = 0$ збігаються відповідно з площинами OYZ і OXZ.

Нехай тепер на площині задано три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій і $M(x, y, z)$ – довільна точка площини, тоді вектори $\overline{M_1M_3}$, $\overline{M_1M_2}$ і $\overline{M_1M}$ є компланарними і, отже, їх мішаний добуток $\overline{M_1M}\,\overline{M_1M_2}\,\overline{M_1M_3} = 0$ або

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.22}$$

(3.22) – рівняння площини, що проходить через три точки.

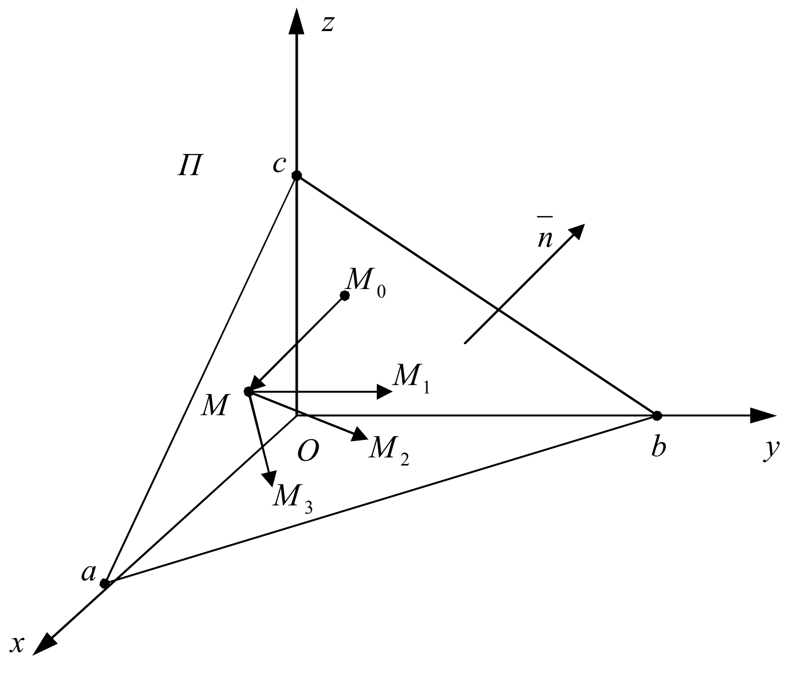


Рис. 3.7

Зокрема, якщо площина Π відтинає на осях координат OX, OY, OZ відрізки a, b, c, тобто проходить через точки $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ і $(0,0,c)$, то з (3.22) дістанемо рівняння площини у відрізках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{3.23}$$

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1,2,3)$ перпендикулярно до осі OY.

Розв'язання. Орт $\overline{j}=(0,1,0)$ перпендикулярний до площини, тому його можна розглядати як нормальний вектор до неї. Отже, шукане рівняння має вигляд $0(x-1)+1(y-2)+0(z-3)=0$ або $y=2$.

3.5 Кут між двома площинами.

Нехай площини Π_1 і Π_2 задані своїми рівняннями $Ax_1+By_1+Cz_1+D_1=0$, $Ax_2+By_2+Cz_2+D_2=0$ відповідно.

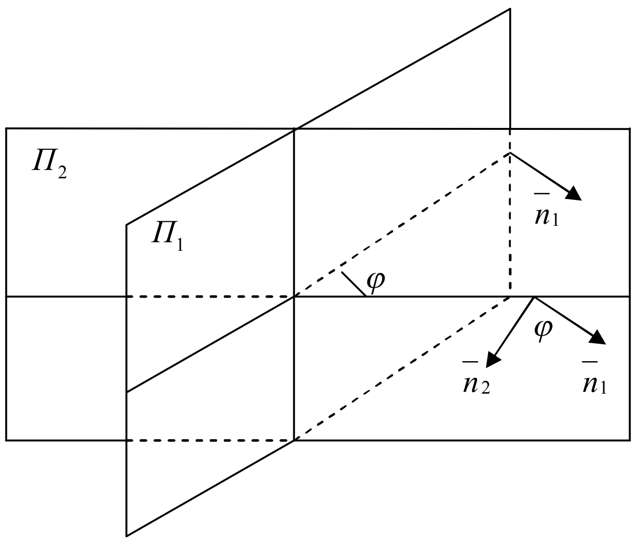


Рис. 3.8

Довільний кут між площинами вимірюється лінійним кутом $\varphi=\left(\overline{n}_1\,\widehat{,}\,\overline{n}_2\right)$, де $\overline{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ і $\overline{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$. Отже, з формули (2.14) маємо

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{3.24}$$

звідси маємо умову перпендикулярності площин:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{3.25}$$

Якщо площини $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, то координати їх нормальних векторів $\overline{n}_1$ і $\overline{n}_2$ пропорційні і маємо умову паралельності площин:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{3.26}$$

Приклад. Знайти кут між двома площинами, які задані рівняннями $2x + y + 3z - 1 = 0$ і $x + y - z + 5 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $\bar{n}_1 = (2,1,3)$ і $\bar{n}_2 = (1,1,-1)$, то за формулою (3.24) маємо $\cos\varphi = \dfrac{2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 0$. Отже, дані площини перпендикулярні.

3.6 Кут між прямою та площиною.

Кутом між прямою l і площиною Π вважають кут між прямою l і її проекцією на площину Π.

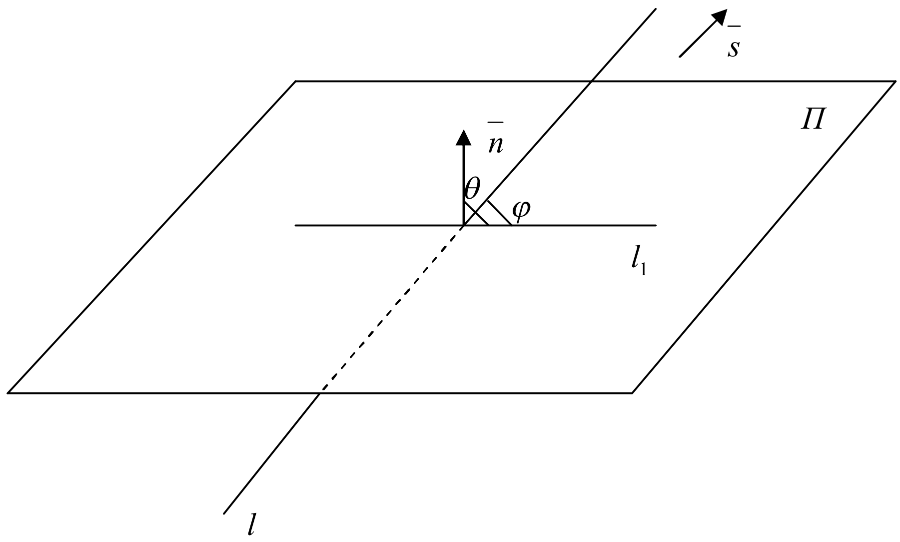


Рис. 3.9

Нехай пряма і площина задані рівняннями $Ax + By + Cz + D = 0$ і $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$. Позначимо кут між прямою l і її проекцією l_1 на площину Π і напрямним вектором $\bar{s} = (n, m, p)$ прямої l – через θ. Якщо $\theta \le 90^0$ то $\varphi = 90^0 - \theta$ і тому $\sin\varphi = \cos\theta$; якщо ж $\theta > 90^0$, то $\varphi = \theta - 90^0$ і $\sin\varphi = -\cos\theta$. Отже, $\sin\varphi = |\cos\theta|$. Звідси маємо

$$\sin\varphi = |\cos\theta| = \frac{|\bar{n}\cdot\bar{s}|}{|\bar{n}||\bar{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (3.27)$$

Якщо $l \parallel \Pi$, то $\bar{n} \perp \bar{s}$ і тому $\bar{n}\cdot\bar{s} = 0$, тобто умова паралельності прямої і площини

$$Am + Bn + Cp = 0. \qquad (3.28)$$

Якщо ж $l \perp \Pi$, то $\bar{n} \parallel \bar{s}$ і маємо умову перпендикулярності прямої і площини

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \qquad (3.29)$$

Приклад. Через точку $M(0,1,2)$ провести пряму, перпендикулярну до площини, заданої рівнянням $x-2y+3z+1=0$.

Розв'язання. Оскільки пряма перпендикулярна до площини, то за її напрямний вектор можна взяти нормальний вектор площини, тобто $\bar{s}=\bar{n}=(1,-2,3)$. Тоді за формулою (3.3) просторового випадку маємо шукане рівняння $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{3}$.

3.7 Відстань від точки до площини.

Якщо задане рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ площини Π і точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, що не лежить на цій площині, то відстань d від точки M_0 до площини Π відшукують за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.30)$$

Приклад. Знайти висоту AH піраміди, заданої своїми вершинами $A(-1,2,-1)$, $B(1,0,2)$, $C(0,1,-1)$, $D(2,0,-1)$.

Розв'язання. За формулою (3.22) знаходимо рівняння площини, що проходить через точки B, C, D: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0$, або $3x+6y+z-5=0$.

Шукану висоту як відстань точки A від площини BCD знайдемо за формулою (3.30): $AH=d=\frac{|3\cdot(-1)+6\cdot 2+1\cdot(-1)-5|}{\sqrt{3^2+6^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{46}}$.

Література:

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа, 1993.

2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів – Ч.1 – К. – 1997.

Запитання до самоконтролю

1) Що називається рівнянням лінії на площині?
2) Що називається напрямним вектором прямої?
3) Вивести канонічні та параметричні рівняння прямої.
4) Вивести рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом та рівняння прямої, що проходить через дві точки.
5) Вивести рівняння прямої у відрізках та загальне рівняння прямої.
6) Як знайти кут між двома прямими?
7) Як записати умови паралельності та перпендикулярності двох прямих?
8) Як знайти відстань від точки до прямої?
9) Записати та дослідити загальне рівняння площини.
10) Вивести рівняння площини у відрізках.
11) Як обчислити кут між двома площинами?
12) Які умови паралельності та перпендикулярності двох площин?
13) Як знайти відстань від прямої до площини?
14) Як знайти кут між прямою і площиною?
15) Які умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини?

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти кут між прямими $x=4$ і $2x-y-1=0$. (Відповідь: $\varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$).
2. Точка $A(2,0)$ є вершиною правильного трикутника, а протилежна їй сторона лежить на прямій $x+y-1=0$. Скласти рівняння двох інших сторін. (Відповідь: $x-\left(2\pm\sqrt{3}\right)y-2=0$).
3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-1,3)$: а) паралельно прямій $x-5y+2=0$; б) перпендикулярно до прямої $3x-y+4=0$. (Відповідь: а) $x-5y+16=0$; б) $x+3y-8=0$).
4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1,2,3)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n}=(-1,-3,1)$. (Відповідь: $x+3y-z-4=0$).
5. Написати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1,2,3)$, $M_2(-1,0,2)$ і $M_3(-2,1,0)$. (Відповідь: $5x-3y-4z+13=0$).
6. Знайти відстань між площинами $2x-y+2z+9=0$ і $4x-2y+4z-21=0$. (Відповідь: $d=6{,}5$).
7. Скласти канонічні та параметричні рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(3,-5,2)$ та $M_2(1,-1,-4)$. (Відповідь: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-2}{3}$, $\begin{cases} x=3+t \\ y=-5-2t \\ z=2+3t \end{cases}$).

Лекція №4. Криві та поверхні другого порядку.

Еліпс, коло. Гіпербола. Парабола. Циліндричні та конічні поверхні. Еліпсоїд. Сфера. Гіперболоїди та параболоїди.

4.1. Еліпс. Коло.

Лінією другого порядку називається множина точок, координати яких задовольняють рівняння виду $ax^2 + by^2 + cxy + dx + my + n = 0$, де a, b, c, d, m, n – числові коефіцієнти, причому $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. До ліній другого порядку належать такі криві як коло, еліпс, гіпербола та парабола. Отже, зазначені криві задаються алгебраїчним рівнянням другого степеня, але при цьому обернене твердження не правильне. Виявляється, що множиною точок, які задовольняють вище вказане рівняння, може бути не тільки одна з названих ліній: рівняння другого степеня може визначати на площині також дві або одну пряму, точку і, більш того, не визначати жодної точки. Зауважимо, що лінії другого порядку називаються також канонічними перерізами, оскільки їх можна дістати як лінії перетину кругового конуса з площиною. Лінії, що розглядатимуться далі, широко застосовуються в науці, техніці та економіці.

Розглядати криві другого порядку почнемо з еліпса.

Отже, еліпсом називають множину точок площини, сума відстаней яких від двох заданих точок цієї площини, які називаються фокусами, є величина стала і більша ніж відстань між фокусами.

Нехай F_1, F_2 – фокуси еліпса, через які проходить вісь OX, а початок координат ділить відрізок F_1F_2 навпіл. Позначимо відстань між фокусами: $F_1F_2 = 2c$, а суму відстаней від довільної точки M еліпса до фокусів: $r_1 + r_2 = 2a$, де r_1, r_2 називаються фокальними радіусами (рис. 4.1).

За означенням $2a > 2c$ або $a > c$ і $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Після перенесення одного радикала у праву частину та піднесення обох частин до квадрату двічі і зведень подібних дістанемо рівність: $x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. Оскільки $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Позначивши

$a^2 - c^2 = b^2$ (4.1), маємо $x^2 b^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$. Звідки дістанемо канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4.2)$$

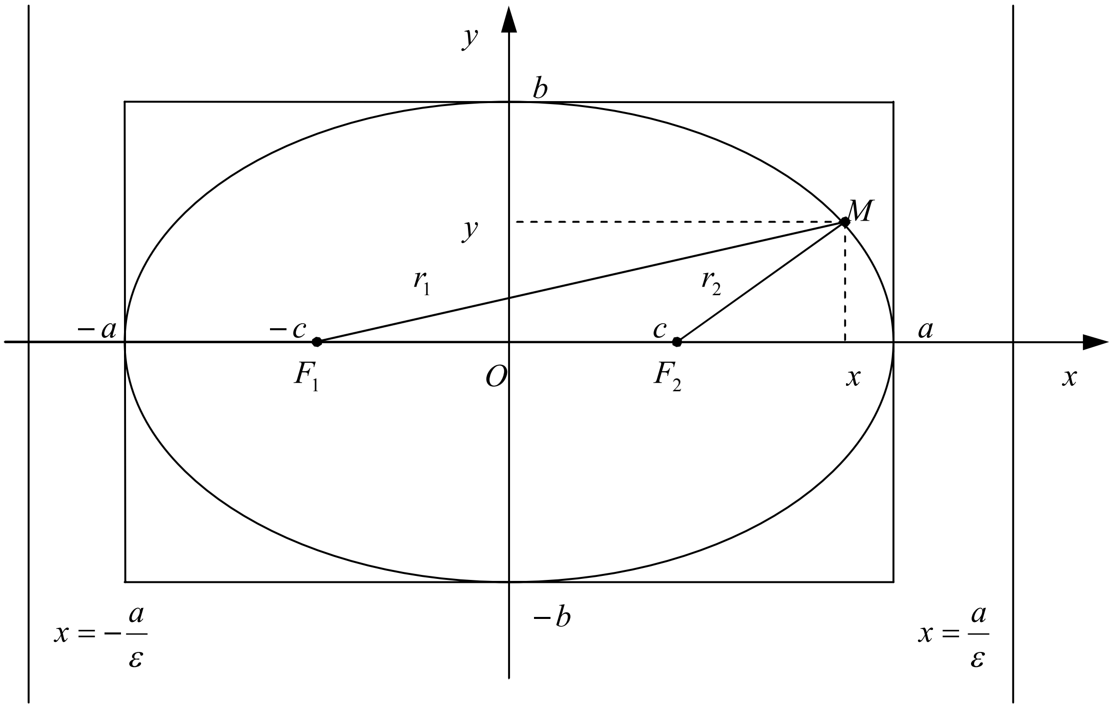


Рис. 4.1

З формули (4.1) випливає, що еліпс симетричний відносно осей OX і OY та точки $O(0,0)$, яку називають центром еліпса. Еліпс перетинає осі координат в точках $(-a,0)$, $(a,0)$, $(0,-b)$, $(0,b)$, які називаються його вершинами. Сам еліпс при цьому вміщується в прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$. Сторони прямокутника дотикаються до еліпса в його вершинах. Величини $2a$ і $2b$ називаються відповідно великою та малою осями еліпса, а числа a та b – великою та малою півосями.

Зауваження. Якщо $a = b = R$, то з рівняння (4.2) дістанемо канонічне рівняння кола

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (4.3)$$

Отже, коло є окремим випадком еліпса, або коло – це еліпс, у якого фокуси збігаються з його центром.

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

Рівняння (4.3) називають також рівнянням кола з центром в початку координат. У загальному випадку рівняння кола має вигляд

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2, \qquad (4.4)$$

де R – радіус кола, точка $O_1(x_0, y_0)$ – центр кола.

Рівняння (4.4) неважко дістати. Якщо $M(x, y)$ – довільна точка кола, то за означенням маємо $O_1M=R$ або $\sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}=R$ і звідси, після піднесення обох частин до квадрата, дістанемо рівняння кола (4.4).

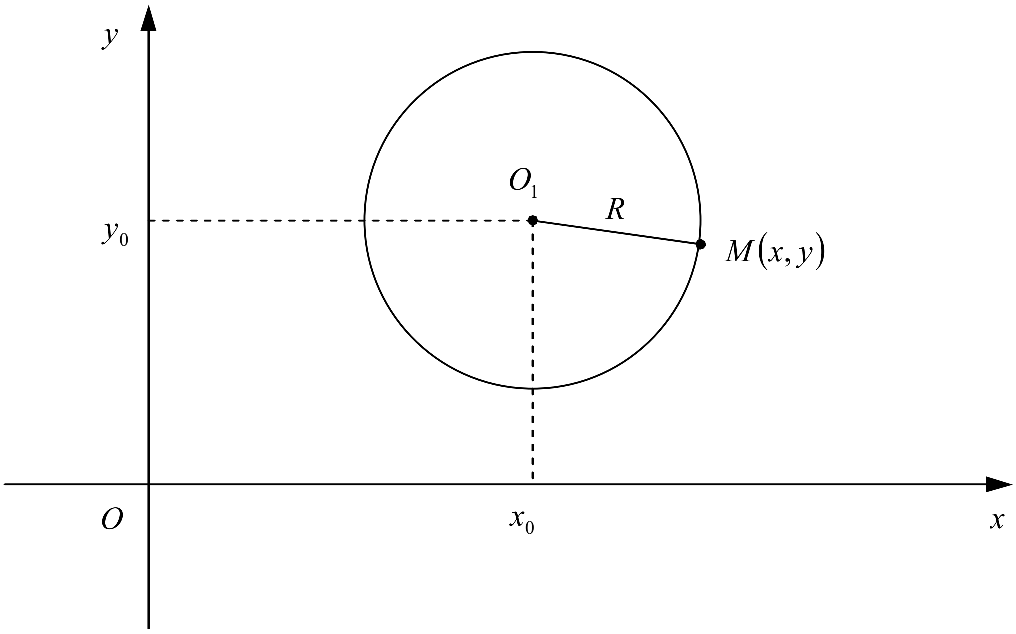


Рис. 4.2

Міра відхилення еліпса від кола характеризується ексцентриситетом – величиною, яка визначається за формулою

$$\varepsilon=\frac{c}{a}, \qquad (4.5)$$

причому $0 \le \varepsilon < 1$, оскільки $0 \le c < a$. З формул (4.1) і (4.5) дістанемо $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Отже, якщо $\varepsilon=0$, то $a=b$ і еліпс перетворюється в коло.

Зауважимо, що прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами еліпса.

Нарешті, рівняння еліпса із зміщеним центром (x_0, y_0) має вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (4.6)$$

Приклад. Два підприємства A і B, розташовані на відстані 100 км одне від одного, виробляють деяку продукцію однакової вартості P. Транспортні витрати перевезення одиниці продукції від підприємства A до споживача становлять 30 грн/км, а від підприємства B – 10 грн/км. Як розподілиться ринок збуту, якщо витрати споживачів повинні бути однаковими?

Розв'язання. Проведемо через середину відрізка AB осі координат так, як покажемо на рис. 4.3.

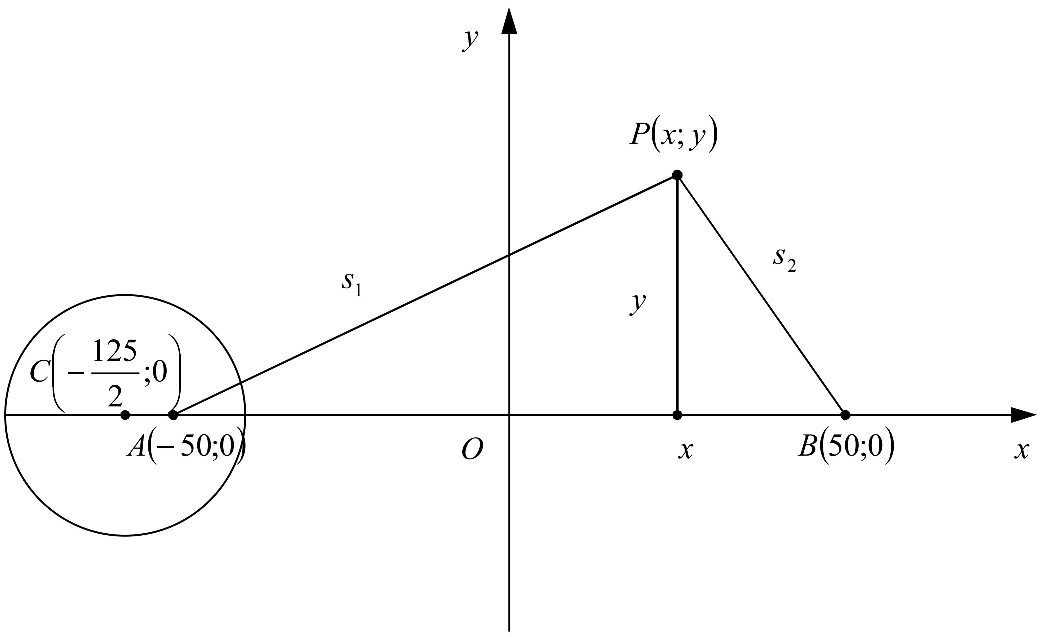


Рис. 4.3

Нехай споживач перебуває у точці $P(x; y)$. Позначимо $AP = s_1$, $BP = s_2$. Витрати споживача на придбання одиниці продукції у підприємства A становлять $P + 30s_1$, а у підприємства B – $P + 10s_2$.

Витрати споживачів однакові, якщо $P + 30s_1 = P + 10s_2$, або $s_2 = 3s_1$. З рис. 4.3 видно, що $s_1 = \sqrt{(50+x)^2 + y^2}$ і $s_2 = \sqrt{(50-x)^2 + y^2}$. Звідки, перетворюючи, маємо $x^2 + y^2 + 125x + 2500 = 0$ або $\left(x + \frac{125}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5625}{4}$ й – рівняння кола з радіусом $r = \frac{75}{2}$.

Таким чином, ринок збуту поділиться так:

а) оскільки для споживачів, що розміщуються на колі, витрати на придбання продукції однакові, то для них не має значення, на якому підприємстві робиться закупівля;

б) для споживачів, які розміщуються поза колом, такі витрати нижчі на підприємстві B, і тому вони будуть купувати вироби на підприємстві B;

в) споживачі, які розміщуються всередині кола, будуть закуповувати продукцію на підприємстві A, бо тут витрати на придбання продукції нижчі, ніж на підприємстві B.

4.2. Гіпербола.

Гіперболою називається множиною точок площини, модуль різниці відстані яких від двох заданих точок площини, що називаються фокусами, є величина стала і менша за відстань між фокусами.

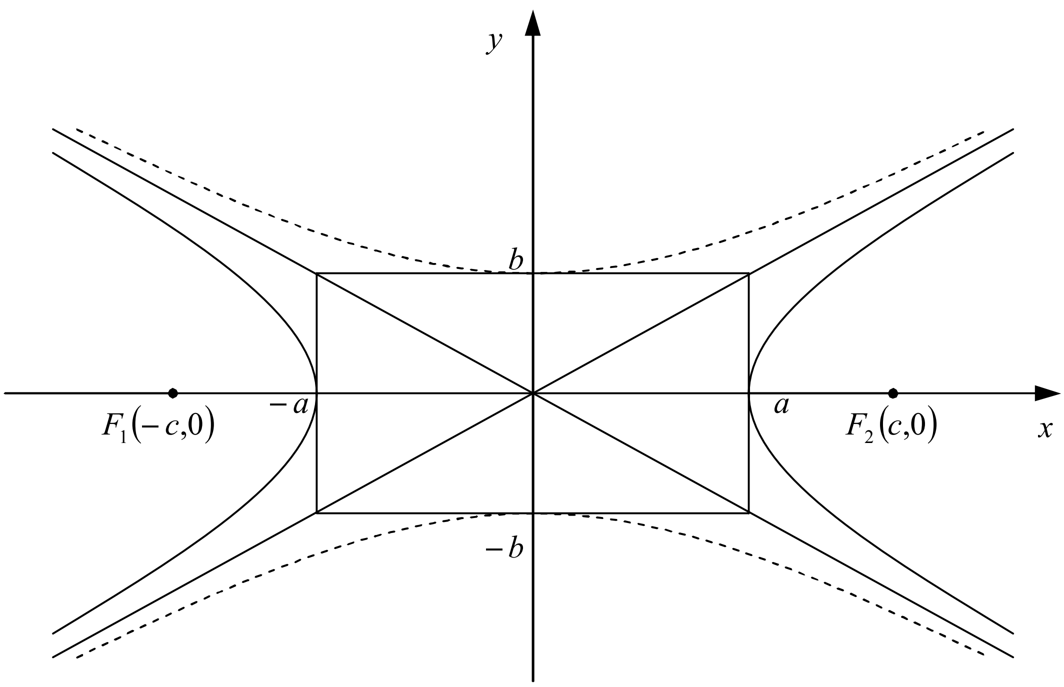


Рис. 4.4

Нехай F_1, F_2 – фокуси гіперболи, причому $F_1F_2 = 2c$. Точка $M(x, y)$ – довільна і лежить на гіперболі. Тоді за означенням маємо $a < c$ і $\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$. Після елементарних перетворень дістанемо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.7}$$

де $b^2 = c^2 - a^2$. (4.8)

Гіпербола складається з двох віток (лівої і правої) і має дві асимптоти:

$$y = \pm\frac{b}{a}x. \tag{4.9}$$

Осями симетрії гіперболи є осі OX і OY, а початок координат – її центром. Вісь OX перетинає гіперболу в точках $(-a,0)$ і $(a,0)$, які називаються її вершинами. Сама вісь OX називається дійсною віссю, а вісь OY – уявною віссю. При цьому величини a і b відповідно називаються дійсною і уявною півосями гіперболи. Прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$ називається основним для гіперболи.

Рівняння $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (4.9)

також визначає гіперболу, яка називається спряженою до гіперболи (4.7). гіпербола (4.9) показана штриховою лінією на рис. 4.4.

Якщо $a = b$, то гіпербола називається рівносторонньою.

Ексцентриситет гіперболи визначається таким чином: $\varepsilon = \frac{c}{a}$, (4.10)

причому $\varepsilon > 1$.

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами гіперболи.

У разі коли центр гіперболи міститься в точці (x_0, y_0) її рівняння має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{4.11}$$

Приклад. Відстань між станціями A і B, розташованими на прямолінійному відрізку залізниці, дорівнює l. Від заводу N йдуть прямі автотраси NA і NB ($NB < NA$). Вантаж із заводу на станцію A можна транспортувати або трасою NB і потім залізницею (перший шлях), або трасою NA (другий шлях). Вартість перевезення 1т вантажу на 1км залізницею і автотранспортом становить m і n ($n > m$); розвантаження та навантаження однієї тонни коштує K. Визначити зону впливу станції B.

Розв’язання. Введемо систему координат так, як показано на рис. 4.5, де $AO = OB$.

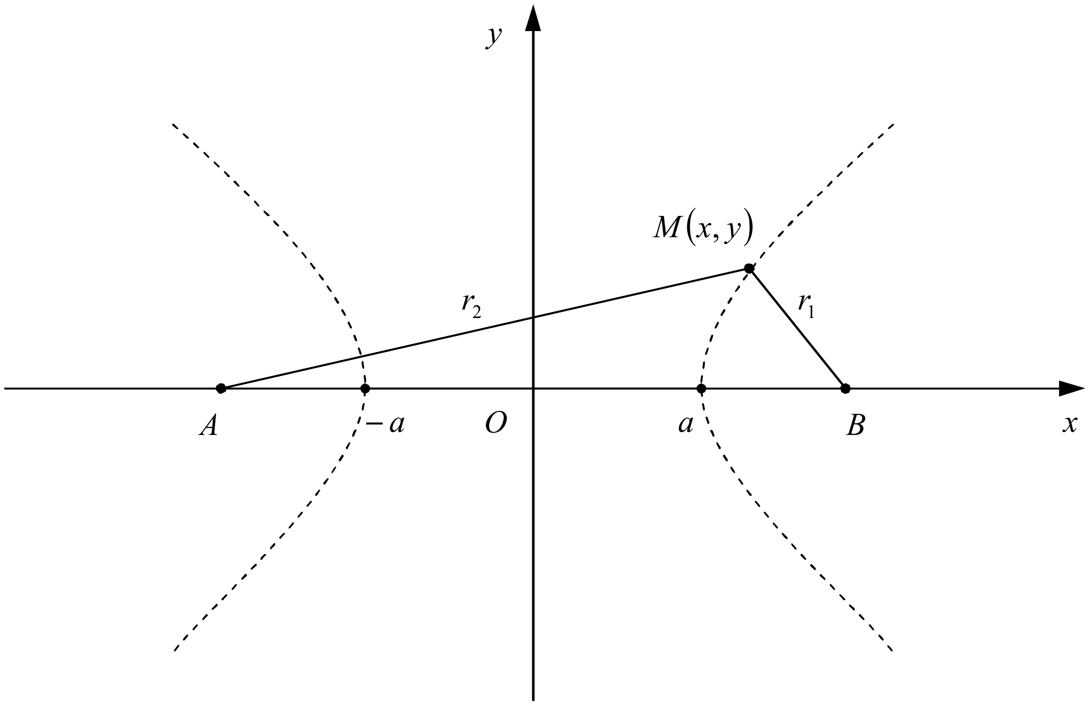


Рис. 4.5

Знайдемо множину точок $M(x, y)$, для яких обидва шляхи однаково вигідні, тобто таких, для яких вартість доставки вантажу $S_1 = r_1 n + K + lm$ першим шляхом дорівнює вартості $S_2 = r_2 n$ доставки вантажу другим шляхом. З умови, що $r_1 n + K + lm = r_2 n$ дістанемо $r_1 - r_2 = \dfrac{K + lm}{n} = const$. Отже, множиною точок, для яких $S_1 = S_2$, є права вітка гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, де $a = \dfrac{K + lm}{2n}$ і $b = \dfrac{1}{2}\sqrt{l^2 - 4a^2}$. Для точок площини, які лежать праворуч від цієї вітки, маємо $S_1 < S_2$, тобто вигідніший перший шлях. Таким чином, права вітка гіперболи $x = \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$ обмежує зону впливу станції B.

4.3. Парабола.

Параболою називається множина точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, яка називається фокусом, і від даної прямої, яка називається директрисою і не проходить через фокус.

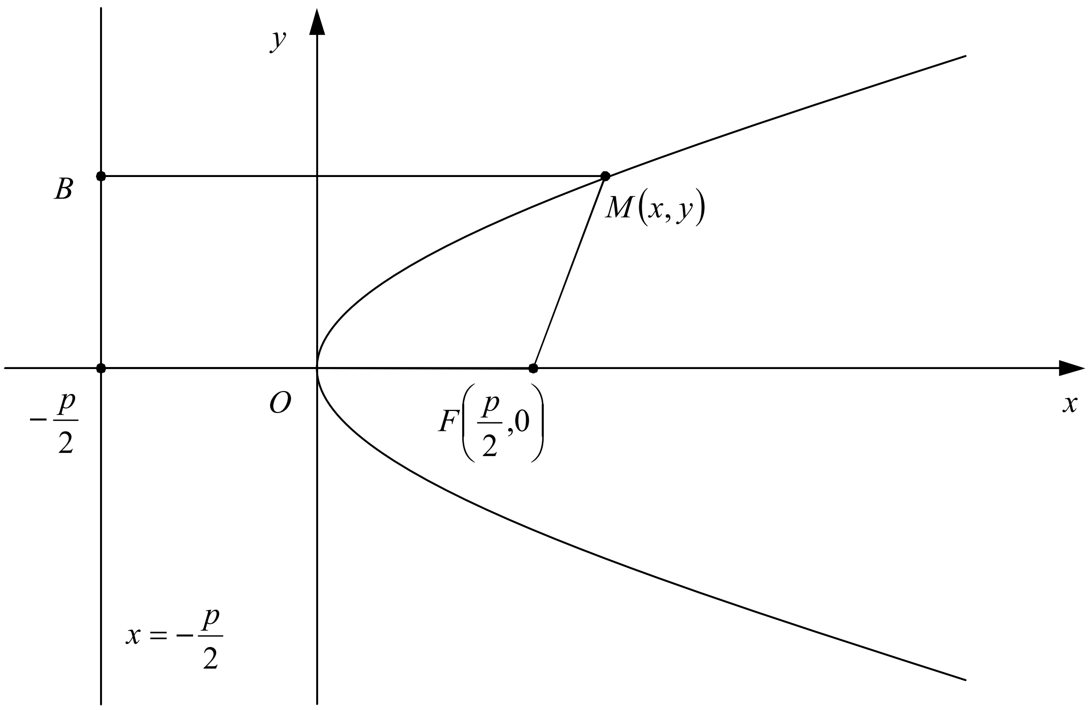


Рис. 4.6

Візьмемо систему координат так, як показано на рис. 4.6. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка параболи. Тоді $MB = MF$ або $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$. Обидві частини останнього рівняння піднесемо до квадрата: $x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ або $y^2 = 2px$. (4.12)

(4.12) – канонічне рівняння параболи.

Парабола з рівнянням (4.12) розміщена справа від осі OY і має віссю симетрії вісь OX, при цьому її вершина міститься в початку координат.

Відстань p від фокуса F до директриси – параметр параболи, який характеризує ширину області, яку обмежує парабола.

Рівняння параболи із зміщеною вершиною (x_0, y_0) має вигляд $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$. (4.13)

Зазначимо, що рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ також визначають параболи, які зображені на рис. 4.7.

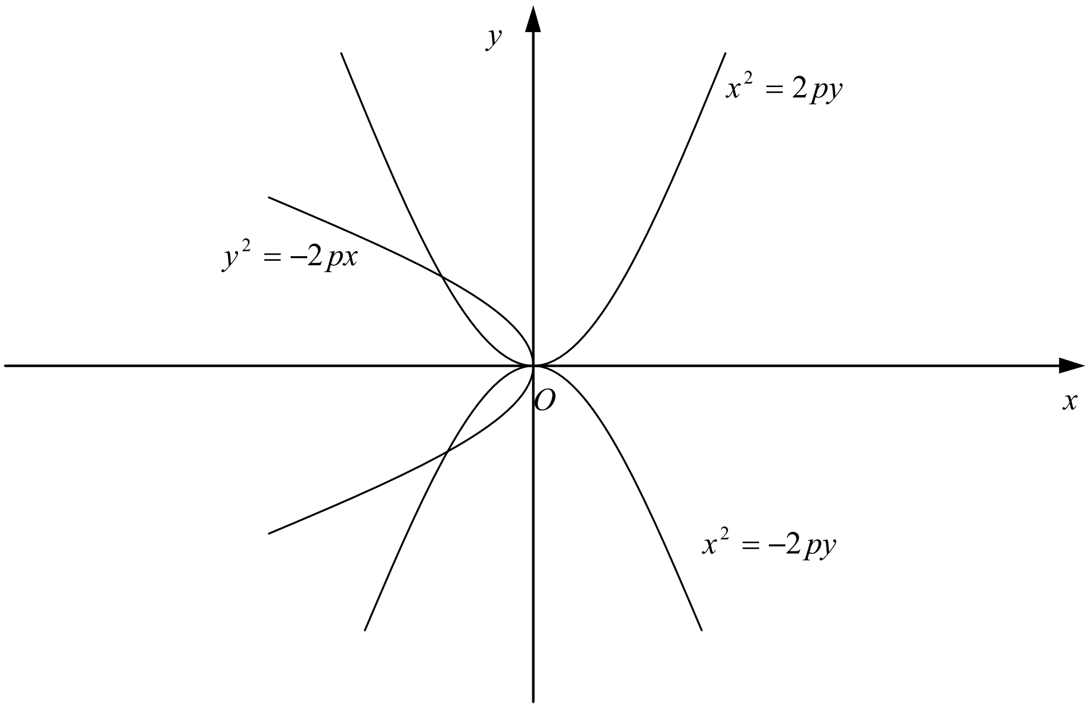


Рис. 4.7

Для параболи ексцентриситет $\varepsilon = 1$.

Зауваження. Якщо рівняння другого степеня має вигляд $ax^2 + by^2 + dx + my + n = 0$ (не містить доданку cxy тобто $c = 0$) і йому на площині відповідає певна лінія, то шляхом виділення повних квадратів вона зводиться до одного із рівнянь (4.4), (4.6), (4.11), (4.13).

Приклад. Встановити тип кривої, яка задана рівнянням $y^2 - 2y - x = 0$.

Розв’язання. Виділимо повний квадрат відносно змінної y: $y^2 - 2y + 1 - 1 - x = 0$ або $(y-1)^2 = x + 1$.

Отримане рівняння має вигляд рівняння (4.13) і, отже, визначає параболу на площині з вершиною в точці $(-1,1)$.

4.4. Циліндричні та конічні поверхні.

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору, координати яких задовольняють рівняння виду $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + mxz + nyz + kx + ly + pz + h = 0$, де принаймні один з коефіцієнтів a, b, c, d, m, n відмінний від нуля. Вказане рівняння називається загальним рівняння поверхні другого порядку. До поверхонь другого порядку належать циліндричні та конічні поверхні, еліпсоїд, сфера, гіперболоїди і параболоїди, поверхні обертання.

Циліндричною називається поверхня, утворена множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напрямну) і паралельні заданій прямій l. Розглядатимемо лише циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в одній з координатних площин OXY, OXZ, OYZ, а твірні паралельні координатній осі, яка перпендикулярна до площини.

Рівняння $f(x, y) = 0$ визначає в просторі циліндричну поверхню з твірними паралельними осі OZ і напрямною L, яка в площині OXY задається тим самим рівнянням $f(x, y) = 0$, а в просторі $OXYZ$ визначається системою $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Аналогічно рівняння $f(x, z) = 0$ і $f(y, z) = 0$ визначають циліндричні поверхні, твірні яких відповідно паралельні осі OY і OX.

Конічною називається поверхня, утворена множиною прямих (твірних), що проходять через задану точку P (вершину) і перетинають задану лінію L (напрямну).

Приклади: 1. циліндрична поверхня, яка визначається рівнянням $x^2 + y^2 = R^2$, називається прямим круговим циліндром з твірними паралельними осі OZ і напрямною – колом $x^2 + y^2 = R^2$ в площині OXY. (Рис. 4.8)

2. Поверхня задана рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, є еліптичним циліндром.

3. Поверхня, яка визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, є гіперболічним циліндром.

4. Рівняння $y^2 = 2px$ задає параболічний циліндр.

5. Конічна поверхня, визначена рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, є прямим круговим конусом (Рис. 4.9).

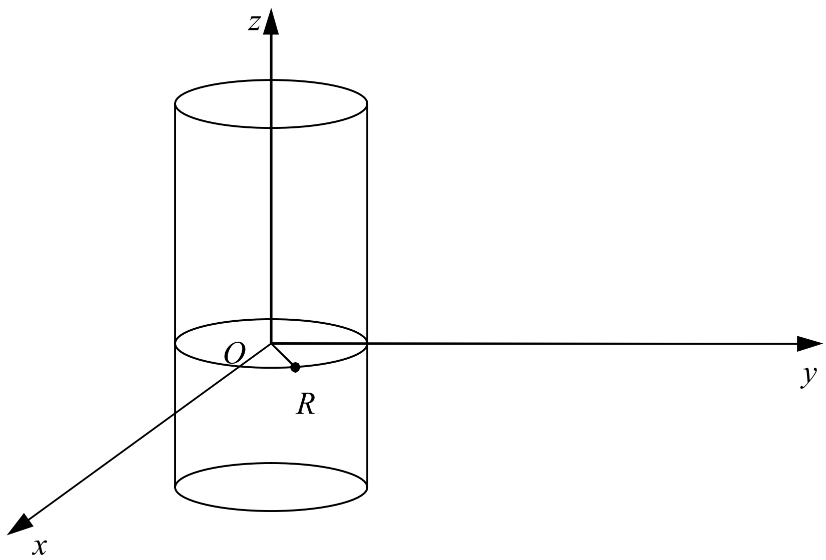


Рис. 4.8

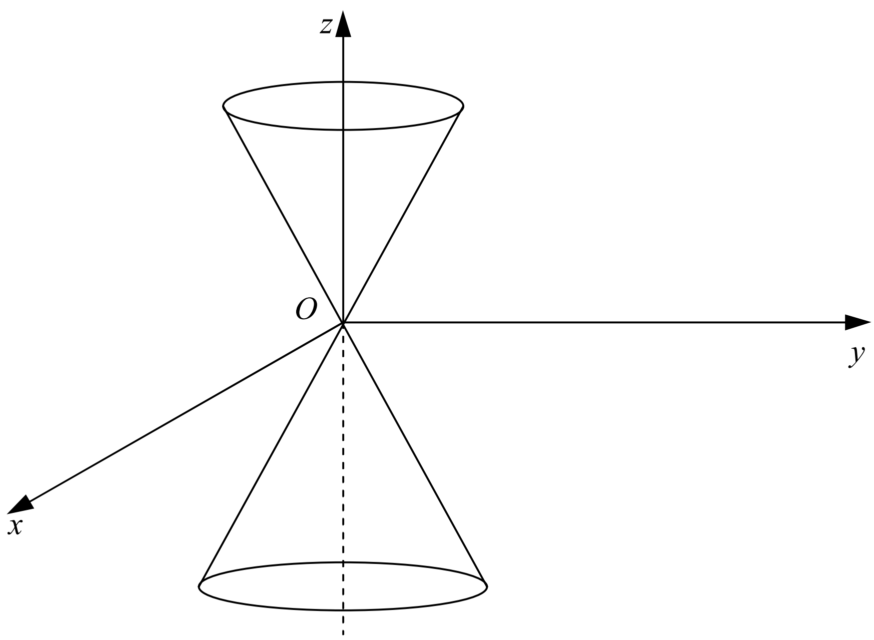


Рис. 4.9

4.5. Еліпсоїд. Сфера.

Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (4.14)$$

Величини a, b, c називаються півосями еліпсоїда. (Рис. 4.10).

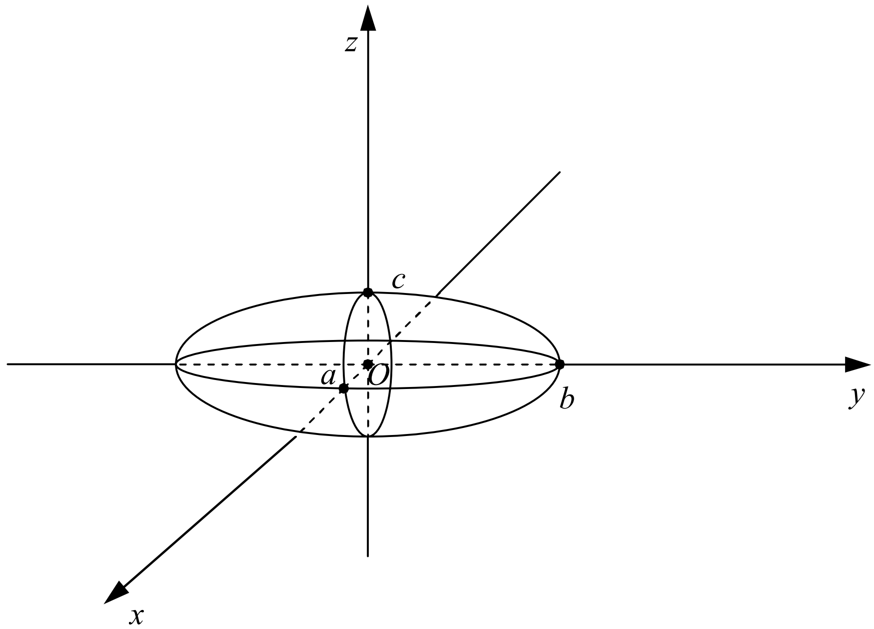


Рис. 4.10

Якщо $a=b=c=R$, то еліпсоїд перетворюється у сферу з рівнянням:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \qquad (4.15)$$

Рівняння сфери з центром в точці (x_0,y_0,z_0) і радіусом R має вигляд:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \qquad (4.16)$$

Приклад. Знайти центр і півосі еліпсоїда, заданого рівнянням $3x^2+4y^2+6y^2-6x+16y-36z+49=0$.

Розв’язання. Виділяючи повні квадрати дістанемо $\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{9}+\frac{(z-3)^2}{6}=1$. Отже, центр знаходиться в точці $(1,-2,3)$, а півосі – $a=2\sqrt{3}$, $b=3$, $c=\sqrt{6}$.

4.6. Гіперболоїди та параболоїди.

Однопорожнинним гіперболоїдом (Рис. 4.11) називається поверхня, яка визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{4.17}$$

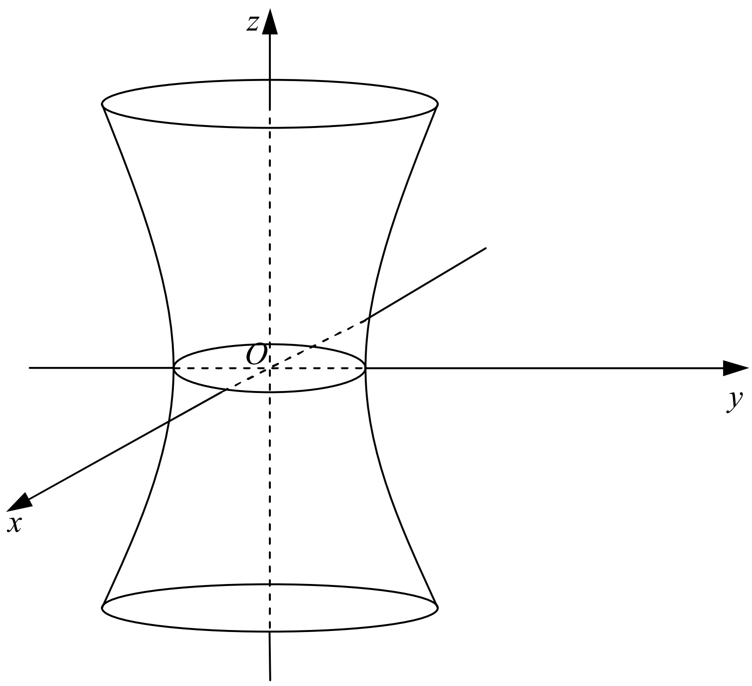


Рис. 4.11

Двопорожнинним гіперболоїдом (Рис. 4.12) називається поверхня, яка задається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{4.18}$$

Еліптичним параболоїдом (Рис. 4.13) називається поверхня, яка визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z. \tag{4.19}$$

Гіперболічний параболоїд задається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$.

Поверхню, утворену обертанням заданої плоскої кривої навколо заданої прямої (осі обертання), яка лежить в площині цієї кривої, називається поверхнею обертання.

Приклад. Рівняння $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=z$ задає параболоїд обертання, утворений обертанням параболи $x^2=4z$, $y=0$ або параболи $y^2=4z$, $x=0$ навколо осі OZ.

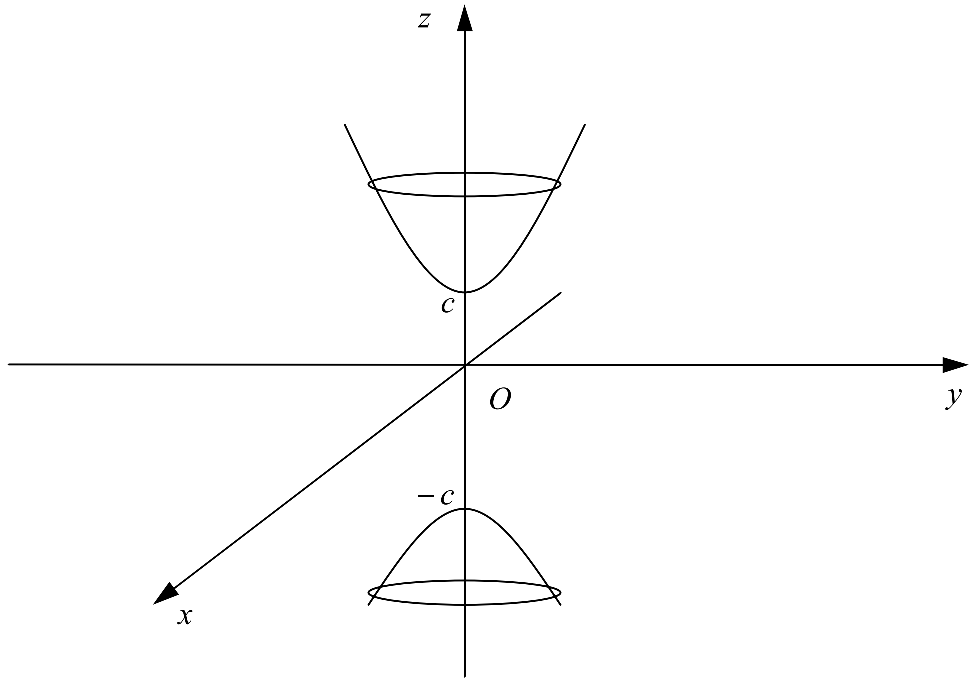


Рис. 4.12

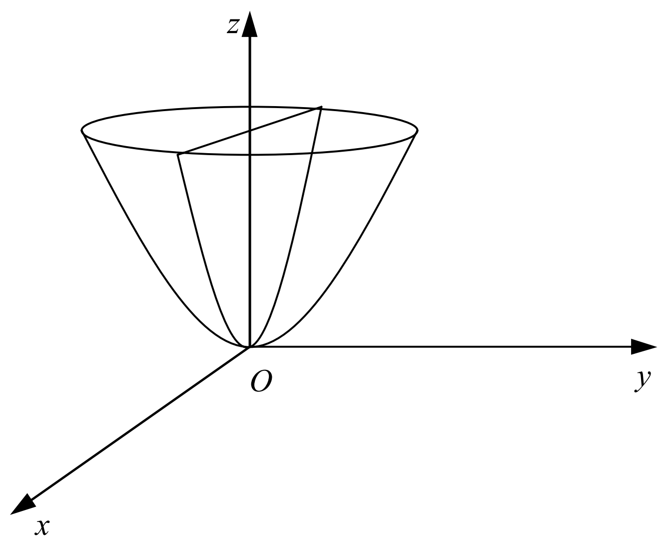


Рис. 4.13

Завдання до самоконтролю

1. Що називається лінією другого порядку?
2. Що називається колон? Яке його рівняння?
3. Що називається його еліпсом? Яке його рівняння?
4. Що називається ексцентриситетом еліпса?
5. Що називається гіперболою? Яке її рівняння?
6. Які рівняння асимптот гіперболи?
7. Що називається параболою? Яке її рівняння?
8. Що називається поверхнею другого порядку?
9. Що називається циліндричною, конічною поверхнею?
10. Що називається еліпсоїдом?
11. Які рівняння мають однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди?
12. Яке рівняння має еліптичний параболоїд?
13. Написати рівняння кола, якщо точки $A(-1,4)$ і $B(3,2)$ є кінцями його діаметра. (Відповідь: $(x-1)^2+(y-3)^2=5$).
14. Знайти центр і радіус кола $x^2+y^2+4x-6y-23=0$. (Відповідь: $O_1(-2,3)$, $R=6$).
15. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M_1(3,2)$ і $M_2\left(4,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, якщо фокуси його лежать на осі OX симетрично початку координат. (Відповідь: $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$).
16. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі OX симетрично початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 14, а ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{9}$. (Відповідь: $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{32}=1$).
17. Скласти канонічні рівняння гіперболи, фокуси якої розміщено на осі OX симетрично початку координат, якщо дійсна вісь дорівнює b, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{3}$. (Відповідь: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$).

18. Встановити, що рівняння $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ визначає гіперболу. Знайти її центр та півосі. (Відповідь: $O_1(2,-3)$, $a = 3$, $b = 4$).
19. Скласти канонічне рівняння параболи, у якої відстані від фокуса до директриси дорівнює 12. (Відповідь: $y^2 = 24x$).
20. Знайти центр і радіус сфери, заданої рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 11 = 0$. (Відповідь: $O_1(-1,-2,3)$, $R = 5$).
21. Яку поверхню визначає рівняння $x^2 - y^2 - z^2 - 4 = 0$? (Відповідь: Двопорожнинний гіперболоїд).

Лекція №5. Функція, її границя і неперервність.

Функція та її границя. Нескінченно малі функції, їх властивості та порівняння. Основні теореми про границі. Еквівалентні нескінченно малі функції, їх застосування. Неперервність функції. Точки розриву.

5.1. Функція та її границя.

Взаємозв'язок між величинами, які зустрічаються при вивченні певних процесів та явищ, здійснюються за допомогою поняття функції, яке є одним із основних в математиці.

Якщо кожному числу x із деякої числової множини D за певним правилом відповідає єдине число y, то y є функцією від x і записують символічно $y = f(x),\ x \in D$.

Тут множина D називається областю визначення функції, x і y – аргументом та функцією відповідно.

Відомо, що до основних способів задання функції належать аналітичний, графічний і табличний.

Зазначимо, що при графічному способі задання функції $y = f(x)$ відповідність між незалежною змінною x та залежною змінною y задається графіком – множиною точок $(x, f(x))$ координатної площини.

Зауважимо також, що графіки багатьох функцій практично зобразити неможливо. Таким прикладом може бути функція Діріхле: $f(x) = \begin{cases} 1, \textit{якщо } x - \textit{раціональне}; \\ 0, \textit{якщо } x - \textit{ірраціональне}. \end{cases}$.

Як відомо, основними елементарними функціями є степенева $y = x^{\alpha}$, де $\alpha \in R$, показникові $y = a^x$ і логарифмічна $y = \log_a x$, де $a > 0$ та $a \neq 1$, а також тригонометричні та їх обернені функції: $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$.

Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині B, а функція $u = \varphi(x)$ – на множині D, причому кожному значенню $x \in D$ відповідає значення $u \in B$, тоді на множині D визначена складена функція $f(\varphi(x))$ від x (суперпозиція або композиція заданих функцій). Тут змінна u – проміжний аргумент або внутрішня функція, а y – зовнішня функція.

Приклад. Функція $y = \sin^2 x$ є суперпозицією степеневої та тригонометричної функцій: $y = u^2$, $u \in [-1,1]$ та $u = \sin x$, $x \in R$.

Основні елементарні функції та функції, утворені основними елементарними функціями за допомогою скінченого числа арифметичних операцій і суперпозиції, називаються елементарними.

Приклад. Функція $y = arctg\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$ є елементарною.

Надалі розглядатимемо лише елементарні функції.

Функція $f(x)$ називається обмеженою на множині D, якщо $|f(x)| \le M$, $M > 0$, $x \in D$.

Приклад. Функція $y = \sin x$ – обмежена, оскільки $|\sin x| \le 1$, $x \in R$.

Якщо функція $f(x)$ визначена на множині D і при $x \in D$ маємо $-x \in D$, то вона називається парною, якщо $f(-x) = f(x)$ і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D$.

Функція $f(x)$ називається періодичною на множині D, якщо $f(x+T) = f(x)$, $T \ne 0$, $x \in D$.

Приклад. Періодичними і відповідно непарною та парною є функції $\sin x$ і $\cos x$.

Функція $f(x)$ на множині D називається зростаючою або спадною (неспадною або незростаючою), якщо при $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in D)$ маємо $f(x_1) < f(x_2)$ або $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$ або $f(x_1) \ge f(x_2)$). Вказані функції називаються монотонними.

Надалі під околом точки $x_0 \in R$ розуміємо будь-який інтервал, який містить точку: $x_0 \in (a,b)$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки. Число A називається границею функції в точці x_0 (або при $x \to x_0$), якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x цього околу, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символічно той факт, що функція має границю записують таким чином:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

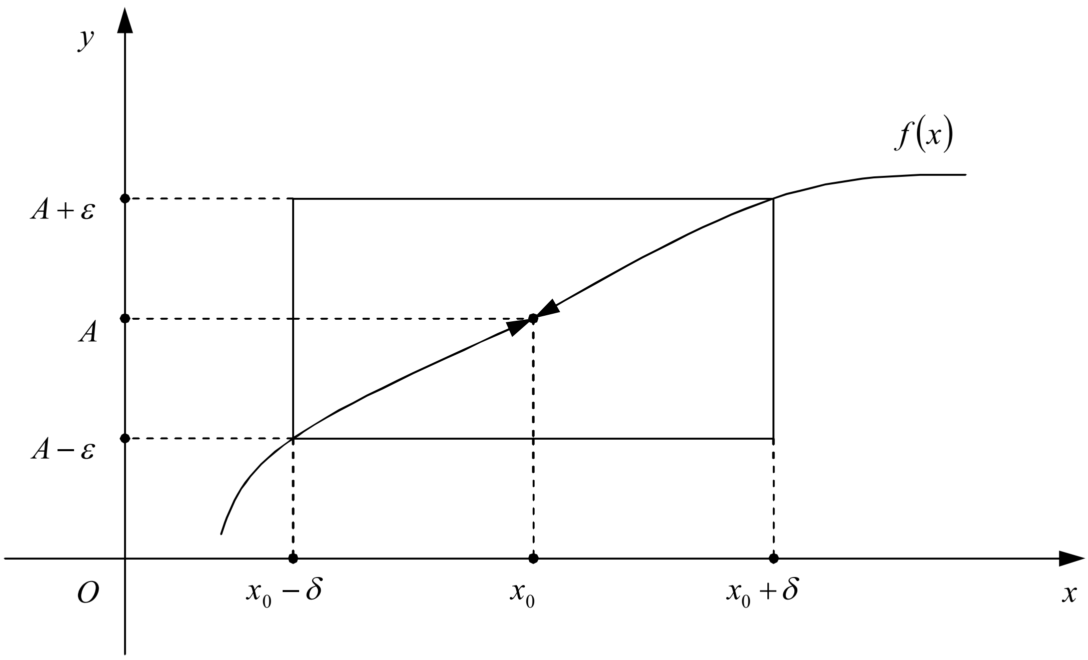


Рис. 5.1

З геометричної точки зору, число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного ε-околу $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ точки A знайдеться δ-окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, так що при всіх значеннях аргументу x з множини $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ відповідні значення функції $f(x)$ лежать в ε-околі точки A. (Рис. 5.1)

Число B (число C) називається лівою (правою) границею функції в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ($x \in (x_0, x_0 + \delta)$) виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$ ($|f(x) - C| < \varepsilon$).

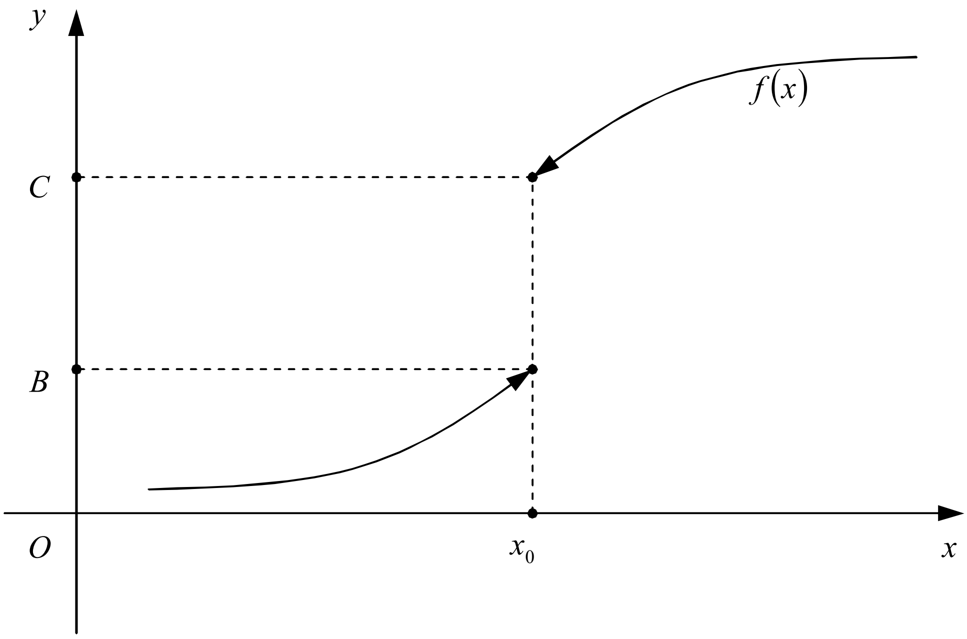


Рис. 5.2

Ліву і праву границі називають односторонніми границями функції (Рис. 5.2) і позначають відповідно так:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = B,$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = C.$$

Зазначимо, що умова $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ є необхідною і достатньою для існування границі функції в точці x_0.

Зауваження. Аналогічно можна розглянути границю функції $f(x)$ при $x \to \infty$ та коли $A = \infty$.

5.2. Нескінченно малі функції, їх властивості та порівняння.

Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою при $x \to x_0$ (випадок коли $x_0 = \infty$ не виключено), якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. У разі коли $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$ функція $\beta(x)$ називається нескінченно великою при $x \to x_0$.

Основні властивості нескінченно малих функцій:

1. Для того щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ необхідно і достатньо, щоб функція $f(x) - A$ була нескінченно малою функцією.
2. Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to x_0$ то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика при $x \to x_0$ і навпаки.
3. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно мала функція.
4. Сума скінченого числа нескінченно малих функцій є нескінченно мала.

Доведемо останню властивість, інші доводяться аналогічно.

Нехай $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ – нескінченно малі функції при $x \to x_0$. Тоді для довільного числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ такі, що при всіх значень x з околу $0 < |x - x_0| < \delta_1$ виконується нерівність $|\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ і для значень x з околу $0 < |x - x_0| < \delta_2$ справджується $|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. У меншому з цих околів справедливі обидві ці нерівності і, отже, в ньому виконується $|\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| \le |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, тобто сума $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ двох нескінченно малих є функція нескінченно мала. Так само доводиться для довільного скінченого числа нескінченно малих.

Функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називається нескінченно малими одного порядку при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} \ne 0, \infty$; якщо ж $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$ або $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty$, то $\alpha_1(x)$ називається відповідно нескінченно малою вищого та нижчого порядку, ніж $\alpha_2(x)$ при $x \to x_0$. У разі коли $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = k \ne 0, \infty$ функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою k – го порядку відносно $\alpha_2(x)$ при $x \to x_0$. У випадку коли границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$ не існує, нескінченно малі функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються непорівнянними при $x\to x_0$.

Так само порівнюються нескінченно великі функції.

Приклади. 1. Функції $\alpha_1(x)=x$ і $\alpha_2(x)=\dfrac{x}{2}$ нескінченно малі одного порядку при $x\to 0$, тому що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\frac{x}{2}}=2$.

2. Функція $\alpha_1(x)=x^2$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_2(x)=x$ при $x\to 0$, оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

3. нескінченно малі функції $\alpha_1(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ і $\alpha_2(x)=x$ непорівнянні при $x\to 0$, бо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не існує.

5.3. Основні теореми про границі.

Відшукувати границі за означенням дуже важко. Наступні теореми значно полегшують знаходження границь.

Теорема №1 (про границю суми, добутку і частки).

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають границю в точці x_0, то в цій точці існують границі функцій $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ і $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ та справджується формули:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x); \tag{5.1}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\lim_{x\to x_0}g(x); \tag{5.2}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}\quad\left(\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0\right). \tag{5.3}$$

Доведення. Доведемо формулу (5.1), інші доводяться аналогічно. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ і $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$, тоді за першою властивістю для нескінченно малих маємо $f(x)=A+\alpha_1(x)$, $g(x)=B+\alpha_2(x)$, де $\alpha_1(x)\to 0$ і $\alpha_2(x)\to 0$ при $x\to x_0$. Звідси дістанемо $f(x)\pm g(x)=A\pm B+[\alpha_1(x)\pm\alpha_2(x)]$ і за третьою властивістю для нескінченно малих вираз $\alpha_1(x)\pm\alpha_2(x)\to 0$ при $x\to x_0$. Отже, переходячи до границі, отримуємо формулу (5.1).

Наслідки. 1. $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x)=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, де $c=const$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n$.

Теорема №2 (про границю проміжної функції).

Якщо в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки, визначені функції $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ і існують границі $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$, то функція $f(x)$ має границю $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Теорема №3 (про граничний перехід в нерівностях).

Якщо в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, виконується $f(x)\ge\varphi(x)$ і існують $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ge\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

Теорема №4 (про границю монотонної функції).

Якщо функція $f(x)$ монотонна і обмежена при $x<x_0$ або при $x>x_0$, то існує відповідно її ліва $f(x_0-0)$ або права $f(x_0+0)$ границя.

5.4. Еквівалентні нескінченно малі функції, їх застосування.

Серед нескінченно малих функцій одного порядку важливу роль відіграють еквівалентні нескінченно малі.

Функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$, нескінченно малі при $x\to x_0$, називаються еквівалентними, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1$. Записують цей факт так: $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$.

Деякі властивості еквівалентних нескінченно малих функцій:

1. Нескінченно малі $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ еквівалентні при $x\to x_0$ тоді і тільки тоді, коли різниця $\alpha_1(x)-\alpha_2(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж кожна з функцій $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$.

2. Нехай $\alpha_1(x) \sim \alpha_1^*(x)$, $\alpha_2(x) \sim \alpha_2^*(x)$ при $x \to x_0$ і існує $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$, тоді $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$.

3. Сума скінченого числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

Не втрачаючи загальності, доведемо останню властивість лише для двох функцій: $\alpha_1(x) \to 0$, $\alpha_2(x) \to 0$ при $x \to x_0$ і $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$. Тоді маємо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x)}{\alpha_2(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} + 1 = 0 + 1 = 1$. Отже, $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) \sim \alpha_2(x)$ при $x \to x_0$.

Вище вказана друга властивість дає змогу при знаходженні границі відношення нескінченно малих замінити на відношення їх еквівалентних функцій. Зустрічаються такі еквівалентні нескінченно малі функції при $\alpha \to 0$:

1. $\sin\alpha \sim \alpha$;
2. $tg\alpha \sim \alpha$;
3. $\arcsin\alpha \sim \alpha$;
4. $arctg\alpha \sim \alpha$;
5. $1 - \cos\alpha \sim \dfrac{\alpha^2}{2}$;
6. $e^\alpha - 1 \sim \alpha$;
7. $a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a$;
8. $\log_a(1+\alpha) \sim \dfrac{\alpha}{\ln a}$;
9. $\ln(1+\alpha) \sim 1$;
10. $(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha$, $k > 0$.

Зазначимо також, що при знаходженні границь використовуються перша важлива границя $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ та друга важлива границя $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ (або $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$). Тут зауважимо, що число $e \approx 2{,}718$ – ірраціональне (і більш того трансцендентне) і $\log_e x = \ln x$ – натуральний логарифм числа x.

Відшукання границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ замість аргументу x його граничного значення x_0. Така підстановка часто приводить до невизначених виразів – невизначеностей виду $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $\infty - \infty$, 0∞,

0^0, ∞^0, 1^∞. Операцію знаходження границі у цих випадках називають розкриттям невизначеностей, яку розглянемо на прикладах.

Приклади. 1. $\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\frac{x^3+2x-1}{2x^3+x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{2}$ (тут чисельник і знаменник розділили на найвищий степінь x, що зустрічається).

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+3x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x+4}=\frac{2}{5}$ (в чисельнику і знаменнику виділили критичний множник і скоротили на нього).

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$

(позбулися від ірраціональності в чисельнику).

4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-5x+6}=\left[\sin(x-2)\underset{x\to 2}{\sim}(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-3}=-1$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}k}=e^k$.

5.5. неперервність функції. Точки розриву.

З поняттям границі функції тісно пов’язане інше важливе поняття математики – неперервність функції.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0.

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ або, що теж саме, $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$. Якщо ж хоча б одна із вказаних умов не виконується, то функція називається розривною в точці x_0, а сама x_0 називається точкою розриву.

У разі коли для функції $f(x)$ існують скінченні односторонні границі і не вісі числа $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, $f(x_0)$ рівні між собою, тоді x_0 – точка розриву першого роду. Зокрема, якщо $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, то x_0 – точка усувного розриву і досить до визначити функцію лише в цій точці, поклавши

$f(x_0)=f(x_0 \pm 0)$, щоб дістати неперервність в точці x_0. Тут величину $\delta=|f(x_0-0)-f(x_0+0)|$ називають стрибком функції.

Якщо хоча б одна з односторонніх границь $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ не існує або дорівнює нескінченності, то x_0 – точка розриву другого роду.

Приклади. 1. Для функції $f(x)=\begin{cases} x^2, x \le 1 \\ x, x>1 \end{cases}$ точка $x=1$ є точкою неперервності, оскільки $f(1)=x^2\,|_{x=1}=1^2=1$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0} x^2=1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} x=1$.

2. Для функції $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, x<1 \\ -1, x \ge 1 \end{cases}$ точка $x=1$ – точка розриву першого роду, тому що $f(1)=-1$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x^2)=0$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(-1)=-1$. Стрибок $\delta=|-1-0|=1$.

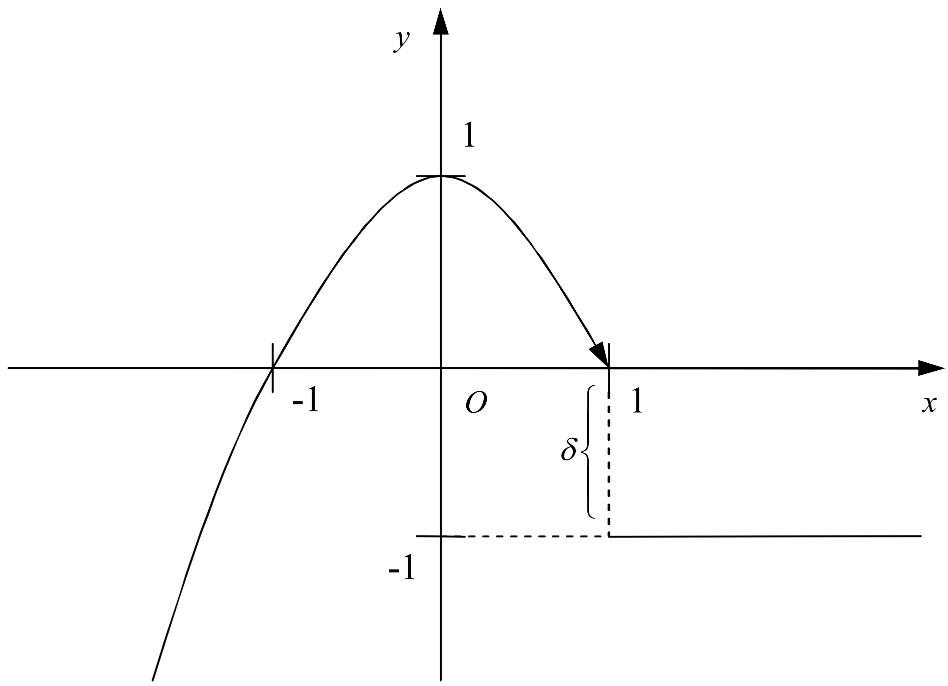


Рис. 5.3

3. Функція $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ в точці $x=2$ має розрив другого роду, оскільки $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$.

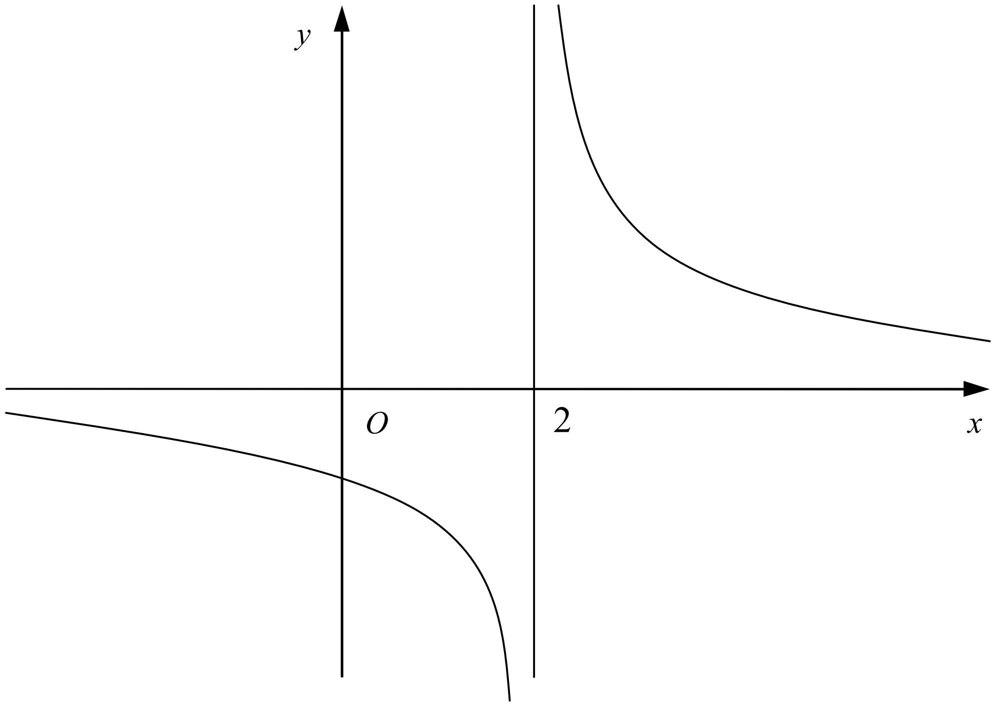


Рис. 5.4

Якщо функція неперервна в кожній точці проміжку, то вона називається неперервною на цьому проміжку.

Зазначимо, що коли функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в точці x_0, то неперервні в цій точці і функції $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x)\varphi(x)$ та $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ $(\varphi(x_0) \neq 0)$. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f[\varphi(x)]$ неперервна в точці x_0.

Теорема (Вейєрштрасса). Неперервна функція на відрізку досягає найменшого і найбільшого значень.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається функцією?
2. Які функції називаються монотонними?
3. Що називається границею функції в точці?
4. Які функції називаються нескінченно малими?
5. Які властивості нескінченно малих?
6. Сформулювати теорему про границю суми, добутку і частки.
7. Як порівнюються між собою нескінченно малі?

8. Які нескінченно малі називаються еквівалентними?
9. Яка функція називається неперервною в точці?
10. Який розрив називається: а) розривом першого роду, б) розривом другого роду?
11. Яка функція називається неперервною на проміжку?
12. Сформулювати теорему Вейєрштрасса.
13. Знайти $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) tgx$. (Відповідь: -1. Вказівка: скористатись заміною $y = x - \frac{\pi}{2}$).
14. Знайти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-5x}$. (Відповідь: e^{10}).
15. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 8x}{tg 2x}$. (Відповідь: 4).
16. Обчислити $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$. (Відповідь: $\frac{1}{8}$).
17. Обчислити $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$. (Відповідь: -1).
18. Обчислити $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4}$. (Відповідь: 1).
19. Обчислити $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$. (Відповідь: $\frac{2}{3}$).
20. Обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx - \sin x}{x^3}$. (Відповідь: $\frac{1}{2}$).
21. Знайти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+5}$. (Відповідь: е).
22. В якій точці і який розрив має функція $f(x) = 2^{\frac{1}{x+1}}$. (Відповідь: $x = -1$ – точка розриву другого роду).
23. В якій точці і який розрив має функція $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, x < 2 \\ -1, x \geq 2 \end{cases}$. (Відповідь: $x = 2$ – точка розриву першого роду).

24. Чи буде функція $f(x) = \begin{cases} 3x^2, x \le 1 \\ x + 2, x > 1 \end{cases}$ неперервною? (Відповідь: $x = 1$ – точка неперервності).

Лекція №6. Похідна та диференціал.

Похідна, її зміст; похідні вищих порядків. Правила і формули диференціювання. Похідна неявної та параметричної функцій. Диференціал.

6.1. Похідна, її зміст; похідні вищих порядків.

Похідна є одним із важливих понять в математиці. Цілий ряд задач науки і техніки приводить до поняття похідної, як от, задачі про швидкість прямолінійного руху, про теплоємність, про швидкість хімічної реакції, про дотичну до кривої та багато інших.

Нехай на проміжку (a,b) задано функцію $y=f(x)$. Надамо будь-якому $x\in(a,b)$ довільного приросту Δx, так щоб $x+\Delta x\in(a,b)$. Тоді маємо відповідний приріст функції $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Похідна позначається також символами: y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$, y'_x.

Якщо границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ в деякій точці не існує, то не існує в цій точці і похідна функції.

Операція знаходження похідної від функції $f(x)$ називається диференціюванням цієї функції.

Механічний зміст похідної: швидкість в даний момент часу – це похідна від пройденого шляху за часом $v=s'(t)$.

Фізичний зміст похідної: якщо функція $f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $f'(x)$ є швидкість зміни цього процесу.

Геометричний зміст похідної: кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $f(x)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$ або тангенс кута α, який утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі OX дорівнює похідній в цій точці: $k = tg\alpha = f'(x_0)$. (Рис. 6.1).

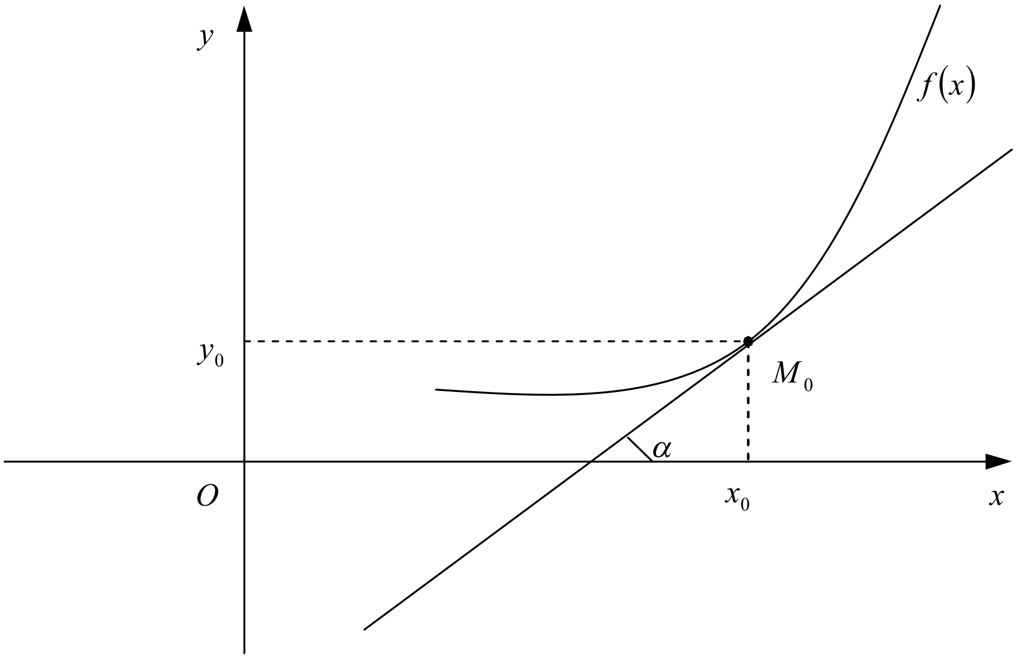


Рис. 6.1

Відомо, що нормаллю до кривої називається пряма, яка проходить через точку дотику перпендикулярно до дотичної.

Звідси відповідно маємо рівняння дотичної та нормалі до кривої $f(x)$ а точці M_0:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \tag{6.1}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{6.2}$$

Функція $f(x_0)$ називається диференційованою в точці x_0, якщо в цій точці вона має похідну $f'(x_0)$. Функція називається диференційованою на проміжку, якщо вона диференційована в кожній точці цього проміжку.

Розглянемо задачі про маргінальні вартість, доход та прибуток і з'ясуємо економічний зміст похідної.

Маргінальною вартістю називають гранично можливу вартість в умовах хоча б постійного відтворення виробництва певної продукції. Аналогічно визначають маргінальний доход та прибуток.

Позначимо через $V(x)$, $D(x)$, $P(x)$ витрати, доход та прибуток виробництва x одиниць продукції. Кожна з цих величин є певною функцією кількості одиниць x виробленої та проданої продукції.

Якщо підприємство збільшує випуск продукції на Δx одиниць, то ці функції одержать прирости ΔV, ΔD, ΔP.

Відношення приросту функції до Δx характеризує приріст відповідної функції на одиницю приросту продукції, а границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ стає маргінальною.

Таким чином, маємо:

маргінальна вартість $V'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x}$,

маргінальний доход $D'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta D}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{D(x + \Delta x) - D(x)}{\Delta x}$,

маргінальний прибуток $P'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta P}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x}$.

Якщо $V(x)$ – функція виробничих витрат (витрати на виготовлення x виробів), то $V'(x)$ дає маргінальну вартість, тобто витрати на досить малу частину виготовлення додаткової продукції.

Нехай тепер на (a, b) функція $f(x)$ має похідну $f'(x)$, яка називається похідною першого порядку або першою похідною. Якщо функція $f'(x)$ на (a, b) має похідну, то цю останню похідну називають похідною другого порядку або другою похідною і позначають символами: y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Похідну від другої похідної (якщо вона існує) називають похідною третього порядку і позначають так: y''', $f'''(x)$, $\dfrac{d^3 y}{dx^3}$, $\dfrac{d^3 f}{dx^3}$.

Похідною $n-$го порядку функції $f(x)$ називають першу похідну, якщо вона існує, від похідної $(n-1)-$го порядку: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ або $\dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$.

Зв'язок між неперервністю і диференційованістю функції встановлюється наступною теоремою.

Теорема. Якщо функція диференційовна в точці, то вона і неперервна в цій точці.

Зауваження. Існують неперервні функції, які не є диференційованими.

Приклади. 1. Знайти похідну степеневої функції $y = x^{\alpha}$.

Розв'язання. Оскільки $(1+t)^{\alpha} - 1 \sim \alpha t$ при $t \to 0$, то за означенням маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = x^{\alpha} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\Delta x} = x^{\alpha} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha} \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

2. Скласти рівняння дотичної і нормалі до параболи $y = x^3$ в точці $(2,8)$.

Розв'язання. З попереднього прикладу випливає, що $y' = 3x^2$, $y'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$. Скориставшись формулами (6.1) та (6.2) дістанемо шукане рівняння дотичної: $y - 8 = 12(x-2)$ або $12x - y - 16 = 0$ та рівняння нормалі: $y - 8 = -\frac{1}{12}(x-2)$ або $x - 12y - 98 = 0$.

3. Функція витрат має вигляд $V(x) = 3000 + 30x - 0{,}5x^2 + 0{,}003x^3$. Знайти маргінальну вартість при $x = 120$. Як зміниться маргінальна вартість на кожну одиницю продукції при $x = 120$?

Розв'язання. Знайдемо похідну функції витрат $V'(x) = 30 - x + 0{,}009x^2$. При $x = 120$ маємо $V'(120) = 30 - 120 + 0{,}009 \cdot 120^2 = 30 - 120 + 129{,}6 = 39{,}6$. Отже, вартість 121-ї одиниці продукції становитиме 39 грн. 60 коп. Тепер знайдемо другу похідну: $V''(x) = (V'(x))' = (30 - x + 0{,}009x^2)' = -1 + 0{,}018x$.

Якщо $x = 120$, то $V''(x) = -1 + 0{,}018 \cdot 120 = 1{,}16$.

Це означає, що кожна додаткова одиниця виробленої продукції спричиняє зростання на 1,16 маргінальної вартості.

6.2. Правила і формули диференціювання. Похідна неявної та параметричної функцій.

На практиці функцій зручно диференціювати не за означенням, а за допомогою правил і формул. Правила сформульовано у вигляді наступніх теорем.

Теорема 1. Якщо $f(x) = c$, $c = const$, то $f'(x) = 0$.

Доведення. За означенням похідної маємо:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Теорема 2. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовні в точці, то в цій точці диференційовні і їх сума, добуток та частка і справджуються формули:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \tag{6.3}$$

$$(uv)' = u'v + uv', \tag{6.4}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \ (v \neq 0). \tag{6.5}$$

Доведення. За означенням похідної та теоремою про границю суми дістанемо формулу (6.3):

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

Формули (6.4) і (6.5) доводяться аналогічно.

Теорема 3. Нехай маємо функції $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$, тобто складену функцію $y = f[\varphi(x)]$. Якщо існують похідні u'_x в точці x і y'_u у відповідній точці u, то складена функція в точці x має похідну, яка обчислюється за формулою

$$y'_x = y'_u u'_x. \tag{6.6}$$

Доведення. З диференційованості функції $y = f(u)$ випливає $\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha_1$ або $\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha_1 \Delta u$, де $\alpha_1 \to 0$ при $\Delta u \to 0$ (і відповідно при $\Delta x \to 0$, оскільки функція $u = \varphi(x)$ диференційовна, а отже, і неперервна). В свою чергу, з диференційованості функції $u = \varphi(x)$ маємо $\Delta u = u_x{}' \Delta x + \alpha_2 \Delta x$, де $\alpha_2 \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Підставивши значення Δu та поділивши на Δx отриману рівність, дістанемо

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(y'_u u'_x+y'_u\alpha_2+u'_x\alpha_1+\alpha_1\alpha_2\right)=y'_u u'_x+y'_u\lim_{\Delta x\to 0}\alpha_2+u'_x\lim_{\Delta x\to 0}\alpha_1+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha_1\lim_{\Delta x\to 0}\alpha_2=$$
$$=y'_u u'_x.$$

Теорема 4. Якщо функція $y=y(x)$ строго монотонна і має похідну $y'(x)$ на інтервалі, то існує обернена функція $x=x(y)$, яка також має похідну $x'_y=\frac{1}{y'_x}$.

Зауваження. Як приклади можна розглянути обчислення за означенням похідних основних елементарних функцій. Раніше знайдено формулу диференціювання степеневої функції $y=x^\alpha$. Аналогічні формули можна дістати так само і для інших основних елементарних функцій. Скориставшись правилом диференціювання складеної функції та вважаючи, що функція $u=u(x)$ – диференційовна, зведемо ці формули в таблицю:

1. $\left(u^\alpha\right)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$, $\alpha\in R$;
2. $\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$, $a>0$, $a\neq 1$;
3. $\left(e^u\right)'=e^u u'$;
4. $\left(\log_a u\right)'=\frac{u'}{u\ln a}$;
5. $\left(\ln u\right)'=\frac{u'}{u}$;
6. $\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$;
7. $\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$;
8. $\left(tgu\right)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$;
9. $\left(ctgu\right)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}$;
10. $\left(\arcsin u\right)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
11. $\left(\arccos u\right)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
12. $\left(arctgu\right)'=\frac{u'}{1+u^2}$;

13. $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично, тобто рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$ і параметр $t \in [\alpha, \beta]$. Припустимо, що функція $x(t)$ на інтервалі (α, β) задовольняє умови теореми 4 і функції $y(t)$ на цьому ж інтервалі має похідну $t'_x = \frac{1}{x'_t}$. Розглядаючи складену функцію $y = y[t(x)]$, маємо за формулою (6.6): $y'_x = y'_t t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Отже, $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. (6.7)

Нехай тепер задана неявна функція y від x тобто задана функція $y = y(x)$ рівнянням $F(x, y) = 0$. Для знаходження її похідної потрібно про диференціювати по x обидві частини рівності $F(x, y) = 0$ і отримане рівняння розв'язати відносно y'.

Нарешті, при знаходженні похідної показникові степеневої функції $y = u^v$, $u = u(x)$, $v = v(x)$ спочатку її логарифмують, а потім диференціюють як неявну функцію. Така операція, яка називається логарифмічним диференціюванням, приводить до формули:

$$\left(u^v\right)' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u'. \quad (6.8)$$

Приклади. 1. $y = \sin^2 x$, $y''' - ?$

Розв'язання. $y' = \left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$,

$$y'' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x, \; y''' = (2\cos 2x)' = -2\sin 2x \cdot (2x)' = -4\sin 2x.$$

2. Знайти y'_x, якщо $x = 4\cos t$, $y = 8\sin t$.

Розв'язання. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(8\sin t)'}{(4\cos t)'} = \frac{8\cos t}{-4\sin t} = -2ctgt$.

3. Знайти y', якщо $x^2 + y^2 - 3y - 2x = 1$.

Розв'язання. Маємо $2x + 2yy' - 3y' - 2 = 0$ або $y'(2y - 3) = 2 - 2x$. Звідси $y' = \frac{2 - 2x}{2y - 3}$.

4. Знайти похідну функції $y = x^{\sin x}$.

Розв’язання. Логарифмуючи, маємо $\ln y = \sin x \ln x$ і диференціюємо як неявну функцію $\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x}$ або $y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$.

6.3. Диференціал.

Поняття диференціала пов’язане з поняттям похідної і внаслідок цього застосовується при дослідженні різноманітних процесів.

Нехай функція $y = f(x)$ в точці $x \in [a,b]$ має похідну $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді можна записати $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$ або $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$. Диференціалом або диференціалом першого порядку dy функції $y = f(x)$ в точці x називається головна, лінійна відносно Δx, частина простору функції в цій точці: $dy = f'(x)\Delta x$. Оскільки $\Delta x = dx$, то $dy = f'(x)dx$. (6.9)

Властивості диференціала виражаються формулами:

$$dc = 0,\ d(u \pm v) = du \pm dv,\ d(uv) = vdu + udv,\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Нехай маємо складену функцію $y = f[\varphi(t)]$, де функції $x = \varphi(t)$ і $y = f(x)$ диференційовні в точках t і x. Тоді маємо: $dy = y'_x dt = y'_x x'_t dt = y'_x dx$.

Така властивість диференціала називається інваріантністю (незмінністю) форми диференціала.

Якщо величина Δx досить мала, то можна записати $\Delta y \approx dy$, що випливає із зрозумілого геометричного змісту диференціала. (Рис. 6.2)

Звідси маємо $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$. (6.10)

Нехай тепер маємо диференційовну на деякому проміжку функцію $y = f(x)$, де x – незалежна змінна. Тоді її перший диференціал $dy = f'(x)dx$. Другим диференціалом або диференціалом другого порядку називається диференціал: $d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'_x dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2$.

Диференціалом третього порядку називається диференціал: $d^3 y = d(d^2 y) = d(f''(x)dx^2) = f'''(x)dx^3$.

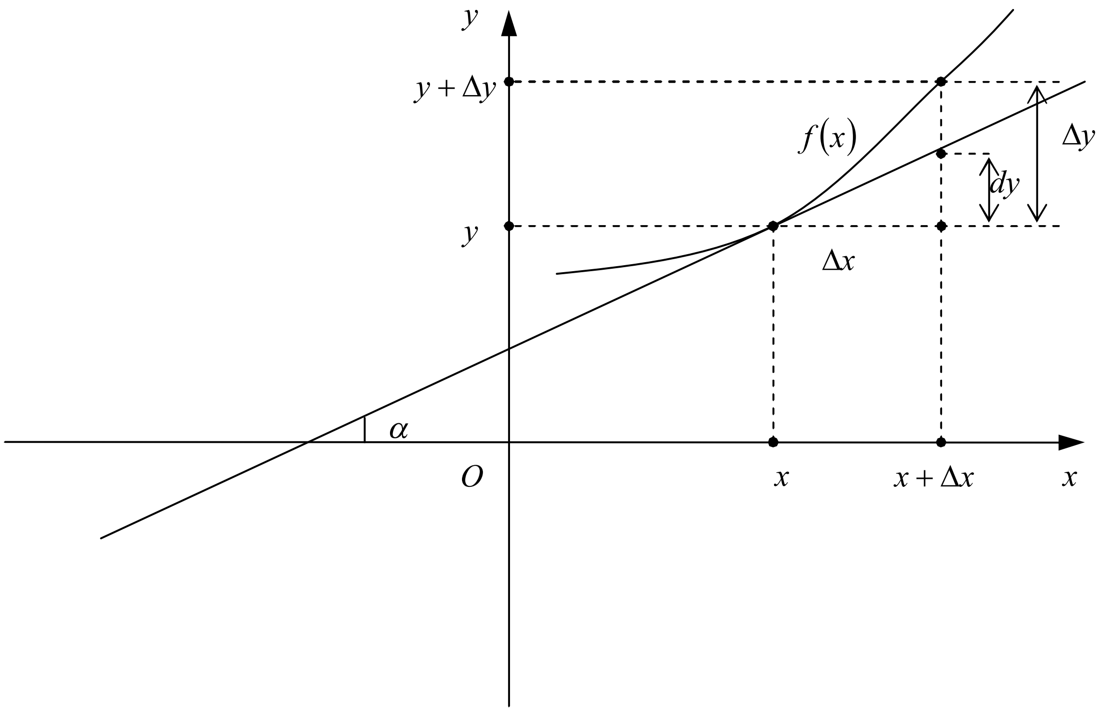


Рис. 6.2

Взагалі, диференціал $n-$го порядку називається диференціал: $d^n y = d\left(d^{n-1}y\right) = f^{(n)}(x)dx^n$. (6.11)

Виявляється, що диференціали вищих порядків інваріантної властивості не мають.

Приклад. Обчислити наближено $arctg1{,}05$.

Розв'язання. За формулою (6.10) маємо $arctg(x+\Delta x) \approx arctgx + (arctgx)'\Delta x$ або $arctg(x+\Delta x) \approx arctgx + \dfrac{\Delta x}{1+x^2}$. Якщо $x=1$, $\Delta x = 0{,}05$, то $arctg1{,}05 \approx arctg1 + \dfrac{0{,}05}{2} \approx 0{,}811$.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається похідною функції?
2. Який геометричний, фізичний та економічний зміст похідної?
3. Записати рівняння дотичної і нормалі до кривої?
4. Яка функція називається диференційовною на проміжку?
5. Який клас функцій ширший: неперервних чи диференційованих?
6. Як диференціюються сума, добуток та частка двох функцій?

7. Як обчислюється похідна складеної функції?
8. Як диференціюється параметрична функція?
9. Як знайти похідну неявної функції?
10. За якими формулами диференціюються основні елементарні функції?
11. Що називається диференціалом функції?
12. Який геометричний зміст диференціала?
13. Назвати основні властивості диференціала.
14. У чому полягає інваріантність форми диференціала?
15. Яка є формула для наближеного обчислення значення функції за допомогою диференціала?
16. Що називається похідною $n-$го порядку?
17. Що називається диференціалом $n-$го порядку?
18. Чи мають диференціали вищих порядків інваріантну властивість?
19. Знайти кути між параболами $y=x^2$ і $y=x^3$ у точках їх перетину. (Вказівка: кутом між кривими в точці їх перетину вважають кут між дотичними до даних кривих у цій точці. Відповідь: $\varphi_1=0$, $\varphi_2=arctg\dfrac{1}{7}$).
20. Знайти y'_x, якщо $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$. (Відповідь: $y'_x=ctg\dfrac{t}{2}$).
21. Знайти похідну функції $y=\ln tgx^3$. (Відповідь: $y'=\dfrac{3x^2}{\sin x^3\cos x^3}$).
22. Знайти похідну функції $y=x^{\sin 5x}$. (Відповідь: $y'=x^{\sin 5x}\left(5\ln x\cos 5x+\dfrac{\sin 5x}{x}\right)$).
23. Знайти y'_x, якщо $x^2+y^2-2y+3x=1$. (Відповідь: $y'=\dfrac{2x+3}{2-2y}$).
24. Знайти диференціал функції $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+8\arcsin\dfrac{x}{4}$. (Відповідь: $\sqrt{16-x^2}dx$).
25. Знайти $tg46^0$. (Відповідь: $tg46^0\approx 1{,}035$).

26. Знайти четверту похідну функції $y = x^5 - 7x^2 + x - 1$. (Відповідь: $y^{(4)} = 120x$).

Лекція №7. Теореми диференціального числення.

Основні теореми диференціального числення. Правило Лопіталя.

7.1. Основні теореми диференціального числення.

Теорема Ферма. Нехай функція $f(x)$ на інтервалі (a,b) неперервна і набуває найбільшого або найменшого значення в точці $x_0 \in (a,b)$. Якщо існує похідна $f'(x_0)$, то $f'(x_0)=0$.

Доведення. Припустимо, що функція $f(x)$ в точці x_0 набуває найбільшого значення, тоді $f(x) \le f(x_0)$, $x \in (a,b)$.

При $\Delta x > 0$ маємо $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le 0$ і тому $\lim\limits_{x \to x_0+0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le 0$, де $x = x_0 + \Delta x \in (a,b)$.

Аналогічно при $\Delta x < 0$ дістанемо $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \ge 0$ і, отже, $\lim\limits_{x \to x_0+0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \ge 0$.

Із отриманих границь за умови, що похідна $f'(x_0)$ існує, випливає $f'(x_0)=0$. Так само можна розглянути випадок, коли функція набуває найменшого значення.

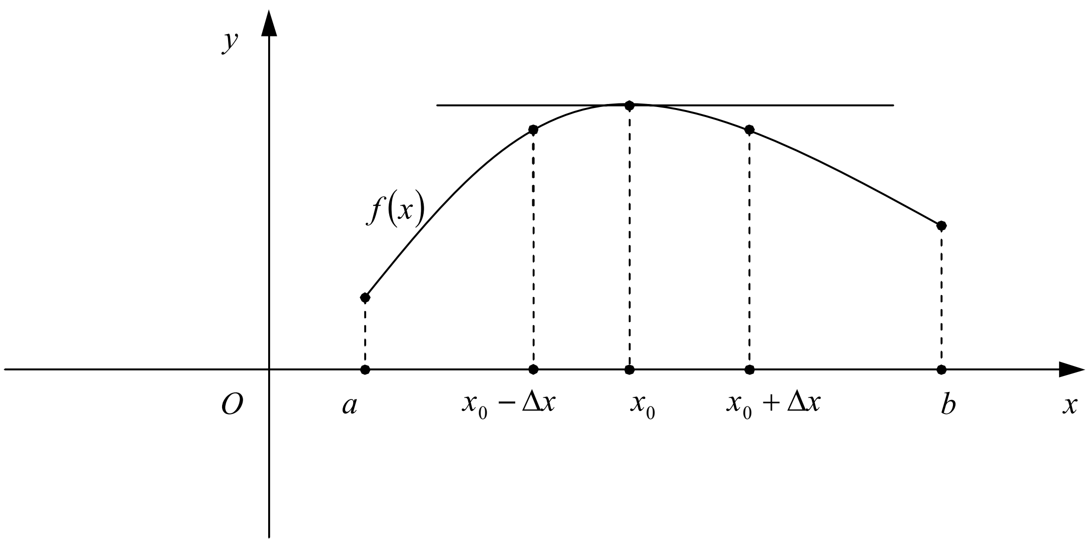


Рис. 7.1

Геометричний зміст теореми Ферма (Рис. 7.1): якщо функція $f(x)$ в точці x_0 досягає найбільшого та найменшого значення, то дотична до графіка цієї функції в точці $(x_0, f(x_0))$ паралельна осі абсцис.

Теорема Ролля. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційовна в інтервалі (a,b) та $f(a) = f(b)$. Тоді існує точка $c \in (a,b)$, так що $f'(c) = 0$.

Доведення. Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ за теоремою Вейєрштрасса набуває найбільшого M та найменшого m значень. Якщо $M = m$, то $f(x) = const$ і $f'(x) = 0$, $x \in [a,b]$.

Якщо ж $M \neq m$, тоді хоча б одне із значень M або m досягається функцією у внутрішній точці інтервалу (a,b), оскільки $f(a) = f(b)$. За теоремою Ферма похідна в такій точці $f'(c) = 0$.

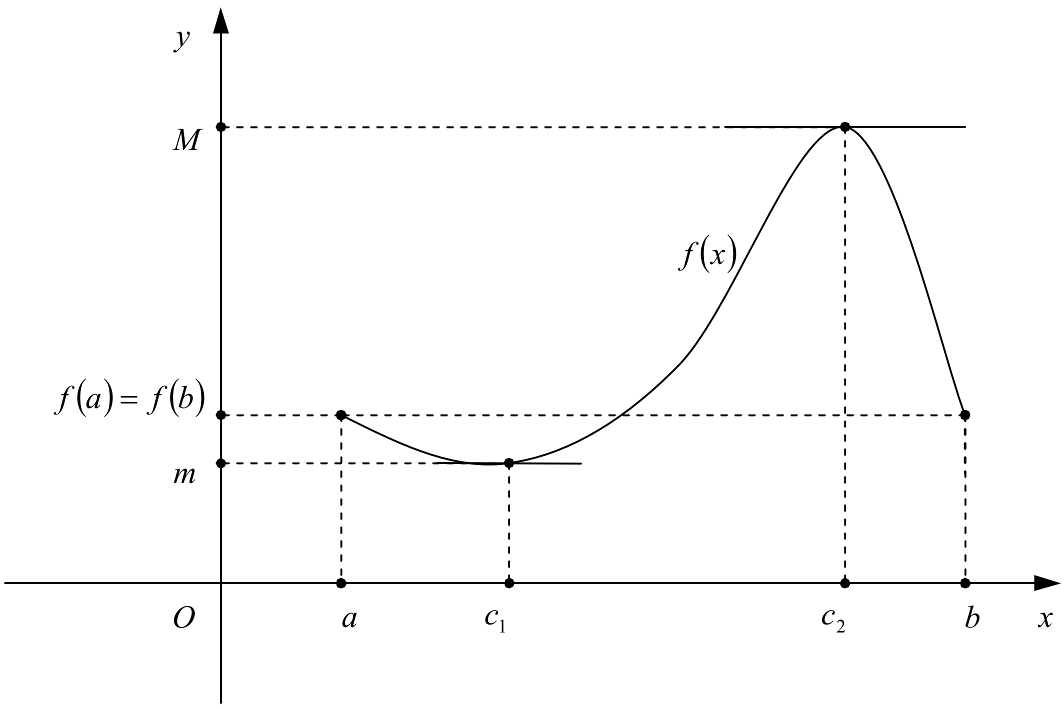


Рис. 7.2

Геометричний зміст теореми Ролля (Рис. 7.2): якщо функція задовольняє умови теореми Ролля, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична паралельна осі OX.

Зауваження. 1. У разі коли $f(a)=f(b)=0$, то теорему Ролля формують таким чином: між двома коренями функції лежить хоча б один корінь похідної. Тоді цю теорему називають іноді теоремою про корені похідної. (Рис. 7.3).

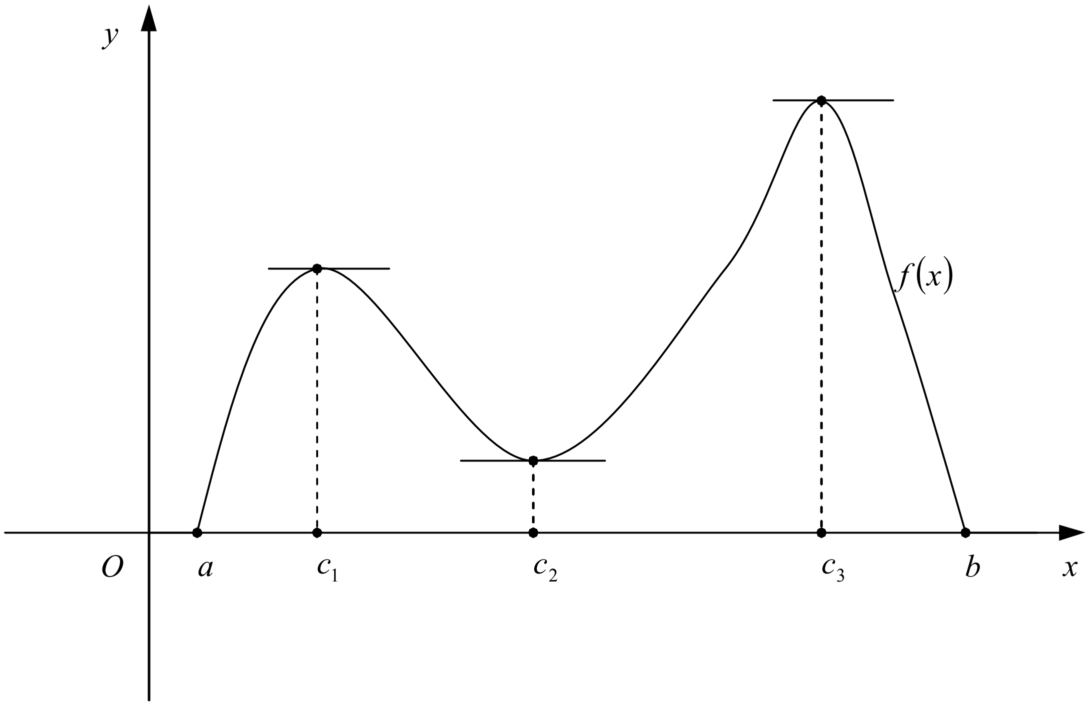


Рис. 7.3

2. якщо хоча б одна із зазначених умов не виконується, то теорема Ролля не справджується.

Приклади. 1. Функція $f(x)=1-|x|$ неперервна на відрізку $[-1,1]$ і має на його кінцях рівні значення $f(-1)=f(1)=0$, але в точці $x=0$ не є диференційовною. Для такої функції не існує жодної точки $x \in [-1,1]$, в якій виконувалась би умова $f'(x)=0$. (Рис. 7.4).

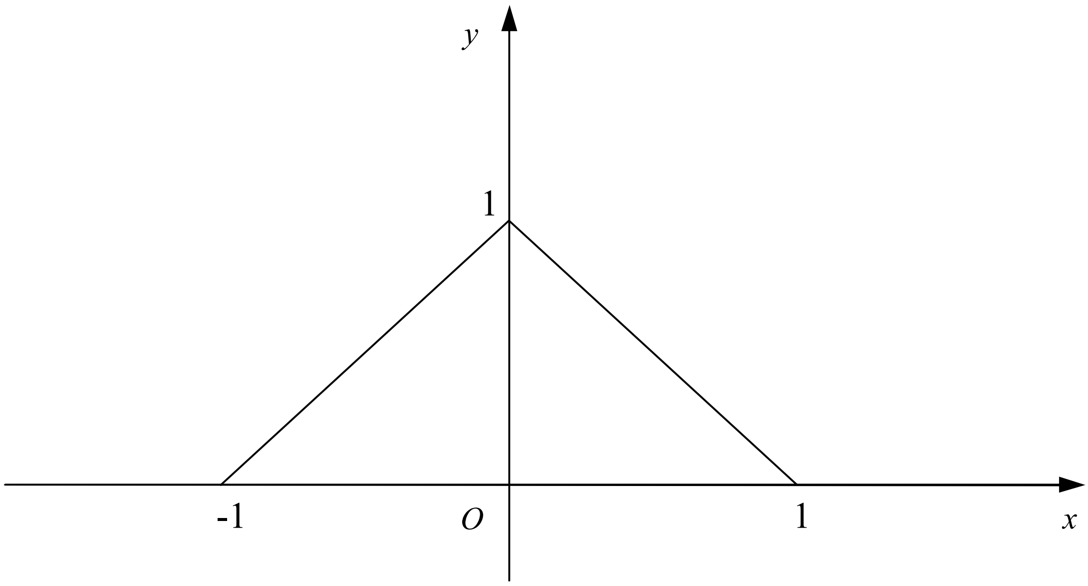


Рис. 7.4

2. Функція $f(x)=x^2$, $x\in[0,1]$ є диференційовною, а отже, і неперервною, але при цьому $f(0)\neq f(1)$ і тому теорема Ролля не виконується. (Рис. 7.5).

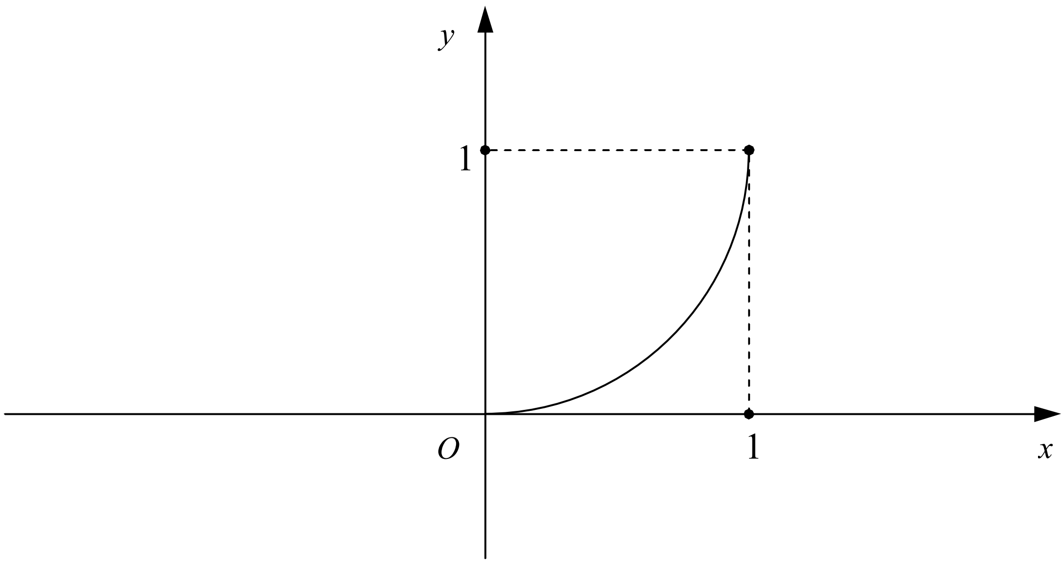


Рис. 7.5

3. Для функції $f(x)=\begin{cases} x, 0\le x<1 \\ 0, x=0 \end{cases}$ теорема Ролля не справджується, оскільки функція розривна в точці $x=1$. (Рис. 7.6).

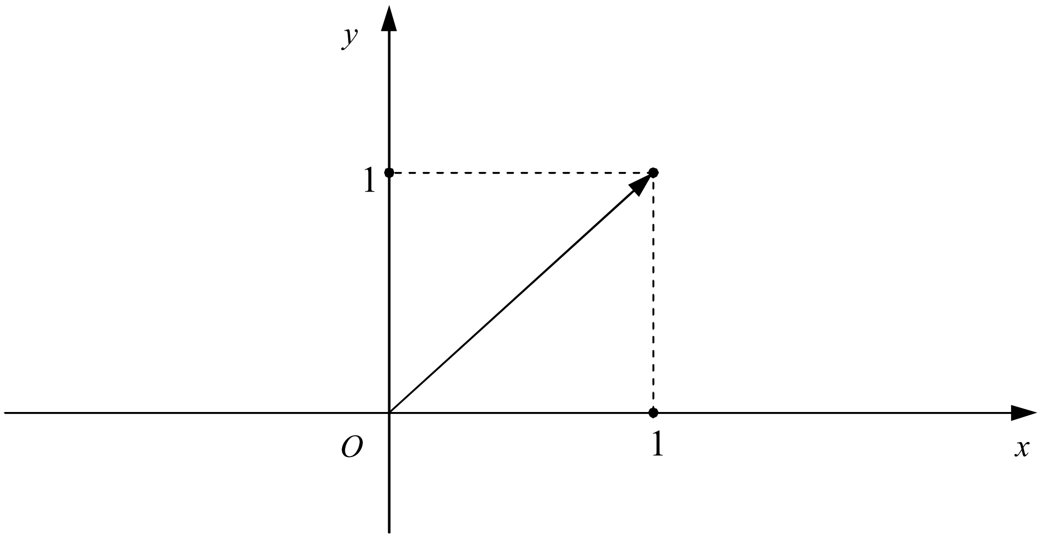


Рис. 7.6

Теорема Коші. Нехай функція $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$ і диференційовні в інтервалі (a,b), причому $g'(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$. Тоді існує така точка $c\in(a,b)$, що виконується:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (7.1)$$

Доведення. Спочатку зазначимо, що $g(a)\neq g(b)$, оскільки із рівності $g(a)=g(b)$ за теоремою Ролля випливає існування точки $c\in(a,b)$, в якій $g'(c)=0$, що суперечить умові $g'(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$.

Розглянемо тепер на відрізку $[a,b]$ функцію $h(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$, яка задовольняє всі умови теореми Ролля. Отже, знайдеться точка $c\in(a,b)$ така, що $h'(c)=0$, тобто $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0$ або $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Окремим випадком теореми Коші є наступна теорема.

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційовна в інтервалі (a,b), то знайдеться хоча б одна точка $c\in(a,b)$, в якій справджується

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \qquad (7.2)$$

Доведення. Поклавши в формулі (7.1) $g(x)=x$, дістанемо формулу (7.2).

Геометричний зміст теореми Лагранжа полягає в наступному. Розглянемо формулу (7.2) у вигляді: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\ a<c<b$.

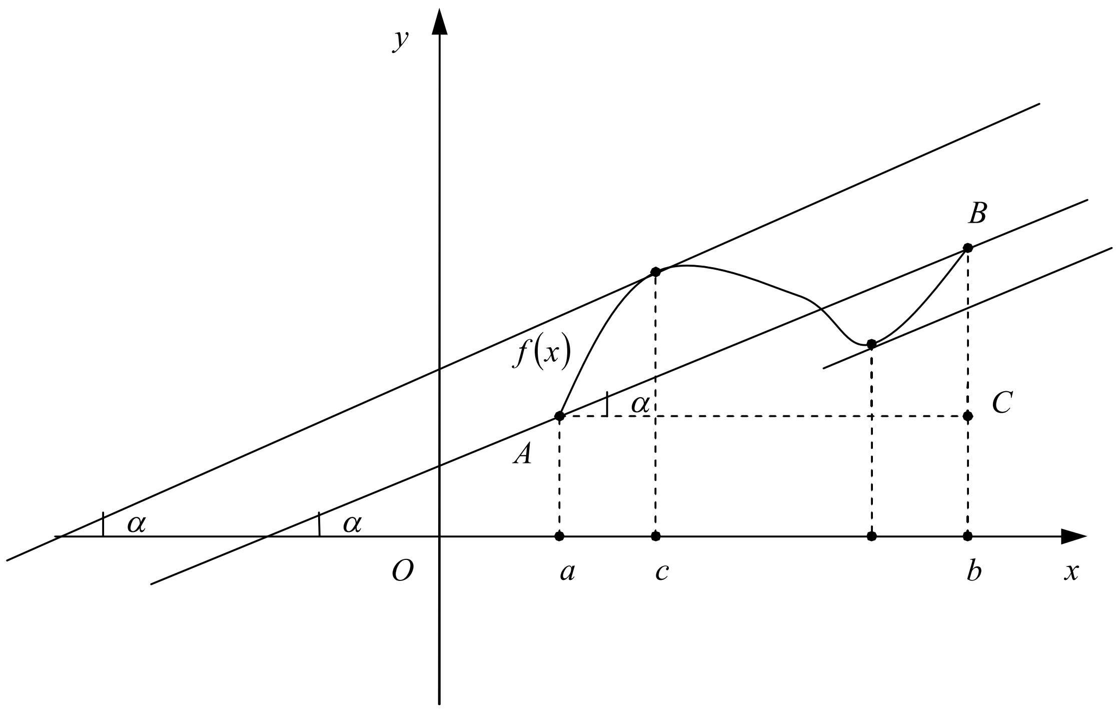


Рис. 7.7

Тоді (Рис. 7.7) маємо $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{BC}{AC}=tg\alpha=f'(c)$.

Тобто, якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до графіка паралельна хорді, що сполучає кінці кривої $A(a,f(a))$ і $B(b,f(b))$.

Зауваження. Формула (7.2) називається формулою Лагранжа (формулою скінчених приростів) і використовується в математиці надзвичайно широко.

Приклад. Крива $f(x)=x^2-4x$ сполучає точки $A(1,-3)$ і $B(4,0)$. На дузі AB знайти точку $M(x_0,y_0)$, в якій дотична паралельна хорді AB.

Розв'язання. Функція $f(x)=x^2-4x$ неперервна і диференційовна на відрізку $[1,4]$. Тому за теоремою Лагранжа існує точка $x_0\in(1,4)$, для якої $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(x_0)$, де $f'(x)=2x-4$. Отже, маємо $\dfrac{0-(-3)}{4-1}=2x_0-4$. Звідки $x_0=\dfrac{5}{2}$, $y_0=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{15}{4}$ і $M\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{15}{4}\right)$.

7.2. Правило Лопіталя.

Розглянемо загальний спосіб розкриття невизначеностей, який ґрунтується на застосуванні похідних.

Теорема 1. Нехай функції $f(x)$, $\varphi(x)$ диференційовні в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки, причому у вказаному околі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ і $\varphi'(x)\neq 0$. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує і границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ і ці границі рівні.

Доведення. Вважатимемо, що $|x_0|<+\infty$. До визначимо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ в точці x_0, поклавши $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$, і дістанемо їх неперервність в цій точці. Розглянемо відрізок $[x_0,x]$ з даного околу. Функції $f(x)$, $\varphi(x)$ неперервні на $[x_0,x]$ і диференційовні на (x_0,x), $\varphi'(x)\neq 0$ при $x\in(x_0,x)$. Тому за теоремою Коші знайдеться точка $c\in(x_0,x)$, для якої $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ або $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Оскільки за умовою $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ існує і $c\to x_0$ при $x\to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Зауваження. 1. Теорема справедлива і тоді, коли $x_0=\infty$. Дійсно, поклавши $x=\dfrac{1}{z}$, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\right]'}{\left[\varphi\left(\frac{1}{z}\right)\right]'}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

2. Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють ті самі умови, що і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, то теорему 1 можна застосувати ще раз, діставши при цьому $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{\varphi''(x)}$.

Цю теорему можна застосовувати доти, поки не прийдемо до відношення похідних $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$, яке має певну границю при $x\to x_0$. Таку саму границю матиме й відношення функцій: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$.

Теорема 2. Нехай функції $f(x)$, $\varphi(x)$ диференційовні в околі точки x_0 і в цьому околі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ і $\varphi'(x)\neq 0$. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Зауваження. 1. Виражене теоремами 1 і 2 правило обчислення границь називають правилом Лопіталя (або правилом Бернулі-Лопіталя).

2. Правило Лопіталя використовується лише для розкриття невизначеностей $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$, які називають основними. Інші невизначеності зводяться до основних таким чином:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\varphi(x)]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right], \text{ або}$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\varphi(x)]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right];$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-\varphi(x)]=[\infty-\infty]=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}\frac{1}{f(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right];$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{\varphi(x)}=\left[0^0\right]=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[\varphi(x)\ln f(x)]}=[0\cdot\infty],$$

причому так само розкриваються невизначеності ∞^0 і 1^∞.

Приклади. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x}{1}=\frac{2-1}{1}=1$.

3. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{ctg\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\dfrac{1}{\cos x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{-\sin x}=0$.

5. $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^{tgx}=[0^0]$ обчислимо таким чином. Оскільки

$$\lim_{x\to0}[tgx\ln\sin x]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to0}\frac{\ln\sin x}{ctgx}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(\ln\sin x)'}{(ctgx)'}=\lim_{x\to0}\frac{ctgx}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to0}(\cos x\sin x)=$$

$=-\lim\limits_{x\to0}\cos x\lim\limits_{x\to0}\sin x=-1\cdot0=0$, то $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^{tgx}=e^{\lim\limits_{x\to0}[tgx\ln\sin x]}=e^0=1$.

Завдання для самоконтролю

1. Як формулюється теорема Ферма?
2. Який геометричний зміст теореми Ферма?
3. Сформулювати теорему Ролля.
4. У чому полягає геометричний зміст теореми Ролля?
5. Сформулювати теорему Коші.
6. Як формулюється теорема Лагранжа?
7. У чому полягає геометричний зміст теореми Лагранжа?
8. У чому суть правила Лопіталя?
9. Чи можна кілька разів застосовувати правило Лопіталя?
10. Як розкриваються невизначеності, які не відносяться до основних, за допомогою правила Лопіталя?

Знайти границі за правилом Лопіталя:

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{x^2}$. (Відповідь: 8).

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{5x+e^x}$. (Відповідь: 0).

13. $\lim\limits_{x\to0}\left(x^{-2}-ctg^2x\right)$. (Відповідь: $\dfrac{2}{3}$).

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$. (Відповідь: 1).

15. $\lim\limits_{x \to 0} (ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$. (Відповідь: $\frac{1}{e}$).

16. $\lim\limits_{x \to 1} \left(tg\frac{\pi x}{4} \right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$. (Відповідь: $\frac{1}{e}$).

17. $\lim\limits_{x \to 0} (\ln ctgx)^{tg 2x}$. (Відповідь: 1).

18. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$. (Відповідь: $\frac{1}{e^2}$).

Лекція №8. Застосування похідної.

Монотонні функції. Екстремум функції. Опуклість кривих. Асимптоти. Застосування похідної в економічній теорії.

8.1. Монотонні функції.

Розглянемо умови монотонності.

Теорема 1(про необхідні умови монотонності).

Якщо диференційовна функція $f(x)$ зростає (спадає) на інтервалі (a,b), то її похідна $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) на (a,b).

Доведення. Нехай $f(x)$ – диференційовна і зростає. У випадку спадної функції доведення аналогічне.

В силу зростання функції при $\Delta x>0$ або $\Delta x<0$ маємо відповідно $f(x+\Delta x)-f(x)>0$ і $f(x+\Delta x)-f(x)<0$. Тоді відношення $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$. Звідси при переході до границі дістанемо $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$.

Теорема 2(достатні умови строгої монотонності).

Якщо похідна диференційовної функції $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) на інтервалі (a,b), то функція $f(x)$ зростає (спадає) на (a,b).

Доведення. Нехай $f'(x)>0$, довільні точки $x_1,x_2\in(a,b)$ і $x_1<x_2$. На відрізку $[x_1,x_2]$ виконуються умови теореми Лагранжа, тому $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$, $c\in(x_1,x_2)$. Оскільки $f'(c)>0$, $x_2-x_1>0$, то $f(x_2)-f(x_1)>0$ або $f(x_2)>f(x_1)$, тобто функція $f(x)$ зростає на (a,b).

У випадку $f'(x)<0$ теорема доводиться так само.

Проміжки, в яких функція дорівнює нулю, називаються проміжками монотонності.

Точки, де похідна функції дорівнює нулю, називається стаціонарними. Стаціонарні точки та точки, в яких похідна не існує, називається критичними точками (першого роду).

Щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, потрібно:

1) знайти область визначення функції;
2) обчислити похідну функції $f'(x)$;
3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x)=0$ та умови, що $f'(x)$ не існує;
4) визначити знак похідної $f'(x)$ в кожному із інтервалів, на які поділяється область визначення функції критичними точками;
5) за знаками похідної зробити висновок, в якому інтервалі функція зростає, а в якому спадає.

Приклад. Витрати виробництва визначені функцією $v(x)=2x^3-6x+7$. Знайти її інтервали монотонності.

Розв'язання. Задана функція існує при $x\in(-\infty,\infty)$, але має економічний зміст лише для $x>0$. Знаходимо похідну: $v'(x)=6x^2-6=6(x^2-1)$. Звідки маємо $x^2-1=0$ і $x_1=-1$, $x_2=1$ – стаціонарні(критичні) точки.

При $x\in(-\infty,-1)$ $v'(x)>0$,

при $x\in(-1,1)$ $v'(x)<0$ і

при $x\in(1,+\infty)$ $v'(x)>0$.

Отже, функція $v(x)$ зростає в $(-\infty,-1)$ і $(1,+\infty)$, і спадає в $(-1,1)$. З економічної точки зору, ця функція спадає в $(0,1)$ та зростає в $(1,+\infty)$.

8.2. Екстремуми функції.

При дослідженні економічного процесу важливо знати, коли досягається максимум (мінімум), тобто оптимальні значення функції, яка описує процес.

Точка x_0 називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо існує окіл $0<|x-x_0|<\delta$ точки x_0 в області визначення функції, що для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$). (Рис. 8.1)

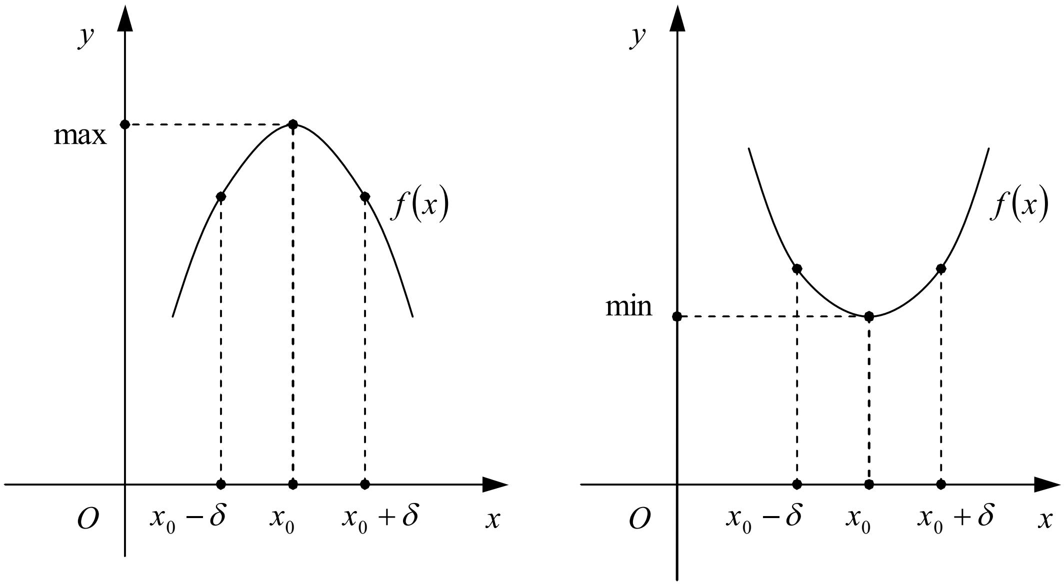


Рис. 8.1

Точки локального максимуму і мінімуму називаються точками локального екстремуму.

Зауваження. Поняття екстремуму має локальний характер: нерівність $f(x) < f(x_0)$ або $f(x) > f(x_0)$ виконується лише в деякому околі точки x_0 і може не виконуватись для всіх значень x з області визначення функції. Потрібно відрізняти локальний максимум або мінімум від глобального (абсолютного) максимуму або мінімуму, якого функція може набувати в області визначення. Локальних максимумів (мінімумів) може бути кілька, абсолютний максимум (мінімум) може бути тільки один. Більш того, може статись, що окремий локальний мінімум більший від деякого локального максимуму, тоді як абсолютний мінімум не перевищує абсолютного максимуму.

Теорема 3(необхідна умова локального екстремуму).

Якщо функція має в точці локальний екстремум, то ця точка є критичною.

Зауваження. Не кожна критична точка функції є її екстремальною. Наприклад, для функції $f(x) = x^3$ точка $x = 0$ є критичною, але вказана функція в ній екстремуму не має.

Розглянемо умови, які дають змогу виділити екстремальні точки серед критичних.

Теорема 4(перша достатня умова локального екстремуму).

Нехай неперервна функція $f(x)$ в деякому околі $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ критичної точки x_0 має похідну $f'(x)$ всюди, крім, можливо, точки x_0, тоді:

1) якщо в інтервалі $(x_0-\delta, x_0)$ похідна $f'(x)>0$ (або $f'(x)<0$) і в інтервалі $(x_0, x_0+\delta)$ похідна $f'(x)<0$ (або $f'(x)>0$), то x_0 є точкою локального максимуму (або мінімуму) функції;

2) якщо ж обох інтервалах $(x_0-\delta, x_0)$ і $(x_0, x_0+\delta)$ похідна $f'(x)$ має один і той самий знак, то x_0 не є екстремальною точкою функції.

Доведення. Нехай для деякого $\delta>0$ виконується: $f'(x)>0$ при $x\in(x_0-\delta, x_0)$ і $f'(x)<0$ при $x\in(x_0, x_0+\delta)$. Тоді на інтервалі $(x_0-\delta, x_0)$ функція $f(x)$ зростає і $f(x)<f(x_0)$, $x\in(x_0-\delta, x_0)$, а на інтервалі $(x_0, x_0+\delta)$ вона спадає і $f(x)<f(x_0)$, $x\in(x_0, x_0+\delta)$. Отже, при всіх значеннях x з околу $0<|x-x_0|<\delta$ точки x_0 виконується $f(x)<f(x_0)$, тобто x_0 – точка локального максимуму функції.

Так само можна довести всі інші випадки теореми.

Зауваження. Теорема 4 дозволяє дослідити функцію на екстремум: визначити точки максимумів ті мінімумів за зміною знака похідної при переході через критичні точки функції зліва направо.

Теорема 5(друга достатня умова екстремуму).

Нехай в околі стаціонарної точки x_0 існує неперервна друга похідна функції, причому $f''(x_0)\neq 0$. Тоді, якщо $f''(x)>0$, то x_0 – точка локального мінімуму, якщо ж $f''(x)<0$, то x_0 – точка локального максимуму.

Приклад. Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного – p, причому $p+0{,}1x=80$; функція витрат $V(x)=5000+20x$ (у грн.). знайти маргінальний прибуток, якщо виготовлено та продано 150 і 400 виробів. Знайти значення змінної x, починаючи з якого прибуток буде зменшуватись.

Розв’язання. Функція доходу має вигляд $D(x) = xp = 80x - 0{,}1x^2$. Тоді прибуток від продажу виготовлених x виробів буде $P(x) = D(x) - V(x) = 60x - 0{,}1x^2 - 5000$.

Знайдемо маргінальний прибуток $P'(x) = 60 - 0{,}2x$. Для $x = 150$ і $x = 400$ одержимо $P'(150) = 30$ та $P'(400) = -20$.

Отже, підприємство буде мати збитки розміром 20 грн. За кожний виріб, який буде виготовлено та продано за умови зростання кількості виробів понад 400.

Знайдемо критичну точку: $P'(x) = 0$, $60 - 0{,}2x = 0$, $x = 300$. Оскільки $P''(300) = -0{,}2 < 0$, то функція $P(x)$ матиме максимум при $x = 300$; $P_{\max} = P(300) = 4000$. Таким чином при збільшенні виробництва продукції понад 300 одиниць прибуток буде зменшуватися.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ то за теоремою Вейєрштрасса вона на ньому досягає найбільшого $M = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$ і найменшого $m = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$ значень (абсолютного максимуму і мінімуму), для знаходження яких треба:

1) знайти критичні точки функції в інтервалі (a,b);
2) обчислити значення функції у знайдених критичних точках та точках a і b;
3) серед знайдених таким чином значень функції вибрати найбільше і найменше.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2$ на відрізку $[-1{,}3]$.

Розв’язання. Знаходимо критичні точки: $f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. Відрізку $[-1{,}3]$ належать лише критичні точки $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Обчислимо значення функції в цих точках і на кінцях відрізку: $f(0)=0$, $f(2)=-16$, $f(-1)=-7$, $f(3)=9$. Отже, $M=\max\limits_{-1\le x\le 3} f(x)=9$, $m=\min\limits_{-1\le x\le 3} f(x)=-16$.

8.3. Опуклість кривих. Асимптоти.

Крива $f(x)$ називається опуклою до гори або опуклою (до низу або вгнутою) на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче (вище) довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Точкою перегину називається точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої.

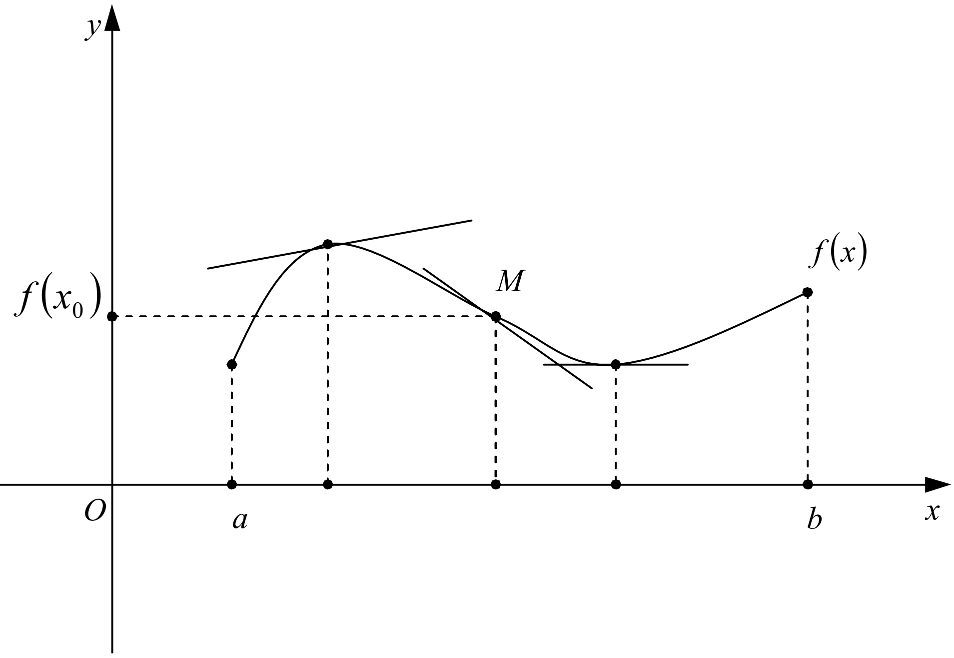


Рис. 8.2

На рис. 8.2 крива $f(x)$ опукла на інтервалі (a,x_0) і вгнута на інтервалі (x_0,b), отже, точка $M(x_0,f(x_0))$ – точка перегину.

Інтервалі опуклості та вгнутості відшукують за допомогою такої теореми.

Теорема 6. нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна на (a,b). Тоді:

1) якщо $f''(x)<0$, $x\in(a,b)$, то крива $f(x)$ опукла на (a,b);

2) якщо ж $f''(x)>0$, $x\in(a,b)$, то вона вгнута на (a,b).

Точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками другого роду функції $f(x)$.

Теорема 7 (достатні умови існування точки перетину).

Якщо при переході через критичну точку другого роду функції x_0 її похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0, f(x_0))$ – точка перегину кривої $f(x)$.

Доведення. Нехай $f''(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f''(x) > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тоді за теоремою 6 крива $f(x)$ опукла на $(x_0 - \delta, x_0)$ і вгнута на $(x_0, x_0 + \delta)$, тобто $(x_0, f(x_0))$ – точка перегину.

Приклад. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої $f(x) = x^5 - x + 2$.

Розв'язання. Тут область визначення $(-\infty, \infty)$. Оскільки $f''(x) = 20x^3 = 0$ при $x = 0$, то $x = 0$ – критична точка другого роду. Інших критичних точок немає, бо $f''(x)$ існує на $(-\infty, +\infty)$. Якщо $x \in (-\infty, 0)$, то $f''(x) < 0$ і крива опукла на $(-\infty, 0)$; якщо ж $x \in (0, +\infty)$, то $f''(x) > 0$ і крива вгнута на $(0, +\infty)$. Отже, $(0,2)$ – точка перегину.

Пряма l називається асимптотою кривої $f(x)$, якщо відстань δ від змінної точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

Для існування вертикальної асимптоти $x = x_0$ необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \infty$. Дійсно, маємо $\delta = \sqrt{(x - x_0)^2 - (f(x) - f(x_0))^2} = |x - x_0| \to 0$ при $x \to x_0$. (Рис. 8.3)

Рівняння похилої асимптоти (Рис. 8.3) шукаємо у вигляді $y = kx + b$. Тут $\delta = MP$, $MN = \dfrac{MP}{\cos\varphi} = \dfrac{\delta}{\cos\varphi}$. Якщо $\delta \to 0$ при $x \to \infty$, то $MN = MQ - NQ = f(x) - (kx + b) \to 0$ і навпаки. Отже, якщо при $x \to \infty$ маємо асимптоту, то $\lim\limits_{x \to \infty}(f(x) - kx - b) = 0$ або $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right) = 0$. Тому $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right) = 0$, звідки: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$. (8.1)

Далі дістанемо $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right).$ (8.2)

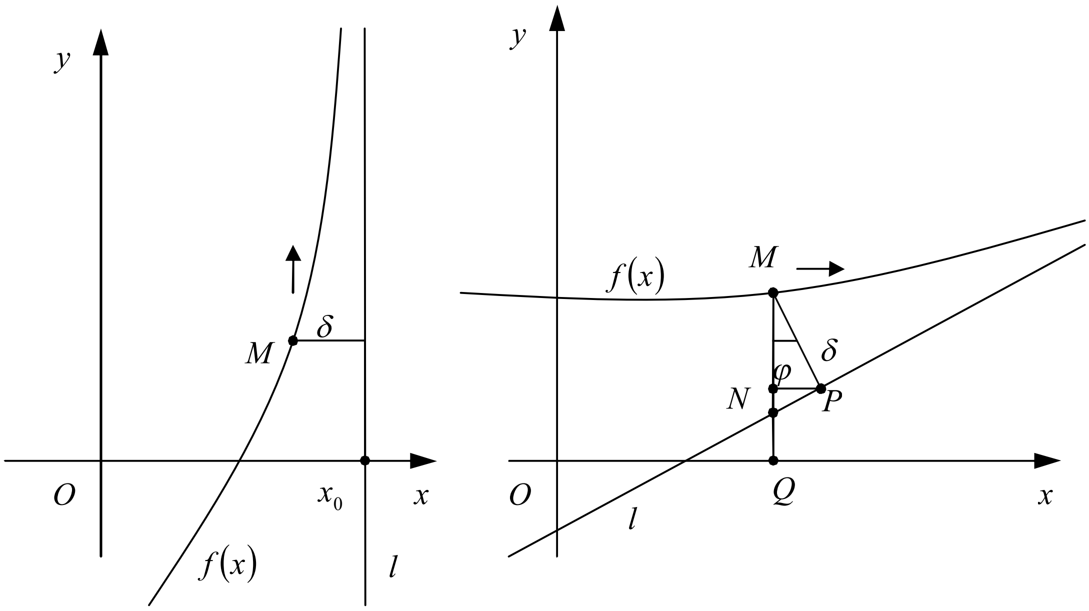


Рис. 8.3

Зауваження. 1. Якщо хоча б один з границь (8.1) або (8.2) не існує або дорівнює нескінченності, то крива похилої асимптоти не має.

2. Якщо $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ і дістаємо рівняння горизонтальної асимптоти $y = b$.

3. Асимптоти кривої при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$ можуть бути різними. Тому при знаходженні асимптот границі (8.1) і (8.2) потрібно обчислювати при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$.

Приклад. Знайти асимптоти кривої $f(x) = xe^x$.

Розв'язання. Задана крива вертикальних асимптот не має, тому що не має точок розриву другого роду. Далі дістанемо: $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{x} = +\infty$ і при $x \to +\infty$ ця крива похилої асимптоти не має.

Оскільки $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $b = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x - 0x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$ $= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$, то при $x \to -\infty$ крива має горизонтальну асимптоту $y = 0$, як окремий випадок похилої асимптоти.

8.4. Застосування похідної в економічній теорії.

Нехай p – вартість одного виробу, а x – кількість виробів,, виготовлених та проданих за певний інтервал часу. Розглянемо функцію $x = f(p)$. Якщо вартість виробу зростає від p до $p + \Delta p$, тоді й кількість виробів також зміниться на величину $\Delta x = f(p + \Delta p) - f(p)$.

Відносний приріст вартості становитиме $\frac{\Delta p}{p}$, а відносний приріст становитиме $\frac{\Delta x}{x}$.

Розглянемо відношення $\frac{\Delta x}{x} : \frac{\Delta p}{p} = \frac{p\Delta x}{x\Delta p}$, яке показує у скільки разів відносний приріст попиту більший за відносний приріст вартості кожного виробу.

Якщо в останній рівності перейти до границі при $\Delta p \to 0$, то одержимо еластичність попиту: $\eta = \lim\limits_{\Delta p\to 0} \frac{p\Delta x}{x\Delta p} = \frac{p}{x}\lim\limits_{\Delta p\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{p \cdot x'(p)}{x}$.

За малих значень Δp, маємо $\eta \approx \frac{p\Delta x}{x\Delta p}$, або відсоток зміни попиту $\approx \eta$ (відсоток зміни вартості).

Наприклад, якщо зростання вартості на 2% спричиняє значення попиту на 3%, тоді еластичність попиту $\eta \approx -\frac{3}{2} = -1{,}5$.

Якщо відсоток зміни попиту більший за відсоток зміни вартості ($\eta < -1$), то попит називають еластичним; якщо відсоток заміни попиту менший за відсоток зміни вартості ($-1 < \eta < 0$), то попит називають нееластичним.

Якщо $\eta = -1$, то попит називають адекватним вартості одиниці виробу.

Встановимо зв'язок між доходом підприємства та еластичністю попиту.

Оскільки функція доходу підприємства має вигляд $D(x) = xp$, то маргінальний доход відносно вартості $\frac{dD(x)}{dp} = \frac{d}{dp}(xp) = x + p\frac{dx}{dp} = x\left(1 + \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}\right) =$ $= x(1+\eta)$.

Отже, $\frac{dD(x)}{dp} = x(1+\eta)$. Якщо попит еластичний ($\eta < -1$), то $1+\eta < 0$ і $D_p'(x) < 0$, тобто доход спадає.

Якщо попит нееластичний ($-1 < \eta < 0$), то $1+\eta > 0$ і $D_p'(x) > 0$, тобто доход D зростає.

Якщо попит адекватний ($\eta = -1$), то $1+\eta = 0$ і $D_p'(x) = 0$, тобто доход не змінюється.

Приклад. Знайти еластичність попиту та визначити стан доходу підприємства при $p = 4$ та $p = 150$, якщо заданий зв'язок між кількістю виготовлених виробів x та вартістю кожного виробу p має вигляд $x = 500 - 2p$.

Розв'язання. Знайдемо еластичність попиту для довільного p: $\eta = \frac{p \cdot x'(p)}{x} = \frac{p(-2)}{x}$ або $\eta = \frac{-2p}{500-2p}$. При $p = 150$, $x = 500 - 300 = 200$ будемо мати еластичність попиту $\eta = \frac{-300}{200} = -\frac{3}{2} < -1$ і маргінальний доход $D_p'(200) = 200\left(1 - \frac{3}{2}\right) = -100 < 0$. Отже, при $p = 150$ і $x = 200$ попит еластичний і доход підприємства знижується.

Завдання для самоконтролю

1. В чому полягають достатні умови строгої монотонності?
2. Які точки називаються стаціонарними?
3. Як знайти інтервали монотонності?
4. Що називається точкою локального максимуму і точкою локального мінімуму?

5. Чим відрізняється локальний екстремум від абсолютного?
6. Які необхідні умови локального екстремуму?
7. В чому полягають перша і друга достатні умови екстремуму?
8. Як знайти екстремум?
9. Як знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку?
10. Яка крива називається опуклою?
11. Що називається точкою перегину?
12. Які точки називаються критичними точками другого роду?
13. В чому полягає достатня умова опуклості кривої?
14. За яких умов критична точка другого роду є абсцисою точки перегину?
15. Що називається асимптотою кривої?
16. Як знайти вертикальну асимптоту? Похилу?
17. Що називається еластичністю попиту?
18. За яких умов попит еластичний? Нееластичний?
19. Який зв'язок існує між доходом підприємства та еластичністю попиту?
20. Знайти інтервали монотонності функцій: а) $f(x)=\ln(x^2+3)$; б) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$. (Відповідь: а) на $(-\infty,0)$ спадає і на $(0,+\infty)$ зростає; б) на $(-1,1)$ зростає і на $(-\infty,-1)$ та $(1,+\infty)$ спадає).
21. Знайти локальні екстремуми функції: а) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$; б) $f(x)=\frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$. (Відповідь: а) $y_{\min}=f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$, $y_{\max}=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$; б) $y_{\max}=f\left(\frac{12}{5}\right)=\frac{1}{24}$).
22. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=3x-x^3$ на $[-2,3]$. (Відповідь: $M=2$; $m=-18$).

23. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+12$. (Відповідь: в $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ і $(1,+\infty)$ вгнута, в $\left(\frac{1}{3},1\right)$ опукла і $\left(\frac{1}{3},\frac{335}{27}\right)$, $(1,13)$ – точки перегину).

24. Знайти асимптоти кривої $f(x)=\frac{2x^2+5x-1}{x}$. (Відповідь: вертикальна асимптота $x=0$ і похила асимптота $y=2x+5$).

25. для функції витрат $V(x)=500+20x$ і заданої вартості одиниці продукції $p=100-x$ знайти інтервали, в яких функції витрат, доходу та прибутку зростають та спадають. (Відповідь: $V(x)$ зростає для всіх x; $D(x)$ зростає при $x<50$ і спадає при $x>50$; $P(x)$ зростає при $x<40$ і зростає при $x>40$).

26. Знайти еластичність попиту та вказати стан доходу підприємства при $p=18$, якщо зв'язок між кількістю виготовлених та проданих виробів x і вартістю кожного виробу p має вигляд $x=\frac{2000}{p-2}$. (Відповідь: попит еластичний і доход знижується ($\eta=-\frac{125}{16}$, $D_p'(125)<0$)).

Лекція №9. Функції багатьох змінних.

Функція багатьох змінних. Частинні похідні, їх застосування до аналізу бізнесу. Повний диференціал. Диференціювання складної та неявної функцій. Похідна за напрямом. Градієнт.

9.1. Функція багатьох змінних. Частинні похідні, їх застосування до аналізу бізнесу.

Функції багатьох змінних застосовуються в багатьох галузях, в тому числі й в економіці.

Отже, нехай задано множину D упорядкованих пар чисел (x, y). Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом відповідає єдине число z, то на множині D визначено функцію z від двох змінних x та y і записують $z = f(x, y)$.

Сукупність пар чисел (x, y), які утворюють множину D, називають областю визначення функції $z = f(x, y)$; z називають залежною змінною, а x і y – незалежними змінними або аргументами. Лінію, яка обмежує область D, називають межею області визначення.

Оскільки кожній парі чисел (x, y) відповідає в координатній площині єдина точка $M(x, y)$ і, навпаки, то функцію двох змінних можна розглядати як функцію точки і писати $z = f(M)$.

Значення функції в точці $M_0(x_0, y_0)$ позначають $z_0 = f(x_0, y_0)$ або $z_0 = f(M_0)$, або $z_0 = z|_{M_0}$.

Функцію двох змінних можна зобразити графічно у вигляді деякої поверхні. Графіком функції $z = f(x, y)$ в прямокутній системі $OXYZ$ називають геометричне місце точок $M(x, y, f(x, y))$, проекції яких (x, y) належать області D. Це геометричне місце точок утворює у просторі певну поверхню, проекцією якої на площину OXY є множина D.

Для побудови графіків функцій двох змінних використовують метод перерізів, який полягає у тому, що поверхню $z = f(x, y)$ перетинають площинами $x = x_0$ і $y = y_0$, і за графіками кривих $z = f(x_0, y)$ та $z = f(x, y_0)$ визначають графік функції $z = f(x, y)$. Здебільшого поверхню $z = f(x, y)$ перетинають площинами $z = c$ і при цьому отримують криві $f(x, y) = c$, які називають лініями рівня функції $z = f(x, y)$. Проекції таких кривих на площину OXY є лініями рівня на площині. Будуючи лінії рівня, дістають певне уявлення про графік функції двох змінних.

Приклад. Графіком функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ є верхня півсфера, а область її визначення – круг на площині OXY з центром в початку координат і одиничним радіусом. Лініями рівня цієї функції на площині OXY є концентричні кола $x^2 + y^2 = 1 - c^2$, де $0 \le c \le 1$ і $z = c$. (Рис. 9.1)

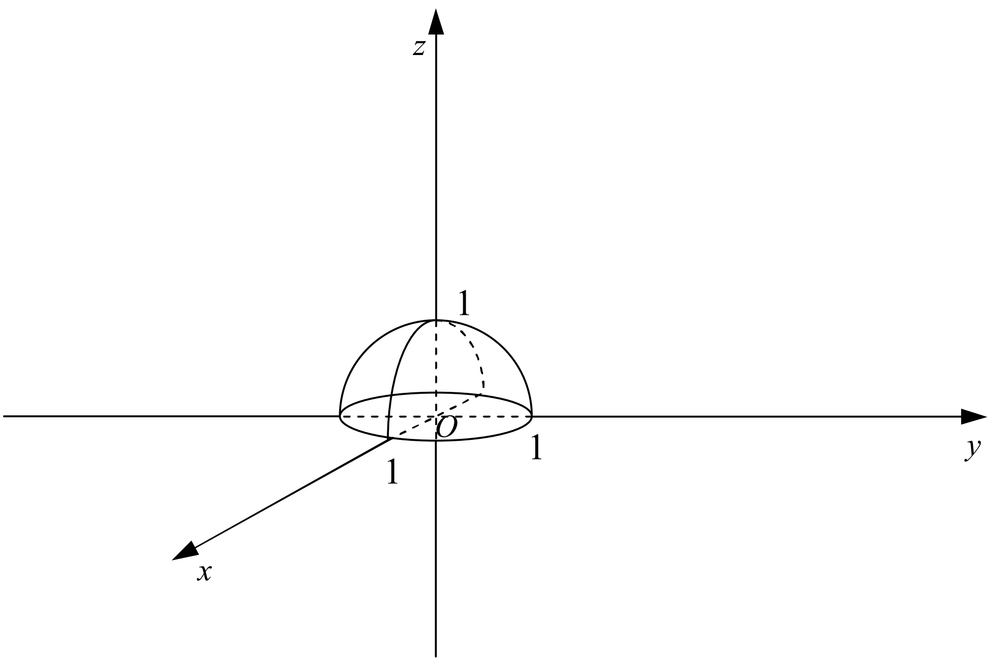


Рис. 9.1

Зауваження. Аналогічно можна розглянути функцію трьох і більшого числа змінних, але графічно такі функції зобразити не можливо. Для функцій двох змінних можна, з певним застереженнями, визначити так само, як і для функції однієї змінної, поняття границі та неперервності. Надалі, в основному, розглядатимемо лише функцію двох змінних, оскільки результати для неї неважко по аналогій узагальнити на випадок більшого числа змінних.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$ (під околом точки можна розуміти будь-який круг, що мітить точку). Залишаючи змінну y незмінною, надамо довільного приросту Δx змінній x так, щоб точка $(x + \Delta x, y)$ належала вказаному околу.

Величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ називається частинним приростом функції $f(x, y)$ по змінній x. Аналогічно маємо частинний приріст функції $f(x, y)$ по змінній y: $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Якщо існує границя $z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то вона називається частинною похідною (першого порядку) функції $f(x, y)$ в точці M, по змінній x і позначається також символами: f'_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Так само визначається частинна похідна по змінній y як границя $z'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ та позначається також одним із символів: f'_y, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Зауваження. При знаходженні частинної похідної z'_x обчислюють звичайну похідну функції однієї змінної x, вважаючи змінну y сталою. При відшуканні похідної z'_y сталою вважається x. При знаходженні частинних похідних використовують формули та правила обчислення похідних функцій однієї змінної.

Частинна похідна z'_x (z'_y) характеризує швидкість зміни функції в напрямі осі OX (OY).

Нехай, тепер, функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні z'_x, z'_y в області D. Якщо існує частинна похідна по x від функції $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, то її називають частинною похідною другого порядку від функції $f(x, y)$ по змінній x і позначають та записують так $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ або $f''_{xx} = \left(f'_x\right)'_x$. Якщо ж існує частинна похідна від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$ по змінній y, то вона називається мішаною частинною похідною другого порядку від функції $f(x, y)$ і записують таким чином: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ або $f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y$. Аналогічно можна розглянути частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ і $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

На запитання, чи залежить результат диференціювання від його порядку, дає відповідь наступна теорема.

Теорема Шварца (про мішані похідні).

Якщо функція $f(x, y)$ і її похідні f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} визначені в деякому околі точки M_0, причому в самій точці функції f''_{xy} і f''_{yx} неперервні, то $f''_{xy}|_{M_0} = f''_{yx}|_{M_0}$.

Зауваження. Аналогічна теорема справедлива для будь-яких неперервних мішаних похідних, які відрізняються лише порядком диференціювання.

Приклад. Для функції $z = x^3 - x^2 y + y^2$ знайдемо частинні похідні другого порядку.

$z'_x = 3x^2 - 2xy$, $z''_{xy} = -2x$, $z''_{xx} = 6x - 2y$;

$z'_y = -x^2 + 2y$, $z''_{yx} = -2x$, $z''_{yy} = 2$.

Тут маємо $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Частинні похідні мають застосування до аналізу бізнесу.

Кількість та якість випуску продукції залежить від багатьох факторів, які можна змінювати і серед яких найважливішими є продуктивність праці і вкладений у виробництво капітал.

Нехай x – кількість одиниць праці (вимірюється річними робочими годинами або річною вартістю праці) та k – сума вкладеного капіталу у виробничий план, тоді кінцевий результат (кількість одиниць випущеної продукції) характеризується продуктивною функцією $P = f(x,k)$.

Якщо частинна похідна (гранична продуктивність праці при фіксованому k) $\frac{\partial P}{\partial x}$ зростає (коли $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} > 0$), то і прибутки виробництва зростають. Похідна $\frac{\partial P}{\partial k}$ (гранична продуктивність капіталу при фіксованій продуктивності праці x) характеризує зміну випуску продукції при постійних трудових затратах.

Як відомо, попит на будь-який товар залежить від його вартості, якості, пакування, вартості інших товарів. Товари A та B взаємопов’язані, якщо попит на A залежить від вартості B.

Нехай p_A, p_B – вартості одиниці відповідного товару, X_A, X_B – кількісний попит на товари A і B відповідно, тоді маємо функції $X_A = f(p_A, p_B)$, $X_B = \varphi(p_A, p_B)$.

Товари A і B називаються конкурентними, якщо граничний попит на товар A відносно його вартості та відносно вартості p_B: $\frac{\partial X_A}{\partial p_A} > 0$, $\frac{\partial X_B}{\partial p_B} > 0$.

Тут еластичність вартості товару A відносно p_A і відносно p_B визначається відповідно так $\eta_{p_A} = \frac{p_A}{X_A}\frac{\partial X_A}{\partial p_A}$, $\eta_{p_B} = \frac{p_B}{X_B}\frac{\partial X_B}{\partial p_B}$.

9.2. Повний диференціал. Диференціювання складної та неявної функцій.

Якщо функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці, то в цій точці її повний приріст можна подати у вигляді $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y +$ $+\alpha\Delta x + \beta\Delta y$, де $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ і $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Повним диференціалом (диференціалом першого порядку) функції $z = f(x,y)$ називається величина $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$. Оскільки $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Нехай x, y – незалежні змінні. Тоді диференціал другого порядку визначають так $d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 =$ $= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$. Аналогічно можна записати диференціал $n-$го порядку: $d^n z = d\left(d^{n-1}z\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$. Нехай тепер маємо функцію $z = f(x,y)$, де $x = x(t)$ і $y = y(t)$ – функції незалежної змінної t. Неважко довести формулу для складеної функції $f(x(t), y(t))$: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$. (9.1)

Якщо ж $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ – функції двох змінних, то для складеної функції $f(x(u,v), y(u,v))$ формули диференціювання мають вигляд: $\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{dz}{dv} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$. (9.2)

Зауваження. Так само, як і раніше у випадку функції однієї змінної, можна дістати висновок, що повний диференціал має інваріантну форму, а диференціали вищих порядків властивості інваріантності не мають. Тут справджується формула для складеної функції:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y. \qquad (9.3)$$

якщо кожній парі чисел x та y з деякої множини відповідає єдине значення z, яке разом з x і y задовольняє рівняння $F(x,y,z) = 0$, то це рівняння визначає неявну функцію $z = \varphi(x,y)$, частинні похідні якої знаходяться за формулами: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$. (9.4)

Приклад. Знайти повний диференціал функції z, якщо $e^z - x^2y + z = 6$.

Розв’язання. Тут $F(x,y,z)=e^z-x^2y+z-6$; $F'_x=-2xy$, $F'_y=-x^2$, $F'_z=e^z+1$. Скориставшись формулами (9.4), маємо $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy}{e^z+1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{e^z+1}$. Отже, $dz=\frac{2xydx+x^2dy}{e^z+1}$.

Зауваження. Частинні похідні застосовують і для знаходження рівнянь дотичної площини та нормалі до поверхні, яка задана рівнянням $F(x,y,z)=0$.як відомо, дотична площина в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до поверхні – це площина, в якій лежать дотичні до всіх кривих на поверхні, що проходять через M_0. Її рівняння має вигляд:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0. \qquad (9.5)$$

Нормаль до поверхні в точці M_0 – пряма, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці. Вона має рівняння:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (9.6)$$

9.3. Похідна за напрямом. Градієнт.

Відомо, що скалярна функція $u=u(M)=u(x,y,z)$ разом із своєю областю визначення визначає так зване скалярне поле.

Отже, нехай задано скалярне поле $u(x,y,z)$. В ньому з точки $M(x,y,z)$ проведемо вектор $\bar{l}$ з напрямними косинусами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. На векторі $\bar{l}$ візьмемо точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. Тоді $\Delta l=MM_1=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$.

Приріст функції при переході від M до M_1 в напрямі вектора $\bar{l}$ має вигляд $\Delta_l u=u(M_1)-u(M)$. Якщо існує границя $\frac{\partial u}{\partial l}=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$, то вона називається похідною функції u в точці M за напрямом вектора $\bar{l}$.

Якщо u диференційовна в точці M, то її повний приріст записують так $\Delta_l u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z$, де ε_1, ε_2, $\varepsilon_3\to 0$ при $\Delta l\to 0$.

Враховуючи $\Delta x = \Delta l \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l \cos\beta$, $\Delta z = \Delta l \cos\gamma$, маємо
$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1 \cos\alpha + \varepsilon_2 \cos\beta + \varepsilon_3 \cos\gamma .$$

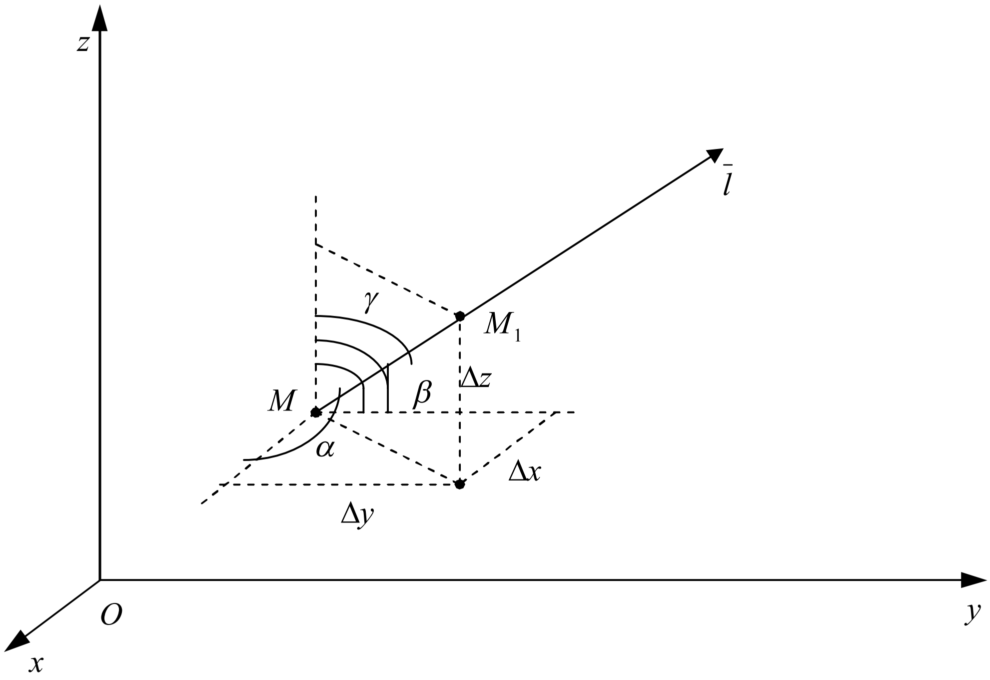


Рис. 9.2

Перейшовши до границі при $\Delta l \to 0$ в останній рівності, дістанемо формулу для обчислення похідної за напрямом:
$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma . \qquad (9.7)$$

Зауваження. Частинні похідні є окремим випадком похідної за напрямом. Так само, як і частинні похідні, похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ характеризує швидкість зміни скалярного поля в точці M, але за напрямом вектора $\bar{l}$. у якому ж напрямі $\bar{l}$ похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ має найбільше значення? Відповідь має важливе практичне значення і дається на основі поняття градієнта.

Градієнтом функції u в точці M називають вектор
$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} . \qquad (9.8)$$

Зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом встановлюється рівністю: $\frac{\partial u}{\partial l} = np_{\bar{l}}\, grad\, u$. (9.9)

Основні властивості градієнта:

1. Швидкість зростання скалярного поля в довільній точці є максимальною у напрямі градієнта, причому:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |grad\, u| = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}\,. \tag{9.10}$$

2. Похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю.

3. Справджуються рівності:

$$grad(u+v) = grad\, u + grad\, v\,,$$

$$grad(uv) = grad\, u \cdot grad\, v\,,$$

$$grad\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot grad\, u - u \cdot grad\, v}{v^2}\,.$$

Приклад. Знайти похідну функції $u = \ln\left(x^2 + y^3\right)$ в точці $M(-1,2)$ за напрям ом від цієї точки до початку координат та градієнт функції у вказаній точці.

Розв'язання. Знаходимо вектор $\bar{l} = \overline{MO} = (1,-2)$ та його напрямні косинуси $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ і обчислюємо частинні похідні:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.\frac{2x}{x^2 + y^3}\right|_M = \frac{2(-1)}{(-1)^2 + 2^3} = -\frac{2}{9},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.\frac{3y^2}{x^2 + y^3}\right|_M = \frac{3 \cdot 2^2}{(-1)^2 + 2^3} = \frac{4}{3}.$$

Отже, маємо шукані величини:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{3}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{9\sqrt{5}} - \frac{24}{9\sqrt{5}} = -\frac{26}{9\sqrt{5}},\ \left. grad\, u\right|_M = -\frac{2}{9}\bar{i} + \frac{4}{3}\bar{j}\,.$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається функцією двох змінних?
2. Що являє собою графік функції $z = f(x, y)$?
3. У чому полягає метод перерізів?
4. Що називається лінією рівня?
5. Що називається частинними похідними?
6. Яка є теорема про мішані похідні?
7. Що називається повним диференціалом?
8. Які є правила диференціювання неявних функцій?
9. Як записати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні?
10. Що називається скалярним полем?
11. Яка формула для обчислення похідної за напрямом?
12. Що називається градієнтом?
13. Які властивості градієнта?
14. Який зв'язок між похідною за напрямом і градієнтом?
15. Знайти частинні похідні в точці $M_0(1,1)$ для функції $z = x^3 + y^3 - xy$. (Відповідь: $z'_x(1,1) = z'_y(1,1) = 2$).
16. знайти повний диференціал функції $z = x^3 y^2$. (Відповідь: $dz = 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy$).
17. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^2 - 3xy$, де $x = 2t$, $y = t^2$. (Відповідь: $\frac{dz}{dt} = 8t - 18t^2$).
18. Знайти $\frac{du}{dx}$, якщо $u = x^2 - xy + z^2$, де $y = 2x$, $z = x^3$. (Відповідь: $\frac{du}{dx} = -2x + 6x^5$).
19. Знайти $\frac{dy}{dx}$, якщо функція y задана рівнянням $e^y - e^x + 2xy = 0$. (Відповідь: $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - 2y}{e^y + 2x}$).

20. Написати рівняння нормалі та дотичної до еліпсоїда $2x^2 + y^2 + z^2 = 15$ в точці $M_0(1,2,3)$. (Відповідь: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$, $2x + 2y + 3z - 15 = 0$).

21. Написати рівняння нормалі і дотичної до параболоїда $z = x^2 + y^2$ в точці $M_0(1,-2,5)$. (Відповідь: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$, $2x - 4y - z - 5 = 0$).

22. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точці $A(1,2,-1)$ за напрямом від точки A до точки $B(2,4,-3)$. З'ясувати характер зміни поля в даному напрямі. (Відповідь: $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{16}{3} > 0$ і функція зростає).

23. Знайти значення і напрям градієнта функції $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точці $M_0(0,1,2)$. (Відповідь: $\left| grad\, u\big|_{M_0} \right| = 6$, $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$).

Лекція №10. Екстремум функції двох змінних.

Екстремум функції двох змінних, його необхідні та достатні умови. Умовний екстремум.

10.1. Екстремум функції двох змінних, його необхідні та достатні умови.

Якщо існує окіл точки $M_0(x_0, y_0)$ в області визначення функції $f(x, y)$ і для всіх відмінних від M_0 точок $M(x, y)$ цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$), то точку M_0 називають точкою локального максимуму (мінімуму) функції. Точки максимуму та мінімуму називають точками екстремуму, число $f(M_0)$ – локальний екстремум (максимум або мінімум).

Теорема 1 (необхідні умови екстремуму).

Якщо функція $f(x, y)$ має в точці (x_0, y_0) локальний екстремум, то в цій точці її частинні похідні першого порядку по змінних x та y дорівнюють нулю або не існують.

Точку, в якій частинні похідні першого порядку функції $f(x, y)$ обертаються в нуль, називають стаціонарною. Стаціонарні точки та точки, в яких частинні похідні f'_x, f'_y не існують, називають критичними.

Зауваження. Не кожна критична точка є точкою екстремуму.

В задачах з практичним змістом, як правило, відомо, що функція має екстремум. Якщо така функція має лише одну критичну точку, то ця точка і буде точкою екстремуму.

Приклад. Відкритий прямокутний басейн має об'єм V. Знайти розміри басейну, за яких на його облицювання піде найменша кількість матеріалу.

Розв'язання. Якщо x, y, z – довжина, ширина, висота басейну відповідно, то $V = xyz$ і $z = \frac{V}{xy}$. Кількість матеріалу, необхідного на облицювання, обчислюється так: $S = xy + 2xz + 2yz$ або

$S = S(x,y) = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$. Знайдемо мінімум функції S при $x, y > 0$. Для цього відшукуємо стаціонарні точки: $S'_x = y - \frac{2V}{x^2}$, $S'_y = x - \frac{2V}{y^2}$; $\begin{cases} y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$; $x = y = \sqrt[3]{2V}$.

Отже, маємо тільки одну стаціонарну точку $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$, яка і є точкою мінімуму, оскільки мінімум функції S існує.

Таким чином, басейн повинен мати висоту $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ і квадратну основу із стороною $x = y = \sqrt[3]{2V}$.

Теорема 2 (достатні умови екстремуму).

Нехай в деякому околі стаціонарної точки $M(x_0, y_0)$ функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Якщо $\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 > 0$, то функція $f(x,y)$ має в цій точці екстремум, причому максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$. Якщо ж $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то ця функція екстремуму в точці M не має.

Зауваження. Так звані другі достатні умови екстремуму формулюються так: функція $f(x,y)$ має мінімум в стаціонарній точці M, якщо диференціал другого порядку в цій точці $d^2 f(M) > 0$ і максимум – якщо $d^2 f(M) < 0$. Вказані достатні умови справедливі для функції довільного числа змінних.

Зазначені теореми 1 і 2 визначають правило дослідження диференційовних функцій двох змінних на екстремум. Отже, щоб знайти екстремум диференційовної функції $z = f(x,y)$, необхідно:

1) знайти стаціонарні точки функції із системи рівнянь: $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) = 0; \end{cases}$.

2) у кожній стаціонарній точці $(x_0 y_0)$ обчислити вираз $\Delta(x_0 y_0)$; якщо $\Delta(x_0, y_0) > 0$, то $(x_0 y_0)$ – точка екстремуму, причому максимуму при

$f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімуму при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, якщо ж $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то $(x_0 y_0)$ не є точкою екстремуму функції;

3) обчислити значення функції в точках екстремуму;
4) у разі коли $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то ніякого висновку про характер стаціонарної точки зробити не можна і потрібне додаткове дослідження.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

Розв’язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку $z'_x = 2x - y + 3$, $z'_y = -x + 2y - 2$. Стаціонарну точку $M\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ відшукуємо із системи рівнянь $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$. Далі обчислюємо частині похідні другого порядку $z''_{xx} = 2$, $z''_{yy} = 2$, $z''_{xy} = -1$ та величину $\Delta\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$. Отже, в точці M маємо екстремум, причому мінімум, оскільки $z''_{xx} = 2 > 0$. Дістанемо

$$z_{\min} = f\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \left(-\frac{4}{3}\right)\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{4}{3}\right) - 2\frac{1}{3} + 1 = -\frac{4}{3}.$$

Неперервна функція $f(x, y)$ в замкненій і обмеженій області D досягає найбільшого і найменшого значень. Оскільки у внутрішніх точках області диференційовна функція може набувати цих значень лише в точках локального екстремуму, то потрібно знайти всі стаціонарні точки, які належать області, із системи рівнянь $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ та обчислити значення функції в цих точках. Далі досліджують функцію на екстремум на межі області D. Використовуючи рівняння межі, цю задачу зводять до знаходження абсолютного екстремуму функції однієї змінної. Серед здобутих таким значень функції всередині і на межі області вибирають найбільше і найменше значення. Загального метода знаходження найбільшого та найменшого значень для довільної неперервної функції в замкненій та обмеженій області не має.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y(2 - x - y)$ в замкненій області D, обмеженій прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Розв'язання. Маємо частинні похідні $z'_x = xy(4 - 3x - 2y)$, $z'_y = x^2(2 - x - 2y)$. Оскільки всередині трикутника OAB (рис. 10.1) $x, y \neq 0$, то із системи рівнянь $3x + 2y = 4$, $x + 2y = 2$ дістанемо стаціонарну точку $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$ в області D, $z(M) = \frac{1}{4}$.

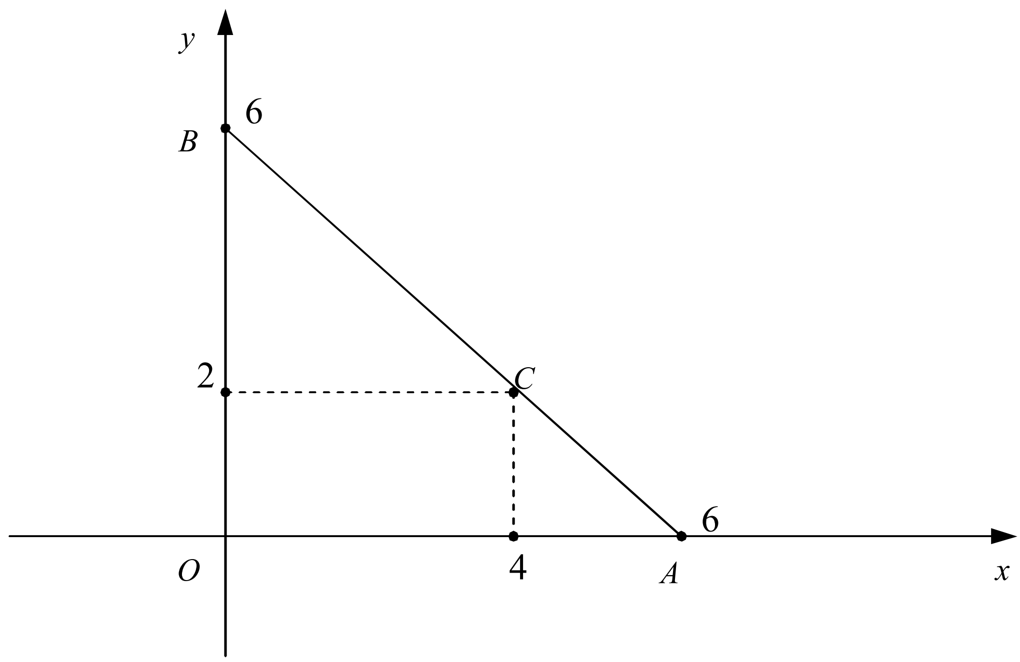


Рис. 10.1

Рівнянням сторін OB і OA є $x = 0$, $y = 0$, тому значення функції $z = 0$ в усіх точках відрізків OB та OA, зокрема $z(O) = z(A) = z(B) = 0$. Знайдемо стаціонарні точки на стороні AB трикутника. Рівняння цієї сторони $y = 6 - x$, тому $z = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x)$, $0 \le x \le 6$. Далі маємо $z'_x = -48x + 12x^2 = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Оскільки $y = 6 - x$, то $y_1 = 6$, $y_2 = 2$. Знайшли точки $B(0,6)$ і $C(4,2)$, і обчислюємо значення $z(C) = -128$.

Порівнюючи значення функції в точках A, B, C, O, M, знаходимо найбільше і найменше значення: $\max\limits_{(x,y)\in D} z = \frac{1}{4}$, $\min\limits_{(x,y)\in D} z = -128$.

10.2. Умовний екстремум.

Нехай в області D задано функцію $z = f(x, y)$ і лінію L, яка визначається цим рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ та лежить в цій області.

Задача полягає в тому, щоб на цій ліній знайти точку $M(x, y)$, в якій значення функції $f(x, y)$ є найбільшим або найменшим порівняно із іншими значеннями цієї функції в точках лінії L. Такі точки M називають точками умовного екстремуму функції $f(x, y)$ на лінії L. На відміну від звичайного екстремуму значення функції в точці умовного екстремуму порівнюється із значеннями цієї функції не в усіх точках області D чи околу точки M, а лише в точка, які лежать на лінії L. Назву „умовний екстремум” пов’язують з тим фактом, що змінні x та y мають додаткову умову $\varphi(x, y) = 0$, яка називається рівнянням зв’язку.

Якщо рівняння зв’язку можна розв’язати відносно однієї змінної, наприклад y: $y = \psi(x)$, то підставляючи замість y його значення $\psi(x)$ у функцію $z = f(x, y)$, дістанемо функцію однієї змінної $z = f(x, \psi(x))$ і, таким чином, додаткова умова врахована. Отже, задача знаходження умовного екстремуму звелась до задачі на звичайний екстремум функції однієї змінної. Але не завжди можна розв’язати рівняння зв’язку відносно x чи y і тоді поставлену задачу розв’язують інакше.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, де $y = \psi(x)$, як складену функцію. З необхідної умови екстремуму випливає, що в точках екстремуму: $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$.

Тут $\frac{dy}{dx}$ означає похідну неявної функції y, заданої рівнянням зв’язку: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$, $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = 0$, $\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y}$. Останнє відношення позначимо через $-\lambda$

($\lambda \neq 0$ і знак мінус взято для зручності). Тоді в точці умовного екстремуму виконуються умови: $\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = -\lambda$ або $f'_x + \lambda\varphi'_x = 0$ і $f'_y + \lambda\varphi'_y = 0$. Отже, стаціонарні точки умовного екстремуму мають задовольняти систему рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \end{cases} \tag{10.1}$$

і знаходження умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ звелась до знаходження звичайного екстремуму функції $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, яка називається функцією Лагранжа, а число λ тут – множником Лагранжа.

Умови (10.1) є необхідними і дають змогу знайти лише стаціонарні точки умовного екстремуму. Характер же умовного екстремуму можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа: якщо в стаціонарній точці $d^2F > 0$ (або $d^2F < 0$), то ця точка є точкою локального мінімуму (або максимуму).

Приклад. Знайти найбільше значення функції $z = xy$, якщо x та y додатні і задовольняють рівняння зв'язку $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Розв'язання. Складаємо функцію Лагранжа $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right)$ та систему рівнянь (див. (10.1)).

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1, \\ y + \lambda \dfrac{x}{4} = 0, \\ x + \lambda y = 0, \\ x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Звідси маємо $x = 2$, $y = 1$, $\lambda = -2$, тобто одну стаціонарну точку $M(2,1,-2)$. Знайдемо другий диференціал функції Лагранжа при $\lambda = -2$. Оскільки $d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial F}{\partial x}d^2x + \frac{\partial F}{\partial y}d^2y$, то маємо

$$d^2F = -\frac{1}{2}dx^2 + 2dxdy - 2dy^2 + \left(y - \frac{x}{2}\right)d^2x + (x - 2y)d^2y.$$

Знайшовши рівняння зв'язку $dy(2,1) = -\frac{1}{2}dx$, дістанемо $d^2F(M) = -\frac{1}{2}dx^2 + 2dx\left(-\frac{1}{2}dx\right) - 2dy^2 = -2dx^2 < 0$. Отже, точка $(2,1)$ є точкою умовного максимуму функції $z = xy$ і при цьому $z_{\max} = 2$.

Зазначимо, що цей результат можна дістати, якщо розглянути функцію $z = x\sqrt{2 - \frac{x^2}{4}}$ на звичайний екстремум.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається точкою локального екстремуму?
2. В чому полягають необхідні умови екстремуму?
3. Сформулювати достатні умови екстремуму функції двох змінних.
4. Дати означення умовного екстремуму.
5. В чому полягає спосіб знаходження умовного екстремуму?
6. У якому випадку задачу на умовний екстремум можна звести до задачі на звичайний екстремум?
7. Знайти екстремум функції $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. (Відповідь: $z_{\min} = z(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = z(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$).
8. Знайти екстремум функції $z = x^3y^2(1 - x - y)$. (Відповідь: $z_{\max} = z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{432}$).
9. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4x - 8y + 1$. (Відповідь: екстремуму в точці $(3,-1)$ не має).

10. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x + y$ в крузі $x^2 + y^2 \le 1$. (Відповідь: $M = \sqrt{2}$, $m = -\sqrt{2}$).
11. Знайти умовний екстремум функції $z = xy$, якщо $y = 3 - x^2$. (Відповідь: $z_{\max} = 2$, $z_{\min} = -2$).
12. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = xy + x + y$ у квадраті, обмеженому прямими $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 3$. (Відповідь: $M = 11$, $m = 5$).

Лекція №11. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування.

Невизначений інтеграл, його властивості. Безпосереднє інтегрування. Метод заміни змінної. Інтегрування частинами.

11.1. Невизначений інтеграл, його властивості.

Інтеграл – одне з важливих понять математики, яке виникло у зв'язку з двома основними задачами: про відновлення функції по її похідній та про обчислення площі криволінійної трапеції. Вказані задачі при водять до двох тісно пов'язаних між собою видів інтегралів: невизначеного і визначеного.

Основною задачею диференціального числення є знаходження похідної функції. Природною є і обернена задача – знаходження функції за відомою її похідною, яка розв'язується за допомогою невизначеного інтеграла.

Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на проміжку (a,b), якщо $F'(x)=f(x)$, $x\in(a,b)$.

Зазначимо, що задача знаходження первісної розв'язується неоднозначно.

Приклад. Функція $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ є первісною функції $f(x)=x^2$, і, взагалі, первісними будуть функції $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C$, де C – довільна стала, оскільки

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)^2=x^2=f(x).$$

Теорема. Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку (a,b), то будь-яка інша первісна функції $f(x)$ на цьому проміжку має вигляд $F(x)+C$.

Доведення. Нехай $\Phi(x)$ – деяка інша, крім $F(x)$, первісна функція $f(x)$ на проміжку (a,b). Тоді маємо $(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$. Це означає, що $\Phi(x)-F(x)=C$ або $\Phi(x)=F(x)+C$.

Із вказаної теореми випливає, що множина функцій $F(x)+C$ визначає всю сукупність первісних функції $f(x)$.

Вираз $F(x)+C$ називається невизначеним інтегралом функції $f(x)$ на проміжку (a,b) і позначається символом $\int f(x)dx$. Тут знак $\int$ – інтеграл, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, $f(x)$ – підінтегральна функція, x – змінна інтегрування. Отже, за означенням, маємо $\int f(x)dx = F(x)+C$, якщо $F'(x)=f(x)$, $x \in (a,b)$.

Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають інтегруванням цієї функції.

Властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C) = F'(x) = f(x)$.

2. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$.

3. $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$.

4. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.

5. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Інваріантність формули інтегрування полягає в тому, що із справедливості $\int f(x)dx = F(x)+C$ випливає справедливість $\int f(u)du = F(u)+C$, де $u=\varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну.

Приклад. Оскільки $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}+C$, то, користуючись інваріантністю формули інтегрування, одержимо $\int u^2 du = \frac{u^3}{3}+C$ і тоді $\int \sin^2 x d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3}+C$ тобто $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3}+C$ або $\int \ln^2 x d\ln x = \frac{\ln^3 x}{3}+C$ тобто $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \frac{\ln^3 x}{3}+C$.

11.2. Безпосереднє інтегрування.

Метод безпосереднього інтегрування – обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів:

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq 1$.

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.

3. $\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$.

4. $\int \sin u du = -\cos u + C$.

5. $\int \cos u du = \sin u + C$.

6. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$.

7. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = ctgu + C$.

8. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$.

9. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C$.

10. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$.

11. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

Тут $u = u(x)$ – довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну.

Приклад. $\int ctg^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = C - ctgx - x$.

11.3. Метод заміни змінної.

Метод заміни або метод підстановки полягає у введенні нової змінної інтегрування і ґрунтується на наступній теоремі.

Теорема. Нехай $\int f(x)dx = F(x) + C$, $x \in (a,b)$ і нехай функція $x = \varphi(t)$ диференційовна на проміжку (α, β), а її значення заповнюють проміжок (a,b). Тоді справджується формула $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$, $t \in (\alpha, \beta)$.

Доведення. Згідно з правилом диференціювання складеної функції маємо $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ і за першою властивістю невизначеного інтеграла дістаємо формулу теореми.

Вказана теорема застосовується, як правило, одним із двох способів.

Інтеграл записують у вигляді $\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \begin{vmatrix} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)dx \end{vmatrix} =$

$= \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C$.

Отже, виконана підстановка $u = \varphi(x)$ і йдеться про „введення функції” під знак диференціала: $\varphi'(x)dx = d\varphi(x) = du$.

Іноді інтеграл зображують таким чином:

$\int g(x)dx = \int g(\psi(t))\psi'(t)dt = G(t) + C = G(\psi^{-1}(x)) + C$.

Тут $x = \psi(t)$, $t = \psi^{-1}(x)$ – взаємообернені функції і для функції $g(\psi)\psi^{-1}$ відома первісна G та виконана підстановка $x = \psi(t)$ і йдеться про „виведення функції” з-під знака диференціала: $dx = d\psi(t) = \psi'(t)dt$.

Зазначимо, що після обчислення невизначеного інтеграла методом підстановки потрібно від введеної змінної інтегрування перейти до заданої.

Зауважимо також, що загального методу підбору підстановок не існує.

Підстановки підбираються таким чином, щоб одержані після перетворення нові інтеграли були табличними або зводились до відомих.

Приклад. $\int \frac{(2\ln x + 3)^3 dx}{x} = \left| \begin{array}{l} u = 2\ln x + 3 \\ du = \frac{2dx}{x} \\ \frac{du}{2} = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{8}u^4 + C = \frac{1}{8}(2\ln x + 3)^4 + C$.

11.4. Інтегрування частинами.

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді маємо: $d(uv) = udv + vdu$, $udv = d(uv) - vdu$.

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, дістанемо $\int udv = \int d(uv) - \int vdu$ або $\int udv = uv - \int vdu$. (11.1)

Формула (11.1) дає змогу звести обчислення інтеграла $\int udv$ до обчислення інтеграла $\int vdu$ і називається формулою інтегрування частинами. Тут потрібно подати підінтегральний вираз через u і dv так, щоб інтеграл $\int vdu$ простішим за інтеграл $\int udv$.

Зазначимо, що під час знаходження функції v за диференціалом dv вважають, що стала $C = 0$, оскільки на кінцевий результат ця стала не впливає. Справді, маємо $\int ud(v + C) = u(v + C) - \int (v + C)du$, $\int udv = uv + uc - \int vdu - cu$, $\int udv = uv - \int vdu$.

Зауважимо, що формулу (11.1) іноді доводиться застосовувати кілька разів.

Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами:

1) інтеграли виду $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$ – многочлен, k – дійсне число і у цих інтегралах за u беруть множник $P(x)$, а за dv – вираз, що залишився;

2) інтеграли виду $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x) arctgxdx$, $\int P(x) arcctgxdx$, в яких слід взяти $dv = P(x)dx$;

3) інтеграли виду $\int e^{kx}\sin\beta x dx$, $\int e^{kx}\cos\beta x dx$, де α, β – дійсні числа і після двократного застосування формули (11.1) утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла; розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

Приклад. $\int(2x+1)\sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x+1, du = 2dx \\ dv = \sin x dx \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = -(2x+1)\cos x - \int(-\cos x)2dx =$

$= -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C = C - (2x+1)\cos x + 2\sin x$.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається первісною даної функції?
2. Сформулювати теорему про загальний вигляд первісної даної функції.
3. Що називається невизначеним інтегралом?
4. Які є основні властивості невизначеного інтегралу?
5. У чому суть інваріантності формули інтегрування?
6. Написати і перевірити диференціюванням таблицю інтегралів.
7. У чому полягає метод безпосереднього інтегрування?
8. Як інтегрують заміною змінної?
9. Записати формулу інтегрування частинами.
10. Які інтеграли обчислюють методом інтегрування частинами?

Знайти інтеграли:

11. $\int \frac{\sqrt[3]{3+5ctgx}}{\sin^2 x}dx$. (Відповідь: $-\frac{3}{20}(3+5ctgx)^{\frac{4}{3}} + C$).

12. $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}dx}{e^x - 1}$. (Відповідь: $\ln\left|\frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{e^{\frac{x}{2}} + 1}\right| + C$).

13. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$. (Відповідь: $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$).

14. $\int\left(2x + \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$. (Відповідь: $x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$).

15. $\int \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} \right)^2 dx$. (Відповідь: $x - \cos x + C$).

16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$. (Відповідь: $tgx - ctgx + C$).

17. $\int x^3 \ln x dx$. (Відповідь: $\frac{1}{4}x^4 \ln|x| - \frac{1}{16}x^4 + C$).

18. $\int e^x \sin 2x dx$. (Відповідь: $\frac{1}{5}e^x (\sin 2x - 2\cos 2x) + C$).

19. $\int e^{\sqrt{x}} dx$. (Відповідь: $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + C$).

20. $\int \left(x^2 + 3x + 5\right)^{10} (2x + 3) dx$. (Відповідь: $\frac{\left(x^2 + 3x + 5\right)^{11}}{11} + C$).

Лекція №12. Інтегрування раціональних, ірраціональних і трансцендентних функцій.

Комплексні числа. Раціональні функції та їх інтегрування. Інтегрування деяких ірраціональних і трансцендентних функцій.

12.1. Комплексні числа.

Комплексним числом називається вираз $z = a + bi$, де a, b – дійсні числа, i – уявна одиниця, визначена умовою $i^2 = -1$. Вказаний вираз є алгебраїчною формою запису комплексного числа. Тут $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ – відповідно дійсна та уявна частини комплексного числа.

Числа $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ називаються спряженими. Два числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ вважають рівними і записують $z_1 = z_2$, якщо $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Комплексне число можна зобразити точкою $M(a,b)$ на координатній площині, яка називається комплексною площиною, причому вісь OX – дійсна вісь і OY – уявна.

Якщо в записі $z = a + bi$ маємо $b = 0$, то комплексне число збігається з дійсним числом a. Отже, дійсні числа – окремий випадок комплексних. Якщо ж $a = 0$, то число $z = bi$ називається суто уявним і зображується на комплексній осі OY.

Арифметичні дії над комплексними числами в алгебраїчній формі визначаються такими рівностями:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i,$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i,$$

тобто виконуються за звичайними правилами дії над двочленами, враховуючи $i^2 = -1$.

Приклад. $(2 + 3i)^3 = 8 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i$.

12.2. Раціональні функції та їх інтегрування.

Многочленом (поліномом або цілою раціональною функцією) називається функція $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, де натуральне n – степінь многочлена; a_0, a_1, ..., a_n – його коефіцієнти (дійсні або комплексні). Розглядатимемо лише многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Коренем многочлена називається числове значення змінної $x = x_1$ (дійсне або комплексне) , при якому маємо $P_n(x_1) = 0$.

Теорема (основна теорема алгебри).

Всякий многочлен степеня $n > 0$ має хоча б один корінь, дійсний або комплексний.

Зазначимо тут, що будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами можна розкласти на лінійні та квадратні (з комплексними коренями) множники з дійсними коефіцієнтами.

Відношення двох многочленів $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ не тотожні нулі, називається раціональною функцією або раціональним дробом. Раціональний дріб називається правильним, якщо $m < n$; якщо ж $m \geq n$, то дріб називається неправильним.

Якщо дріб неправильний, то, виконавши ділення, можна записати $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W_k(x) + \dfrac{R_p(x)}{Q_n(x)}$, де $p < n$.

Елементарними раціональними дробами називають такі дроби: $\dfrac{A}{x-a}$, $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, де A, a, M, N, p, q – дійсні числа, $p^2 - 4q < 0$, $n = 2,3\ldots$.

Нехай знаменник правильного дробу розкладено на множники $Q_n(x) = a_0(x-a)^\alpha \ldots (x-b)^\beta \left(x^2+px+q\right)^\mu \ldots \left(x^2+lx+s\right)^\lambda$, тоді цей дріб можна розкласти на елементарні дроби:

$$\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{M_\mu x+N_\mu}{\left(x^2+px+q\right)^\mu}+\ldots+$$
$$+\frac{L_1x+F_1}{x^2+lx+s}+\ldots+\frac{L_\lambda x+F_\lambda}{\left(x^2+lx+s\right)^\lambda}, \qquad (12.1)$$

де $A_1,\ldots,A_\alpha,\ldots,B_1,\ldots,B_\beta,M_1,N_1,\ldots,M_\mu,N_\mu,\ldots,L_1,F_1,\ldots,L_\lambda,F_\lambda$ – деякі дійсні числа (невідомі або невизначені коефіцієнти).

Для знаходження чисел $A_1,\ldots,F_\lambda$ можна скористатись методом невизначених коефіцієнтів, який полягає в наступному. Помноживши обидві частини рівності (12.1) на $Q_n(x)$, дістанемо два тотожно рівні многочлени: відомий многочлен $R_p(x)$ і многочлен з невідомими коефіцієнтами. Порівнюючи їх коефіцієнти при однакових степенях x дістанемо систему лінійних рівнянь, з якої визначимо невідомі $A_1,\ldots,F_\lambda$.

Крім вказаного методі, застосовують ще метод окремих значень аргументу, за яким, після отримання двох тотожно рівних многочленів, надають змінній конкретних значень стільки разів, скільки невідомих коефіцієнтів (доцільно надавати саме значення дійсних коренів знаменника $Q_n(x)$) і дістають систему лінійних рівнянь, з якої відшукують невідомі коефіцієнти.

Іноді користуються комбінованим методом, який поєднує два вище зазначених.

Вище вказану інформацію використовують при інтегруванні раціональних функцій, які складають важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції.

Отже, в правій частині запису маємо: $\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx=\int W_k(x)dx+\int\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}dx$ інтеграл від многочлена знаходять безпосередньо, а інтеграл від правильного дробу за допомогою формули (12.1) зводять до інтегралів від елементарних дробів, які інтегруються таким чином:

1. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$;

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$;

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ обчислюється підстановкою $x = t - \frac{p}{2}$;

4. $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$ підстановкою $x = t - \frac{p}{2}$ зводиться до двох інтегралів, один з яких обчислюється безпосередньо, а інший – за допомогою інтегрування частинами.

Зазначимо, що інтеграл $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ обчислюється підстановкою $x = t - \frac{b}{2a}$, оскільки $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^3+x}$.

Розв’язання. Оскільки під знаком інтеграла маємо правильний дріб, то його можна розкласти на елементарні дроби.

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+1} = \frac{A\left(x^2+1\right)+(Bx+c)x}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x^3+x},$$

$$1 = (A+B)x^2 + Cx + A.$$

Скористаємось комбінованим методом знаходження невідомих коефіцієнтів A, B, C.

Якщо $x=0$, то $1 = (A+B)\cdot 0^2 + C\cdot 0 + A$ або $A=1$. Оскільки $0x^2+0x+1 = (A+B)x^2+Cx+A$, то маємо $A+B=0$ і $C=0$ або $B=-1$ і $C=0$. Далі дістанемо $\int \frac{dx}{x^3+x} = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int\frac{dx}{x} - \int\frac{xdx}{x^2+1} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$.

12.3. інтегрування деяких ірраціональних і трансцендентних функцій.

Інтеграли від ірраціональних та трансцендентних функцій не завжди обчислюються в елементарних функціях. Розглянемо лише деякі типи таких інтегралів, які за допомогою певних підстановок зводяться до інтегралів від раціональних функцій (раціоналізуються).

Інтеграли виду $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ раціоналізується підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n},\ldots,\frac{r}{s}$ і R – раціональна функція від $x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}$.

Приклад. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\left|\begin{array}{l}x=t^2\\ dx=2tdt\\ t=\sqrt{x}\end{array}\right|=\int\frac{2tdt}{t+1}=2\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t+1}=2t-$
$-\ln|t+1|+C=2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$.

Інтеграли виду $\int R(\sin x,\cos x)dx$ раціоналізуються універсальною підстановкою $t=tg\frac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$. Тут маємо $\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$,

$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x=2arctgt$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Отже,

$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt=\int R_1(t)dt$, де R_1 – раціональна функція від t.

Зауваження. На практиці замість вказаної підстановки інколи доцільно виконувати інші підстановки. Наведемо деякі з них.

Інтеграли $\int R(\sin x)\cos xdx$, $\int R(\cos x)\sin xdx$, $\int R(tgx)dx$ раціоналізується відповідно підстановками $\sin x=t$, $\cos x=t$, $tgx=t$.

Якщо $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ або $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, або $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$ раціоналізується відповідно підстановкою $\cos x=t$ або $\sin x=t$, або $tgx=t$.

У разі коли маємо інтеграл $\int\sin^m x\cos^n xdx$, то його знаходять підстановкою $\sin x=t$ при непарному натуральному n і підстановкою $\cos x=t$

при непарному натуральному m, а також за допомогою формул зниження степеня $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ при парних натуральних n і m.

Приклади. 1. $$\int \frac{dx}{\sin x + 1} = \left| \begin{aligned} & t = tg\frac{x}{2} \\ & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{aligned} \right| = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{2t}{1+t^2}+1\right)} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{2}{t+1} +$$

$$+C = C - \frac{2}{1+tg\frac{x}{2}}.$$

2. $$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx = \left| \begin{aligned} & \sin x = t \\ & \cos x dx = dt \end{aligned} \right| = \int t^2\left(1-t^2\right)dt =$$

$$= \int \left(t^2 - t^4\right)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Інтеграл виду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ за допомогою підстановки $x = t - \frac{b}{2a}$ зводиться до одного з таких інтегралів $\int R\left(x, \sqrt{t^2+m^2}\right)dt$, $\int R\left(x, \sqrt{t^2-m^2}\right)dt$, $\int R\left(x, \sqrt{m^2-t^2}\right)dt$, які в свою чергу зводяться до інтегралу $\int R(\sin z, \cos z)dz$, використовуючи відповідно підстановки $t = mtgz$ ($t = mctgz$), $t = \frac{m}{\sin z}$ ($t = \frac{m}{\cos z}$), $t = m\sin z$ ($t = m\cos z$).

Приклад. $$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = \left| \begin{aligned} & x = \sin z \\ & dx = \cos z dz \end{aligned} \right| = \int \frac{\cos z dz}{\cos^2 z} = tgz + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Зауваження. Існують елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. До таких інтегралів належить інтеграл Пуассона $\int e^{-x^2}dx$, інтеграли Френзеля $\int \cos^2 x dx$ і $\int \sin^2 x dx$ та ряд інших інтегралів. Але інтеграл, який не обчислюється в класі елементарних функцій, може виявитися таким, що обчислюється в розширеному класі функцій.

Завдання до самоконтролю

1. Що називається комплексним числом?
2. Як визначаються дії над комплексними числами в алгебраїчній формі?
3. Що називається многочленом?
4. Сформулювати основну теорему алгебри.
5. Записати розклад многочлена на лінійні та квадратні множники з дійсними коефіцієнтами?
6. Що називається раціональною функцією?
7. Який раціональний дріб називається правильним?
8. Які раціональні дроби називають елементарними?
9. Записати розклад правильного раціонального дробу на елементарні дроби.
10. Як інтегруються елементарні дроби?
11. В чому полягає метод інтегрування раціонального дробу?
12. Як раціоналізується дріб $\int R(\sin x, \cos x)dx$?
13. Як обчислюються інтеграли $\int \sin^m x \cos^n x dx$?

Знайти інтеграли:

14. $\int \frac{x^3 dx}{x^2 - 4}$. (Відповідь: $\frac{x^2}{2} + 2\ln\left|x^2 - 4\right| + C$).

15. $\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$. (Відповідь: $\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$).

16. $\int \frac{dx}{x\left(x^2 + 2\right)}$. (Відповідь: $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2 + 2} + C$).

17. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3x - \sqrt[3]{x^2}}$. (Відповідь: $\frac{2}{3}\left(\sqrt{x} + \sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\sqrt[6]{27x}\right) + C$).

18. $\int \cos^3 x \sin x dx$. (Відповідь: $C - \frac{\cos^4 x}{4}$).

19. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx$. (Відповідь: $\frac{1}{7\cos^7 x} - \frac{1}{5\cos^5 x} + C$).

20. $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$. (Відповідь: $\frac{1}{\cos x} - tgx + x + C$).

21. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$. (Відповідь: $C - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x$).

22. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$. (Відповідь: $C - \frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}$).

Лекція №13. Визначений інтеграл.

Визначений інтеграл, його властивості. Методи обчислення визначених інтегралів. Застосування визначеного інтеграла.

13.1. Визначений інтеграл, його властивості.

До поняття визначеного інтеграла приводять ряд задач науки і техніки.

Нехай функція $y = f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$.

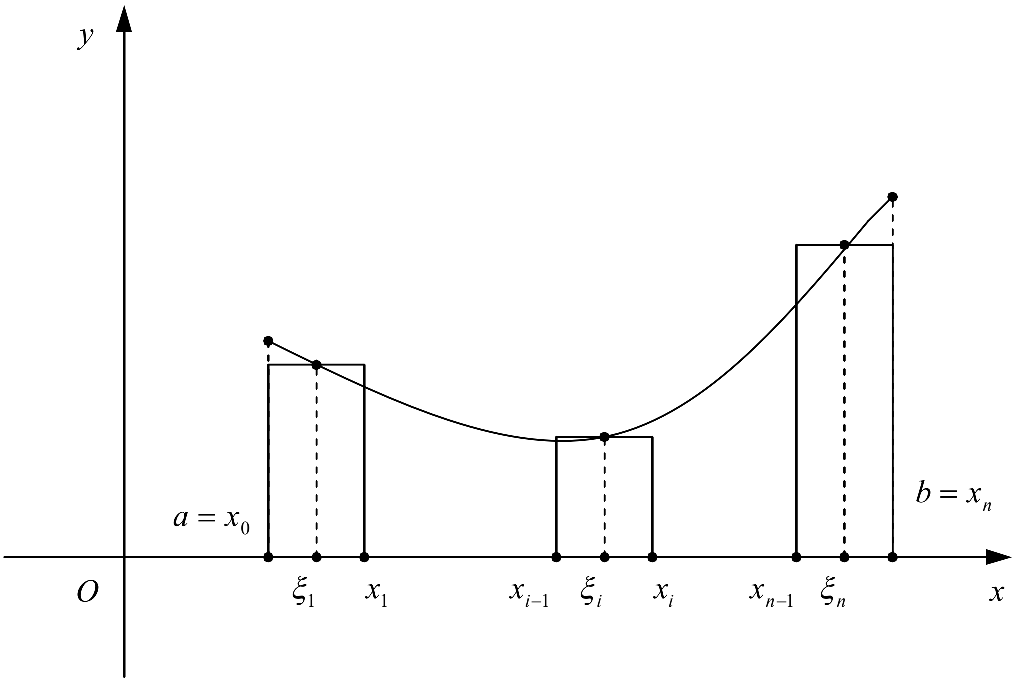


Рис. 13.1

Розіб'ємо відрізок на n частин довільно точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. На кожному частинному відрізку візьмемо довільно точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$. Побудуємо суму:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ , \qquad (13.1)$$

яка називається інтегральною. Тут $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – довжина відрізка $[x_{i-1}, x_i]$.

Геометричний зміст інтегральної суми: якщо $f(x) \geq 0$, то число σ_n дорівнює площі ступінчатої фігури (рис. 13.1), тобто сумі площ n прямокутників з основами Δx_i і висотами $f(\xi_i)$.

Нехай $\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$. Тоді якщо існує скінченна границя інтегральної суми (13.1) при $\lambda \to 0$, яка не залежить від розбиття відрізка і вибору точок ξ_i, то ця границя називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається та записується так: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Функція $f(x)$ називається інтегрованою на відрізку $[a,b]$; числа a і b називаються відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування, $[a,b]$ – проміжком інтегрування.

Геометричний зміст визначеного інтеграла: визначений інтеграл від невід'ємної функції чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, тобто: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Оскільки неперервні функції на відрізку є інтегровними, то саме такі функції розглядатимуться надалі.

Основні властивості визначеного інтеграла є такими:

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$;

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (адитивність);

5. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$;

6. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

7. Якщо $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$;

8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$;

9. Для неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ знайдеться така точка $c \in [a,b]$, що $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Доведемо останню властивість, яка називається також теоремою про середнє значення функції. Дійсно неперервна на відрізку функція $f(x)$ досягає найбільшого M і найменшого m значень. Тоді з властивості 7 маємо $\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx$ або $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. Звідки дістанемо $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$. До того ж неперервна функція $f(x)$ набуває всі проміжні значення відрізка $[m, M]$. Отже, існує точка $c \in [a,b]$ така, що $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

13.2. Методи обчислення визначених інтегралів.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, отже, вона інтегровна на будь-якому відрізку $[a,x] \subset [a,b]$, тобто для довільного $x \in [a,b]$ існує

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad (13.2)$$

який називається інтегралом зі змінною верхньою межею. Виявляється, що для функції $\Phi(x)$ справджується така властивість: $\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$.

Справді, надамо аргументу x функції $\Phi(x)$ приросту Δx і дістанемо, враховуючи адитивність інтеграла, $\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ або $\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$. Тепер за теоремою про середнє значення функції знаходимо $\Delta\Phi = f(c)(x+\Delta x - x) = f(c)\Delta x$, де $c \in [x, x+\Delta x]$. Отже, якщо $\Delta x \to 0$, то $x + \Delta x \to x$ і $c \to x$, тому з неперервності функції $f(x)$ маємо $\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim\limits_{c \to x} f(c) = f(x)$.

З вказаної властивості випливає важливий наслідок: для кожної неперервної функції на відрізку існують первісні, однією з яких є функція $\Phi(x)$ (13.2).

Зазначимо, що встановлений факт характеризує глибокий зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами і дає зручний спосіб обчислення визначеного інтеграла, який ґрунтується на формулі Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{13.3}$$

де $F(x)$ – яка-небудь первісна неперервної функції $f(x)$ на $[a,b]$.

Доведення. Дійсно нехай $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$. Оскільки $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ – також її первісна, то $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$. Поклавши $x = a$, за властивістю 2 визначеного дістанемо $\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0$, тобто $C = -F(a)$. Отже, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ і при $x = b$ маємо формулу (13.3).

При обчисленні визначеного інтеграла використовують також і методи заміни змінної та інтегрування частинами.

Теорема 1. Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $\varphi'(x)$ неперервні на $[\alpha, \beta]$, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $a < \varphi(t) < b$ при $t \in (\alpha, \beta)$. Тоді справджується рівність $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Доведення. Оскільки $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то вона має первісну $F(x)$, $x \in [a,b]$. З теореми про заміні змінної в невизначеному інтегралі випливає, що функція $F(\varphi(t))$ буде первісною функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. За формулою Ньютона-Лейбніца маємо $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Зауваження. На відміну від невизначеного інтеграла у визначеному інтегралі при обчисленні методом заміни змінної не потрібно переходити від введеної змінної до заданої, а досить лише змінити межі інтегрування. Якщо використана підстановка $x=\varphi(t)$, то нижня α і верхня β межі відшукуються відповідно з рівнянь $a=\varphi(t)$ і $b=\varphi(t)$. Якщо ж маємо підстановку $t=\psi(x)$, то нові межі інтегрування визначаються безпосередньо: $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$.

Теорема 2. Якщо функції $u=u(x)$, $v=v(x)$ мають на $[a,b]$ неперервні похідні, то справедлива формула $\int\limits_a^b udv = uv\big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

Доведення. Оскільки функція uv є первісною функції $(uv)' = u'v+uv'$, то за формулою Ньютона-Лейбніца дістанемо $\int\limits_a^b (u'v+uv')dx = uv\big|_a^b$ або $\int\limits_a^b uv'dx + \int\limits_a^b vu'dx = uv\big|_a^b$ і $\int\limits_a^b udv = uv\big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

Приклад 1. Функція маргінальних витрат має вигляд $v'(x)=23{,}5-0{,}01x$. Знайти, на скільки зростуть витрати, коли виробництво зросте з 1000 до 1500 одиниць продукції.

Розв'язання. Скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца дістанемо приріст функції витрат: $v(1500)-v(1000)=\int\limits_{1000}^{1500}(23{,}5-0{,}01x)dx = (23{,}5-0{,}01x)\big|_{1000}^{1500} =$ $= 23{,}5\cdot 1500 - 0{,}005\cdot(1500)^2 - 23{,}5\cdot 1000 + 0{,}005\cdot(1000)^2 = 5500$. Отже, витрати зростуть на 5500 грн.

Приклад 2. $$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x=\sin t & x=0 => \sin t=0 => t=0 \\ dx=\cos tdt & x=1 => \sin t=1 => t=\dfrac{\pi}{2} \\ \sqrt{1-x^2}=\cos t & \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2tdt = \frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi - \frac{1}{4}\sin 0 = \frac{\pi}{4}.$$

13.3. Застосування визначеного інтеграла.

Визначений інтеграл має важливе і широке застосування в науці і техніці. Розглянемо лише деякі застосування до розв’язання геометричних та економічних задач.

Так визначений інтеграл, вже виходячи з його геометричного змісту, можна застосовувати для обчислення площі криволінійних трапецій. У загальному випадку, коли неперервна на $[a,b]$ функція $f(x)$ змінює знак скінченне число разів, формула для обчислення площі відповідної плоскої фігури набуває вигляду $S=\int_a^b |f(x)|dx$.

Якщо фігура обмежена кривими $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, та прямими $x=a$, $x=b$, то, за умови $f_2(x)\geq f_1(x)$, її площу можна знайти за формулою $S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$.

У разі, коли на $[a,b]$ функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)$ неперервні, то довжина дуги кривої $f(x)$ обмеженої прямими $x=a$ та $x=b$, обчислюється за формулою $l=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$.

Нехай тепер $V(t)$, $D(t)$, $P(t)$ – відповідно функції витрат, доходу та прибутку у виробництві та реалізації x одиниць продукції. Тоді $P(t)=D(t)-V(t)$ або через маргінальні функції $P'(t)=D'(t)-V'(t)$. Максимум загального прибутку досягається при $P'(t)=0$ або $D'(t)=V'(t)$.

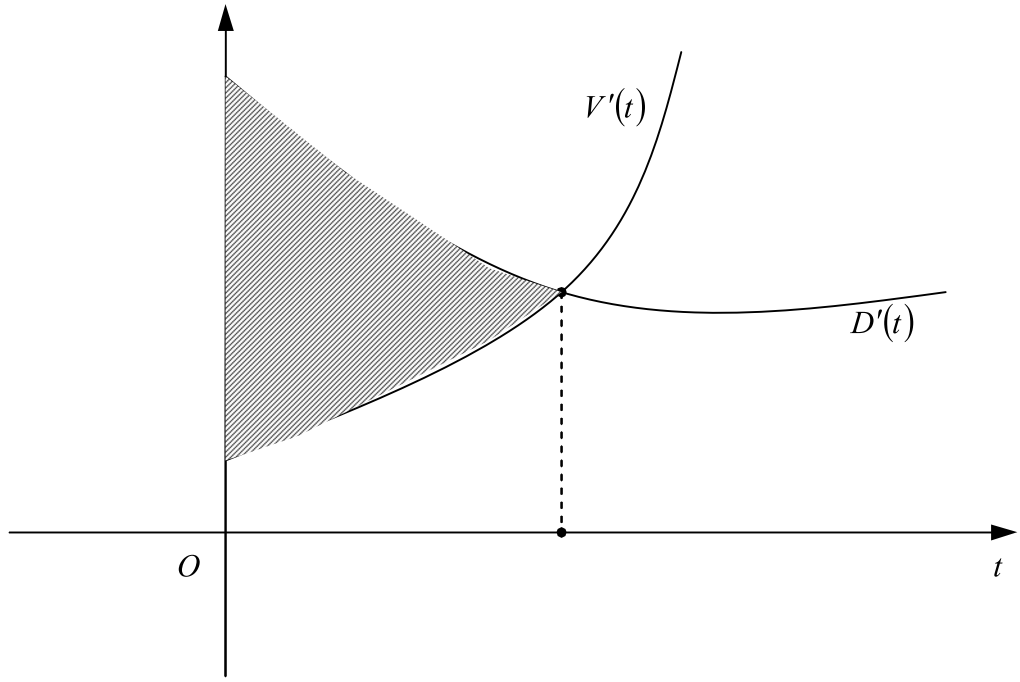


Рис. 13.2

Отже, загальний прибуток за час t_1 обчислюється за формулою $P(t_1)=\int\limits_0^{t_1} P'(t)dt=\int\limits_0^{t_1}[D'(t)-V'(t)]dt$.

Приклад. Швидкості зміни витрат та доходу підприємства після початку його діяльності виражаються формулами $V'(t)=5+2t^{\frac{2}{3}}$ та $D'(t)=17-t^{\frac{2}{3}}$, де V і D вимірюються мільйонами гривень, а t – роками. Визначити, як довго підприємство було прибутковим та знайти загальний прибуток, отриманий за цей час.

Розв'язання. Оптимальний час для прибутку підприємства одержимо з рівняння $5+2t^{\frac{2}{3}}=17-t^{\frac{2}{3}}$; $t^{\frac{2}{3}}=4$, $t_1=4^{\frac{3}{2}}=8$.

Тоді загальний прибуток за 8 років роботи підприємства воно отримало:

$$P=\int\limits_0^8\left(17-t^{\frac{2}{3}}-5-2t^{\frac{2}{3}}\right)dt=\int\limits_0^8\left(12-3t^{\frac{2}{3}}\right)dt=\left(12t-\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}\right)\Bigg|_0^8=96-\frac{9}{5}\cdot 32=38{,}9 \text{ (млн. грн.).}$$

Коефіцієнтом нерівномірності L розподілу податку кривої Лоренца $y=f(x)$ називають відношення площі фігури, обмеженої кривою Лоренца та прямою $y = x$ до площі фігури, що лежить нижче прямої $y = x$, тобто $L = 2\int_0^1 [x - f(x)]dx$, $0 \le L \le 1$.

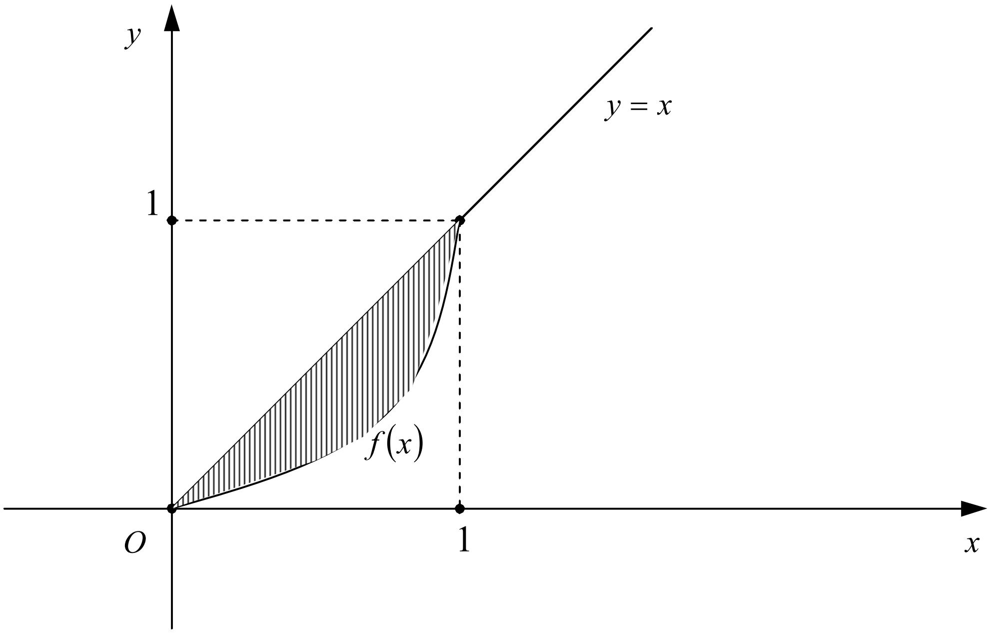


Рис. 13.3

Якщо $L = 0$, то прибутковий податок розподілено рівномірно, якщо ж $L = 1$, то нерівномірність податків найбільша.

Приклад. Визначити коефіцієнт нерівномірності розподілу податку, якщо крива Лоренца має вигляд $y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$.

Розв'язання. Згідно наведеної формули маємо:

$$L = 2\int_0^1 \left(x - \frac{15}{16}x^2 - \frac{1}{16}x \right)dx = \frac{15}{8}\int_0^1 \left(x - x^2 \right)dx = \frac{15}{8}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{16}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається визначеним інтегралом?
2. Які є властивості визначеного інтегралу?
3. Записати формулу Ньютона-Лейбніца.
4. У чому полягає метод заміни змінної у визначеному інтегралі?
5. Як обчислюється площа плоскої фігури?

Обчислити інтеграли:

6. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$. (Відповідь: $1-\frac{2}{e}$).

7. $\int\limits_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}dx$. (Відповідь: $\frac{464\sqrt{2}}{15}$).

8. Обчислити площу фігури обмеженої кривими $y=\sqrt{x}$ та $y=x^2$. (Відповідь: $S=\frac{1}{3}$).

9. Знайти довжину дуги лінії $y=\ln\left(1-x^2\right)$ від початку координат до точки $\left(\frac{1}{2},\ln\frac{3}{4}\right)$. (Відповідь: $l=2arctg\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$).

10.визначити коефіцієнт нерівномірності розподілу податку, якщо крива Лоренца має вигляд $y=\frac{19}{20}x^2+\frac{1}{20}x$. (Відповідь: $L=\frac{19}{60}$).

Лекція №14. Невласні інтеграли. Подвійний інтеграл.

Невласні інтеграли першого та другого роду. Подвійний інтеграл його обчислення та застосування.

14.1. Невласні інтеграли першого та другого роду.

В означенні визначеного інтегралу передбачається, що проміжок інтегрування скінченний і підінтегральна функція на ньому обмежена. Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то приходимо до одного із узагальнень визначеного інтеграла – невласного інтеграла.

Нехай функція визначена на проміжку $[a,+\infty)$ і інтегровна на будь-якому відрізку $[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді границя $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ називається невласним інтегралом першого роду. Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається збіжним, а функція $f(x)$ – інтегровною на $[a,+\infty)$; якщо ж така границя не існує або нескінченна, то він називається розбіжним.

Аналогічно маємо невласний інтеграл на проміжку $(-\infty,b]$: $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$. Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$, де c – довільне число, причому інтеграл зліва існує або є збіжним лише тоді, коли є збіжними або обидва інтеграли справа.

Зазначимо, що невласні інтеграли першого роду називаються також інтегралами з нескінченними межами інтегрування.

Зауважимо також, що у разі, коли функція $f(x)$ неперервна і невід’ємна на $[a,+\infty)$ та інтегровна, то невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ виражає площу необмеженої області.

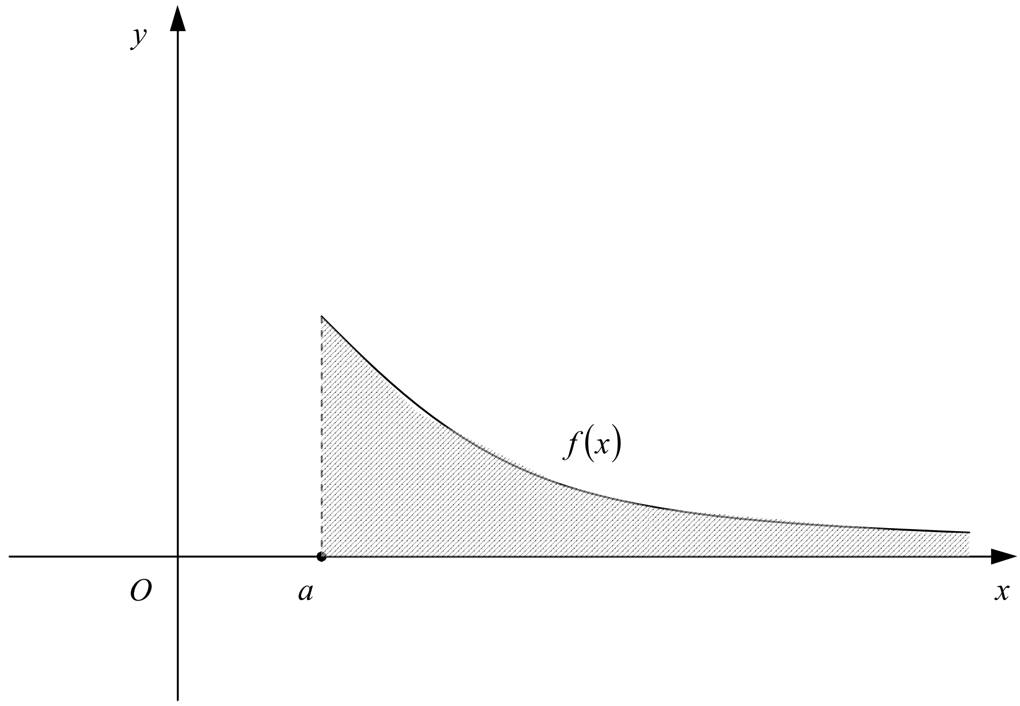


Рис. 14.1

Приклад. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}arctgx\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}arctgb-arctg1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

Отже, інтеграл є збіжним.

Нехай тепер функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a,b)$, причому $f(x)\to\infty$ при $x\to b-0$. В такому випадку точка $x=b$ називається особливою для функції $f(x)$. І нехай $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b-\varepsilon]$ при довільному $\varepsilon>0$, але такому що $b-\varepsilon>a$. Тоді границя $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$ називається невласним інтегралом другого роду. Якщо така границя існую і скінченна, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називається збіжним, у разі, коли границя не існує або нескінченна, він називається розбіжним.

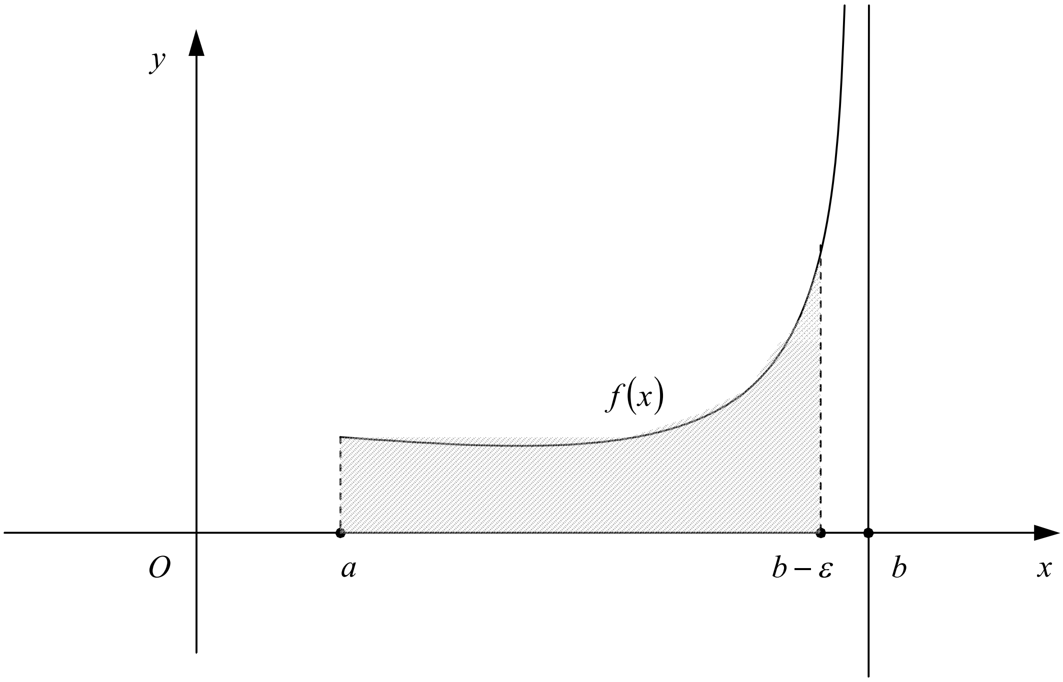


Рис. 14.2

Аналогічно, коли $x = a$ – особлива точка, то невласний інтеграл визначається так: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

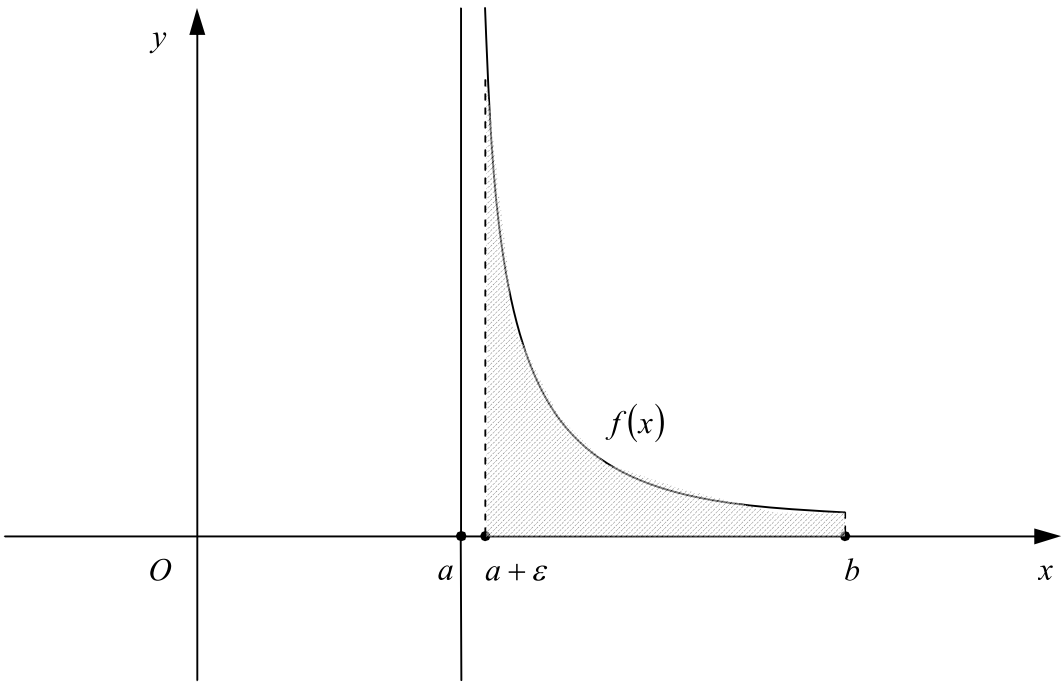


Рис. 14.3

Якщо $f(x)$ необмежена в околі якої-небудь внутрішньої точки $c_0 \in (a,b)$, то за означенням покладають $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{c_0} f(x)dx + \int\limits_{c_0}^b f(x)dx$ і інтеграл зліва збіжний лише за умови збіжності обох інтегралів справа.

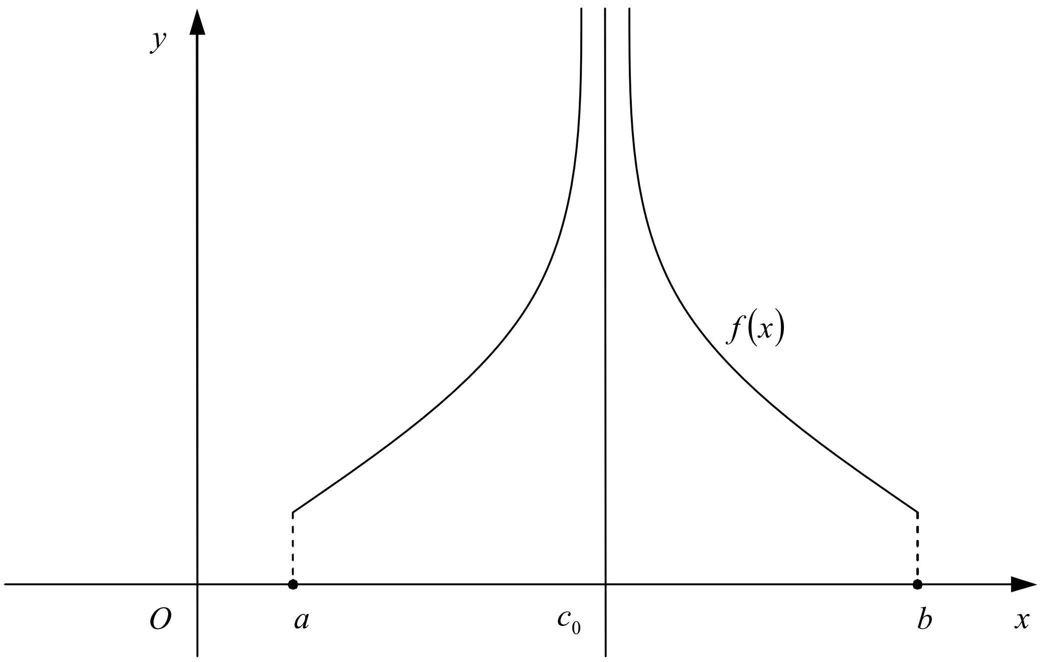


Рис. 14.4

Нарешті коли a і b – особливі точки, то за означенням $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, де c – довільна точка інтервалу (a,b). Тут інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ існує за умови збіжності обох інтегралів $\int\limits_a^c f(x)dx$ і $\int\limits_c^b f(x)dx$.

Приклад. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\ln x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln|\ln x|\Big|_{1+\varepsilon}^e = \ln\ln e - \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln\ln(1+\varepsilon) = +\infty$ і інтеграл розбіжний.

14.2. Подвійний інтеграл його обчислення та застосування.

Іншим узагальненням визначеного інтеграла є подвійний інтеграл.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в замкненій обмеженій області D координатної площини.

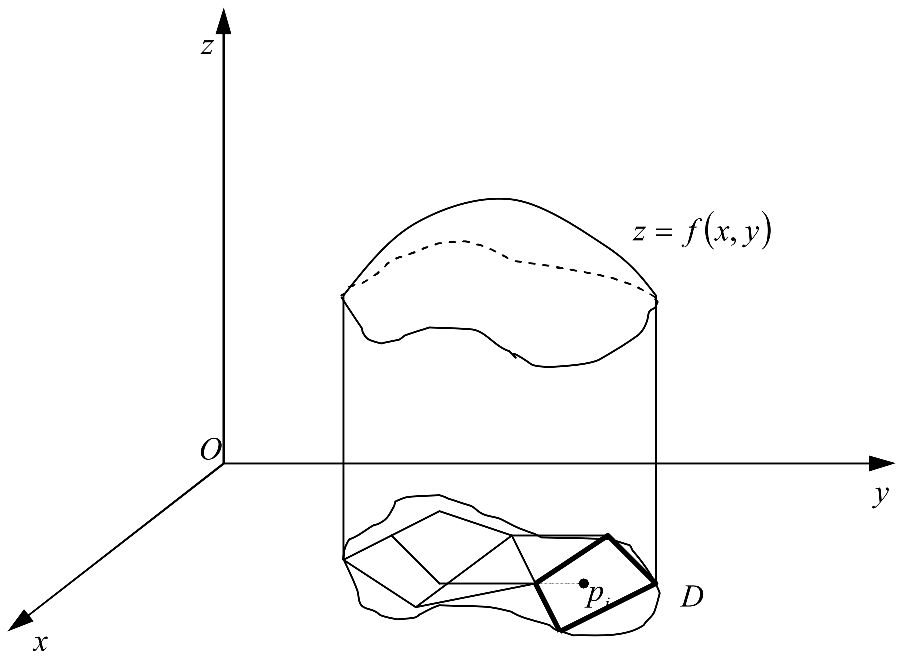


Рис. 14.5

Розіб'ємо область D довільно на n частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1,2,\ldots,n$. У кожній області D_i довільно візьмемо точку $p_i(\xi_i, \eta_i)$ і утворимо інтегральну суму для функції $f(x, y)$: $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$.

Нехай λ – найбільший з діаметрів областей D_i. Якщо інтегральна сума I_n при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить від способу розбиття і вибору точок p_i, то ця границя називається подвійним інтегралом і позначається та записується таким чином: $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$.

Тут функція $f(x, y)$ називається інтегровною в області D; D – областю інтегрування; x, y – змінними інтегрування.

Геометричний зміст подвійного інтеграла: об'єм циліндричного тіла обчислюється за формулою $V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$. Якщо $f(x, y) \equiv 1$, то дістанемо формулу для обчислення площі області D: $S = \iint\limits_D dxdy$. (14.1)

Надалі розглядатимемо лише неперервні функції, оскільки вони інтегровними в області.

З порівняння означень визначеного і подвійного інтегралів випливає, що їх конструкції цілком аналогічні. Більш того, за такою схемою будуються потрійний, криволінійний та інші інтеграли. У зв'язку з цим, властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла.

Розглянемо обчислення подвійного інтеграла, яке зводиться до обчислення двох звичайних визначених інтегралів.

Нехай область інтегрування D обмежена неперервними кривими $y_1(x)$ та $y_2(x)$ і прямими $x = a$ і $x = b$, причому $y_1(x) \le y_2(x)$, $x \in (a, b)$.

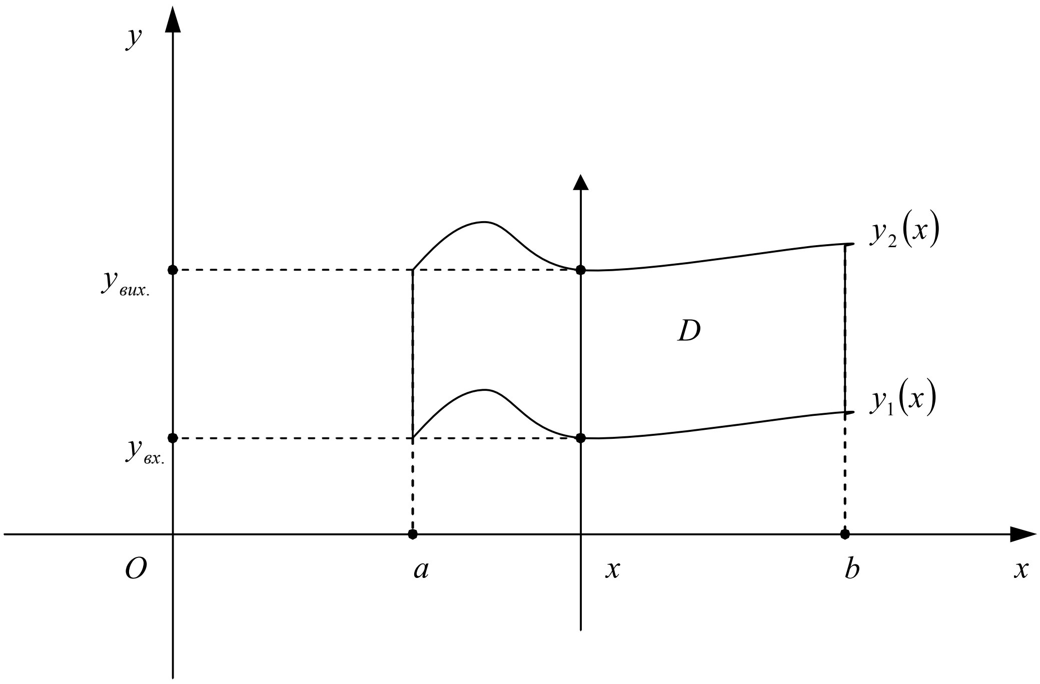


Рис. 14.6

І нехай ця область правильна в напрямі осі OY, тобто довільна пряма, яка проходить по внутрішнім точкам області паралельно осі OY, перетинає її межу не більше, ніж у двох точках. Тоді подвійний інтеграл обчислюється за формулою $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$. (14.2)

Праву частину формули (14.1) називають повторним інтегралом, в якому спочатку обчислюється внутрішній інтеграл по змінній y (при цьому x вважається сталою), а потім – зовнішній інтеграл по x.

Нехай тепер область D обмежена неперервними кривими $x_1(y)$, $x_2(y)$ та прямими $y=c$, $y=d$ ($c<d$), причому $x_1(y) \le x_2(y)$, $y \in (c,d)$ і є правильною в напрямі осі OX, тобто довільна пряма, яка проходить по внутрішнім точкам області паралельно осі OX, перетинає її межу не більше, ніж у двох точках.

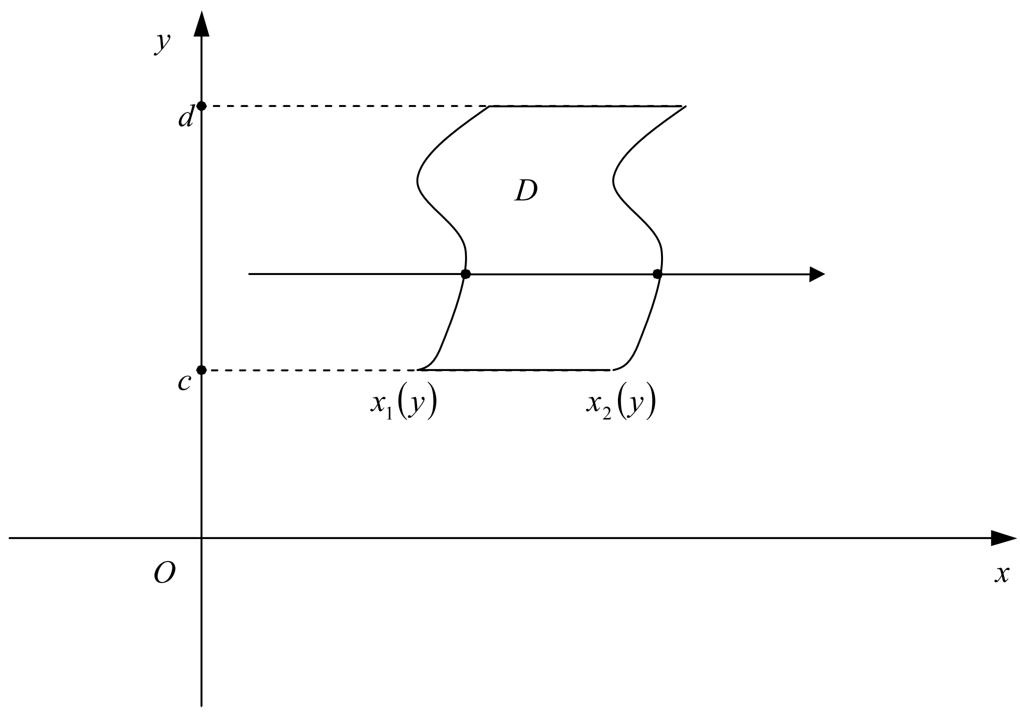


Рис. 14.7

В такому випадку для знаходження подвійного інтеграла справедлива формула: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$. (14.3)

Тут спочатку ведеться інтегрування по змінній x, а потім – по змінній y.

Зауваження. 1. Якщо область D не є правильною в жодному із вказаних напрямів, то її розбивають на частини, кожна з яких вже є правильною в напрямі OX чи OY. Обчислюючи подвійні інтеграли по отриманих правильних областях і додаючи отримані результати, отримують подвійний інтеграл по області D.

2. Повторні інтеграли в правих частинах формул (14.2) і (14.3) називаються інтегралами з різним порядком інтегрування. Щоб змінити порядок інтегрування, потрібно перейти від однієї із вказаних формул до іншої.

3. Правильну область в напрямі осі OY або OX позначають відповідно: $D = \{y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b\}$ або так $D = \{x_1(y) \le x \le x_2(y), c \le y \le d\}$.

4. Подвійний інтеграл має важливе застосування в області науки і техніка. Так вже з геометричного змісту подвійного інтеграла випливають формули для обчислення площ та об'ємів в задачах геометрії.

Приклад. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x = y^2 - 2y$, $x = y$.

Розв'язання. Знайдемо ординати точок перетину даних ліній із системи $\begin{cases} x = y^2 - 2y \\ x = y \end{cases}$. Отже, $y = y^2 - 2y$ або $y^2 - 3y = 0$; $y_1 = 0$, $y_2 = 3$.

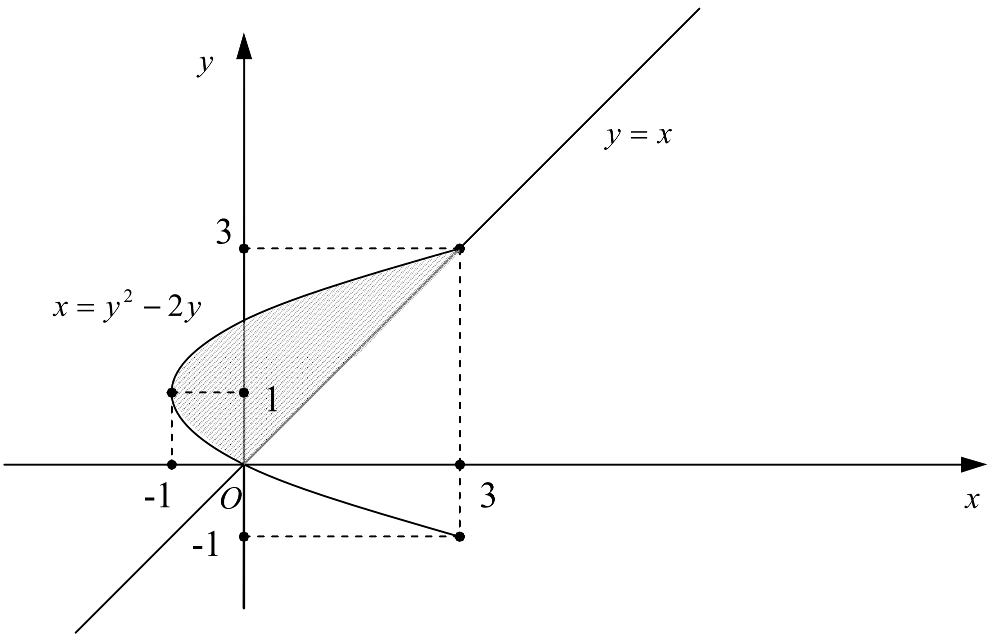


Рис. 14.8

За формулою (14.1) і (14.3) знаходимо: $S=\int_0^3 dy\int_{y^2-2y}^{y}dx=\int_0^3\left(y-y^2+2y\right)dy=$

$$=\int_0^3\left(3y-y^2\right)dy=\left(\frac{3y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}=\frac{27}{6}=4{,}5\,.$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається невласним інтегралом першого роду?
2. Що називається невласним інтегралом другого роду?
3. Що називається подвійним інтегралом?
4. Які є формули для обчислення подвійного інтеграла?
5. Як обчислюється об'єм циліндричного тіла та площа плоскої фігури?

Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

6. $\int_{-\infty}^{0}\cos 2x\,dx$. (Відповідь: розбіжний).
7. $\int_{0}^{+\infty}e^{3x}dx$. (Відповідь: розбіжний).
8. $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2}$. (Відповідь: $\frac{\pi}{4}$).
9. $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. (Відповідь: $\frac{\pi}{2}$).
10. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (Відповідь: 1).

Обчислити подвійні інтеграли:

11. $\iint_D (x+2y)dxdy$, область D обмежена лініями $y=x^2$, $x=y^2$. (Відповідь: $\frac{9}{20}$).

12. $\iint_D xy^2dxdy$, область D мітиться в першій чверті і обмежена лініями $x=0$, $y=x$, $y=2-x^2$. (Відповідь: $\frac{67}{120}$).

13. $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dxdy$, область D обмежена прямими $y = x$, $y = 0$, $x = 1$. (Відповідь: $\frac{e-1}{2}$).

14. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$. (Відповідь: $S = \frac{5}{12}$).

Лекція №15. Диференціальні рівняння першого порядку.

Загальні поняття. Задача Коші. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі.

15.1. Загальні поняття. Задача Коші.

При дослідженні різних процесів користуються математичними моделями у вигляді диференціальних рівнянь – рівнянь, до яких входять як незамінні величини і залежні від них (шукані) функції, так і похідні від вказаних функцій. Диференціальне рівняння називається звичайним, якщо невідомою є функція від однієї змінної. Якщо ж воно містить невідому функцію від багатьох змінних, то його називають диференціальним рівнянням в частинних похідних. Розглядатимемо лише звичайні диференціальні рівняння (надалі просто диференціальні рівняння).

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду $F(x, y, y') = 0$, яке обов'язково містить похідну y'. Якщо це рівняння можна розв'язати відносно похідної y', то воно набуває вигляду:

$$y' = f(x, y). \qquad (15.1)$$

і називається диференціальним рівнянням в нормальній формі. Записавши (15.1) таким чином $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ або $-f(x, y)dx + dy = 0$ і помноживши останнє на деяку функцію $Q(x, y) \neq 0$, дістанемо рівняння в диференціальній формі $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Розв'язком рівняння (15.1) на інтервалі (a, b) називається диференційовна на цьому інтервалі функція $y = y(x)$ така, що $y'(x) = f(x, y(x))$, $x \in (a, b)$. Графік розв'язку диференціального рівняння називається інтегральною кривою цього рівняння.

Тут є важливою наступна теорема про існування та єдність розв'язку диференціального рівняння.

Теорема (Коші). Нехай функція $f(x,y)$ і її похідна $f'_y(x,y)$ неперервні у відкритій області G ($(x_0,y_0)\in G$) координатної площини. Тоді існує єдиний розв'язок $y=y(x)$ рівняння (15.1), який задовольняє умову:

$$y(x_0)=y_0 \text{ або } y\big|_{x=x_0}=y_0. \qquad (15.2)$$

геометрично теорема Коші стверджує, що через кожну точку $(x_0,y_0)\in G$ проходить єдина інтегральна крива.

Умову (15.2) називають початковою умовою розв'язку. Задача знаходження розв'язку рівняння (15.1), який задовольняє умові (15.2), називається задачею Коші. З геометричної точки зору розв'язати задачу Коші – це означає виділити з множини інтегральних кривих саме ту, яка проходить через задану точку (x_0,y_0).

Точки площини, в яких умови теореми Коші не виконуються називаються особливими і через кожну з таких точок може проходити кілька інтегральних кривих або не проходить жодної.

Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдності, називають особливим, а графік особливого розв'язку – особливою інтегральною кривою.

Нехай права частина $f(x,y)$ рівняння (15.1) задовольняє в області G умови теореми Коші. Функція $y=y(x,c)$ називається загальним розв'язком рівняння (15.1) в області G, якщо:

1. $y(x,c)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значенні сталої c з деякої множини;

2. для довільної точки $(x_0,y_0)\in G$ знайдеться значення $c=c_0$ таке, що функція $y=y(x,c_0)$ задовольняє умову $y(x,c_0)=y_0$.

Функція $y=y(x,c_0)$, яка утворюється із загального розв'язку при певному значенні сталої c_0, називається частинним розв'язком рівняння (15.1).

Загальний зв'язок записаний у вигляді $\Phi(x,y,c)=0$, називається загальним інтегралом, а рівність $\Phi(x,y,c_0)$ – частинним інтегралом.

Приклад. Рівняння $y'=2x$ має загальний розв'язок $y=x^2+c$, причому функція $y=x^2$ буде його частинним розв'язком.

Якщо знаходження всіх розв'язків диференціального рівняння зводиться до виконання скінченного числа алгебраїчних операцій та операцій інтегрування і диференціювання, то кажуть, що таке рівняння інтегрується в квадратурах або зводиться до квадратур. Розглянемо типи рівнянь, які відносяться до класу інтегровних в квадратурах диференціальних рівнянь.

15.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Рівняння виду $f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy=0$ (15.3), де $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ – неперервні функції на деякому інтервалі, називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Для відокремлення змінних у цьому рівняння ділять обидві його частини на функцію $\varphi_1(y)f_2(x)\neq 0$. Далі про інтегрувавши його, дістають $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy=c$. Зауважимо що тут можна загубити деякі розв'язки. Дійсно, якщо $\varphi_1(y_0)=0$ або $f_2(x_0)=0$, то сталі $y=y_0$ і $x=x_0$ є розв'язками рівняння (15.3), які можуть бути як частинними так і особливими.

Приклад. Розв'язати задачу Коші: знайти частинний розв'язок рівняння $(1+x^2)dy-ydx=0$, який задовольняє початкову умову $y(0)=1$.

Розв'язання. Відокремлюємо змінні та інтегруємо задане рівняння: $\frac{dy}{y}-\frac{dx}{1+x^2}=0$, $\int\frac{dy}{y}-\int\frac{dx}{1+x^2}=c$. Дістали загальний інтеграл $\ln|y|-arctgx=c$. Використовуючи початкову умову знаходимо сталу c: $\ln 1-arctg0=c$, $c=0$. Отже, маємо шуканий частинний розв'язок $\ln y-arctgx=0$ або $y=e^{arctgx}$.

Задача про зростання інвестицій. Встановлено, що швидкість зростання інвестованого капіталу у будь-який момент часу t пропорційна величині капіталу із коефіцієнтом пропорційності рівним узгоджену відсотку R неперервного зростання капіталу. Потрібно знайти закон зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової ($t=0$) інвестиції k_0.

Розв’язання. Спочатку побудуємо математичну модель цієї задачі. Позначимо через $k(t)$ величину інвестованого капіталу у момент t. Тоді $\frac{dk(t)}{dt}$ – швидкість зміни величини інвестиції. За умовою маємо: $\begin{cases} \frac{dk(t)}{dt} = Rk(t) \\ k(t)\big|_{t=0} = k_0 \end{cases}$.

Одержали задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістанемо загальний розв’язок $k(t) = e^{Rt+c} = e^c e^{Rt}$. Згідно з початковою умовою при $t=0$ маємо $k(0) = e^c = k_0$. Отже, розв’язком задачі Коші буде функція $k(t) = k_0 e^{Rt}$, що означає зростання інвестиції з часом за експоненціальним законом.

15.3. Однорідні диференціальні рівняння.

Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією n–го виміру, якщо $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$, $t \neq 0$. Наприклад, функція $f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{xy}}$ – однорідна нульового виміру, оскільки $f(tx,ty) = \frac{tx+ty}{\sqrt{txty}} = \frac{t(x+y)}{t\sqrt{xy}} = \frac{x+y}{\sqrt{xy}} = t^0 f(x,y)$.

Диференціальне рівняння $y' = f(x,y)$ (15.4) називається однорідне, якщо $f(x,y)$ – однорідна функція нульового виміру.

Однорідні рівняння зводяться до рівнянь з відокремленими змінними підстановкою $y = ux$, де $u = u(x)$ – невідома функція, яка підлягає знаходженню. Справді, оскільки $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, то маємо $u + x\frac{du}{dx} = f(x,ux)$. Тут $f(tx,ty) = f(x,y)$ і, поклавши $t = \frac{1}{x}$, дістанемо $f(x,ux) = f(1,u)$, яке є рівнянням з відокремленими змінними. Якщо $f(1,u) - u \neq 0$, то, відокремлюючи змінні та інтегруючи, знайдемо $\int \frac{du}{f(1,u)-u} = \ln|u| + c$ і залишається лише підставити замість u відношення $\frac{y}{x}$, щоб дістати загальний розв’язок. Якщо ж $f(1,u)-u=0$, то $x\frac{du}{dx}=0$ і рівняння (15.4) може мати ще розв’язки $y=cx$ ($x\neq 0$) та $x=0$ ($y\neq 0$).

Приклад. Розв’язати рівняння $y'=\frac{y^2+xy}{x^2}$.

Розв’язання. Права частина даного рівняння є однорідною функцією нульового виміру, тому що $f(tx,ty)=\frac{(ty)^2+txty}{t^2x^2}=\frac{t^2\left(y^2+xy\right)}{t^2x^2}=\frac{y^2+xy}{x^2}=f(x,y)$. Отже, диференціальне рівняння є однорідним. Використаємо підстановку $y=ux$ і дістанемо загальний розв’язок рівняння: $xu'+u=u^2+u$, $x\frac{du}{dx}=u^2$, $\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{dx}{x}-c$, $-\frac{1}{u}=\ln|x|-c$, $u=\frac{1}{c-\ln x}$, $\frac{y}{x}=\frac{1}{c-\ln x}$, $y=\frac{1}{c-\ln x}$.

15.4. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі.

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння. $y'+P(x)y=q(x)$ (15.5), де $P(x)$, $q(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі.

Один із способів інтегрування рівняння (15.5) є метод Бернуллі, який полягає в тому, що розв’язок даного рівняння відшукують у вигляді $y=uv$, де $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – невідомі функції, які підлягають знаходженню, причому одна з них довільна але не рівна нулю. Таким чином, знаходячи $y'=u'v+uv'$ і підставляючи значення y та y' в рівняння (15.5), дістанемо $u'v+u(v'+P(x)v)=q(x)$. Користуючись довільністю у виборі функції v, підберемо її так, щоб $v'+P(x)v=0$, тоді $u'v=q(x)$. Розв’язуючи ці рівняння, дістанемо: $\frac{dv}{dx}=-P(x)v$, $\frac{dv}{v}=-P(x)dx$, $v=c_1e^{-\int P(x)dx}$ і візьмемо який-небудь частинний розв’язок, наприклад, $v=e^{-\int P(x)dx}$; $\frac{du}{dx}e^{-\int P(x)dx}=q(x)$, $du=q(x)e^{\int P(x)dx}dx$,

$u=\int q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c$. Отже, загальним розв'язком рівняння (15.5) буде функція $y=uv=\left(\int q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c\right)e^{-\int P(x)dx}$.

Рівнянням Бернуллі називається рівняння $y'+P(x)y=q(x)y^{\alpha}$, $\alpha\in R$, $\alpha\neq 0{,}1$. При $\alpha=0$ це рівняння є лінійним, а при $\alpha=1$ воно перетворюється на рівняння з відокремлюваними змінними.

Припускаючи $y\neq 0$ і $\alpha\neq 0{,}1$, поділимо рівняння Бернуллі на y^{α}, тоді матимемо $y^{-\alpha}y'+P(x)y^{1-\alpha}=q(x)$ і заміною $z=y^{1-\alpha}$ воно зводиться до лінійного рівняння. Проте розв'язок рівняння Бернуллі зручніше шукати методом Бернуллі, безпосередньо у вигляді $y=uv$, не зводячи його до лінійного рівняння. Зазначимо, що при $\alpha>0$, крім розв'язку $y=uv\neq 0$, рівняння Бернуллі має розв'язок $y\equiv 0$.

Приклад. Розв'язати рівняння $(x^2\ln y-x)y'-y=0$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння: $y'=\dfrac{y}{x^2\ln y-x}$. Звідки маємо $yx'+x=x^2\ln y$ або $x'+\dfrac{x}{y}=\dfrac{\ln y}{y}x^2$ – рівняння Бернуллі відносно змінної $x=x(y)$. Знайдемо його розв'язок: $x=uv$, $x'=u'v+uv'$, $u'v+uv'+\dfrac{uv}{y}=\dfrac{\ln y}{y}u^2v^2$, $u'v+u\left(v'+\dfrac{v}{y}\right)=\dfrac{\ln y}{y}u^2v^2$; $\dfrac{dv}{dy}+\dfrac{v}{y}=0$, $\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{dy}{y}$, $v=\dfrac{1}{y}$; $\dfrac{du}{dy}\dfrac{1}{y}=\dfrac{\ln y}{y}u^2\dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{du}{u^2}=\dfrac{\ln y}{y^2}dy$, $u=\dfrac{y}{1+\ln y-cy}$; $y=uv=\dfrac{1}{1+\ln y-cy}$.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається диференціальним рівнянням першого порядку?
2. Що називається розв'язком диференціального рівняння?
3. Сформулювати теорему Коші про існування та єдність розв'язку рівняння першого порядку.
4. Що називається загальним і частинним розв'язками диференціального рівняння першого порядку?

5. В чому полягає спосіб розв'язання рівняння з відокремленими змінними?
6. Як розв'язати однорідне диференціальне рівняння?
7. Який метод розв'язання лінійного рівняння першого порядку?
8. Що називається рівнянням Бернуллі і як воно розв'язується?

Розв'язати рівняння:

9. $\left(y^2 - xy^2\right)dx + \left(x^2 + yx^2\right)dy = 0$. (Відповідь: $\frac{x+y}{xy} + \ln\frac{x}{y} = c$).

10. $(y - x)dx + (x + y)dy = 0$. (Відповідь: $y^2 + 2xy - x^2 = c$).

11. $\left(x - x^3\right)y' + \left(2x^2 - 1\right)y = x^3$. (Відповідь: $y = x + cx\sqrt{1 - x^2}$).

12. $y' + xy = x^3y^3$. (Відповідь: $y^2\left(x^2 + 1 + ce^{x^2}\right) = 1$).

13. Знайти розв'язок рівняння $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x}$, який задовольняє умову $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. (Відповідь: $y = -\frac{\cos 2x}{2x}$).

14. Знайти криву, яка проходить через точку $(1,2)$, коли відомо, що у кожній точці кривої відрізок дотичної, який міститься між осями координат, ділиться точкою дотику навпіл. (Відповідь: $y = \frac{2}{x}$).

Лекція №16. Диференціальні рівняння другого роду.

Диференціальні рівняння, що допускають пониження степеня. Лінійні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами.

16.1. Диференціальні рівняння, що допускають пониження степеня.

Диференціальним рівнянням другого $n-$го порядку називається рівняння $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$, яке обов'язково повинно містити похідну $y^{(n)}$.

Зазначимо, що для диференціальних рівнянь вищих порядків так само, як і для рівнянь першого порядку, можна розглянути теорему Коші про існування та єдність розв'язку, задачу Коші, поняття загального і часткового розв'язків.

Надалі обмежимося випадком $n = 2$, тобто лише диференціальними рівняннями другого порядку. Розглянемо деякі типи таких рівнянь.

Рівняння виду $y'' = f(x)$, де $f(x)$ – неперервна функція, інтегрується в квадратурах. Дійсно, записавши це рівняння у вигляді $\frac{d}{dx}(y') = f(x)$ або $d(y') = f(x)dx$ та інтегруючи, дістанемо $y' = \int f(x)dx + c_1$. Аналогічно знайдемо $dy = \left(\int f(x)dx + c_1\right)dx$, звідки $y = \int\left(\int f(x)dx + c_1\right)dx + c_2$ – загальний розв'язок заданого рівняння.

Зауважимо тут, що у загальному випадку після n послідовних інтегрувань можна знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' = \cos 2x$.

Розв'язання. Послідовно дістанемо:

$$y' = \int \cos 2x dx + c_1 = \frac{1}{2}\sin 2x + c_1;$$

$$y = \int\left(\frac{1}{2}\sin 2x + c_1\right)dx + c_2 = -\frac{1}{4}\cos 2x + c_1 x + c_2 .$$

Проте не завжди можна понизити порядок рівняння послідовним інтегруванням, тобто так, як це було розглянуто вище. Одним з методів розв'язання диференціальних рівнянь вищих порядків є метод пониження порядку, який полягає в тому, що за допомогою відповідної заміни змінної дане рівняння зводиться до рівняння нижчого порядку.

Розглянемо два типи рівнянь, які допускають пониження порядку.

Рівняння виду $F(x, y', y'') = 0$, що не містить явно шуканої функції y, зводиться заміною $y' = z = z(x)$ і $y'' = z'$, де z – нова невідома функція, до рівняння першого порядку $F(x, z, z') = 0$. Якщо для останнього рівняння вдається знайти загальний розв'язок $z = z(x, c_1)$, то приходимо до рівняння $y' = z(x, c_1)$, розв'язком якого, а отже, і заданого рівняння, буде функція $y = \int z(x, c_1)dx + c_2$.

Рівняння ж виду $F(y, y', y'') = 0$, яке явно не містить аргументу x, зводиться підстановкою $y' = z = z(y)$, $y'' = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z'z$ до диференціального рівняння першого порядку $F(y, z, z') = 0$. Якщо знайдемо розв'язок отриманого рівняння $z = z(y, c_1)$, то, враховуючи заміну, маємо $y' = z(y, c_1)$. Звідси, інтегруючи, дістанемо загальний інтеграл заданого рівняння $\int \frac{dy}{z(y, c_1)} = x + c_2$.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + 3y' = e^{2x}$.

Розв'язання. Покладемо $y' = z$, тоді $y'' = z'$ і маємо лінійне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $z = z(x)$: $z' + 3z = e^{2x}$. Розв'язавши це рівняння, знайдемо $z = c_1 e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}$. Тоді $y' = c_1 e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}$, звідки $y = \frac{2}{5}e^{2x} - \frac{c_1}{3}e^{-3x} + c_2$.

16.2. Лінійні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами.

Диференціальне рівняння другого порядку називається лінійним однорідним, якщо воно має вигляд

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (16.1),$$

де $a(x)$, $b(x)$ – неперервні функції на деякому інтегралі.

Встановимо деякі властивості його розв'язків.

Теорема. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – розв'язки рівняння (16.1), то його розв'язком є також функція $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, де c_1, c_2 – довільні сталі.

Доведення. Підставивши функцію $y(x)$ в рівняння (16.1), матимемо: $(c_1y_1(x) + c_2y_2(x))'' + a(x)(c_1y_1(x) + c_2y_2(x))' + b(x)(c_1y_1(x) + c_2y_2(x)) = 0$ або $c_1(y_1''(x) + a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x)) + c_2(y_2''(x) + a(x)y_2'(x) + b(x)y_2(x)) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$. Це означає, що $y(x)$ – розв'язок рівняння (16.1).

Виникає питання: чи не є розглянута функція $y(x)$ загальним розв'язком заданого рівняння? Щоб дістати відповідь, введемо поняття лінійної залежності та незалежності функцій.

Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються лінійно незалежними на інтервалі (a,b), якщо рівність $\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) = 0$ на цьому інтервалі справджується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Якщо вказана рівність виконується при хоча б одному відмінному від нуля дійсному числі α_1 чи α_2, то ці функції називаються лінійно залежними. Інакше кажучи, $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли існує таке стале число λ, що $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda$, $x \in (a,b)$.

Наприклад, серед функцій $y_1(x) = x$, $y_2(x) = \dfrac{x}{2}$, $y_3(x) = x^2$ функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є лінійно залежними, а функції $y_1(x)$ і $y_3(x)$ – лінійно незалежні, оскільки $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = 2 = const$, $\dfrac{y_1(x)}{y_3(x)} = \dfrac{1}{x} \neq const$.

Теорема (про структуру загального розв'язку однорідного рівняння).

Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння (16.1) на інтервалі (a,b), то функція $\overline{y}(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ є його загальним розв'язком. Розглянемо тепер рівняння виду

$$y''+a(x)y'+b(x)y=f(x), \tag{16.2}$$

де $a(x)$, $b(x)$ і $f(x)\neq 0$ – неперервні функції на деякому інтервалі. Таке диференціальне рівняння другого порядку називається лінійним неоднорідним, при цьому рівняння $y''+a(x)y'+b(x)y=0$, ліва частина якого збігається з лівою частиною рівняння (16.2), відповідним йому однорідним рівнянням.

Теорема (про структуру загального розв'язку неоднорідного рівняння).

Загальним розв'язком рівняння (16.2) є сума довільного його частинного розв'язку $y^*(x)$ і загального розв'язку $\overline{y}(x)$ відповідного однорідного рівняння: $y(x)=y^*(x)+\overline{y}(x)$.

Якщо в диференціальному рівнянні (16.1) коефіцієнти $a(x)$ і $b(x)$ є дійсними числами p і q відповідно, то воно називається лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами і має вигляд

$$y''+py'+qy=0. \tag{16.3}$$

Частинні розв'язки рівняння (16.3) шукатимемо у вигляді функції, похідні якої відрізняються сталими множниками від самої функції. Такою функцією є експонента $y=e^{kx}$, де k – стала. Стала k визначається з умови, що функція $y=e^{kx}$ є розв'язком рівняння (16.3).

Маючи похідні $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$ і підставляючи їх та функцію e^{kx} в (16.3), дістанемо $e^{kx}\left(k^2+pk+q\right)=0$. Оскільки $e^{kx}\neq 0$, то

$$k^2+pk+q=0. \tag{16.4}$$

Отже, якщо k буде коренем рівняння (16.4), то функція $y=e^{kx}$ буде розв'язком рівняння (16.3). Квадратне рівняння (16.4) називається характеристичним для диференціального рівняння (16.3). Нехай k_1, k_2 – корені квадратного рівняння (16.4). Розглянемо можливі випадки.

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні ($k_1 \neq k_2$), то загальний розв'язок рівняння (16.3) знаходять за формулою $\overline{y} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$.

Якщо ж корені рівняння (16.4) є комплексно-спряжені ($k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$), то в такому випадку загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння із сталими коефіцієнтами має вигляд $\overline{y} = e^{c\alpha}\left(c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x\right)$.

У разі, коли корені характеристичного рівняння дійсні і рівні ($k_1 = k_2 = k$), то маємо загальний розв'язок рівняння (16.3) таким $\overline{y} = e^{kx}\left(c_1 + c_2 x\right)$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 5y' + 6 = 0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$ і знаходимо його корені $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Таким чином, шуканий розв'язок має вигляд $\overline{y} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.

Нарешті розглянемо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною, тобто рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{16.5}$$

де $f(x) = e^{c\alpha}\left(P_n(x)\sin \beta x + R_m(x)\cos \beta x\right)$. Тут $P_n(x)$, $R_m(x)$ – многочлени відповідно степеня n і m; α та β – дійсні числа.

Загальний розв'язок рівняння (16.5) являє собою суму цього частинного розв'язку та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Оскільки відшукати загальний розв'язок однорідного рівняння неважко, то постає лише питання про знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Частинний розв'язок рівняння (16.5) треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x}\left(Q_s(x)\cos \beta x + L_s(x)\sin \beta x\right), \tag{16.6}$$

де $Q_s(x)$, $L_s(x)$ – многочлени степеня $s=\max(n,m)$ з невизначеними коефіцієнтами; r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha+\beta i$.

Зауваження. 1. Шукані многочлени $Q_s(x)$ і $L_s(x)$ у формулі (16.6) мають бути повними, тобто містити всі степені x від 0 до s, незалежно від того, чи є повними задані многочлени $P_n(x)$ і $R_m(x)$, причому невизначені коефіцієнти при одних і тих же степенях x у цих многочленах повинні бути, взагалі кажучи, різними.

2. Якщо права частина неоднорідного рівняння не має вказаного вище спеціального вигляду, то таке рівняння розв'язують іншим способом – методом варіацій довільних сталих.

Приклад. Розв'язати рівняння $y''-3y'+2y=8e^{3x}$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2-3k+2=0$ має корені $k_1=1$, $k_2=2$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\overline{y}=c_1e^x+c_2e^{2x}$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_0(x)e^{3x}$, причому $\alpha=3\neq k_1,k_2$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^*=Q_0(x)e^{3x}$, тобто $y^*=Ae^{3x}$, де A – невідомий коефіцієнт.

Знайшовши похідні $(y^*)'=3Ae^{3x}$, $(y^*)''=9Ae^{3x}$ і підставивши їх разом із $y^*=Ae^{3x}$ у рівняння, дістанемо $9Ae^{3x}-9Ae^{3x}+2Ae^{3x}=8e^{3x}$, звідки $A=4$. Тому $y^*=4e^{3x}$ – частинний розв'язок даного рівняння, а $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+4e^{3x}$ – його загальний розв'язок.

Завдання для самоконтролю

1. У чому полягає суть методу пониження порядку диференціального рівняння?
2. Як звести до рівнянь першого порядку рівняння $F(x,y',y'')=0$ та $F(y,y',y'')=0$?
3. Що називається лінійним однорідним (та неоднорідним) рівнянням другого порядку?

4. Яку структуру має загальний розв’язок лінійного однорідного (та неоднорідного) диференціального рівняння другого порядку?
5. Що називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами?
6. Яке рівняння називається характеристичним?
7. Який вигляд має загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння: дійсні і різні? рівні? комплексні?
8. У чому полягає метод підбору частинного розв’язку із спеціальною правою частиною?

Розв’язати рівняння:

9. $y'' = \dfrac{24}{(x+2)^5}$. (Відповідь: $y = \dfrac{2}{(x+2)^3}$).

10. $y'' + tgx \cdot y' = \sin 2x$. (Відповідь: $y = -x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + c_1 \sin x + c_2$).

11. $2(y')^2 = (y-1)y''$. (Відповідь: $(x+c_1)(y-1) = c_2$).

12. $y'' + 4y' + 13y = 0$. (Відповідь: $y = e^{-2x}(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x)$).

13. $y'' + 6y' + 9y = 0$, якщо $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. (Відповідь: $y = 2xe^{-3x}$).

14. $y'' - 2y' + y = 2x + 3$. (Відповідь: $y = e^{x}(c_1 + c_2 x) + 2x + 7$).

15. $y'' + 9y = (54x^2 + 1)e^{3x}$.

(Відповідь: $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \left(3x^2 - 2x + \dfrac{7}{18}\right)e^{3x}$).

16. $y'' - 2y' - 3y = (x+2)e^{3x}$. (Відповідь: $y = c_1 e^{-x} + \left(c_2 + \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{7}{16}x\right)e^{3x}$).

17. $y'' + 4y = 5\sin 2x$. (Відповідь: $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x - \dfrac{5}{4}x\cos 2x$).

Лекція №17. Числові ряди.

Елементарні властивості збіжних рядів. Ряди з невід'ємними членами. Збіжність рядів з довільними членами.

17.1. Елементарні властивості збіжних рядів.

Ряди є тією частиною математичного апарата, яку застосовують для наближених обчислень функції і інтегралів та інтегрувань диференціальних рівнянь, що пов'язані з розв'язуванням практичних задач, в тому числі й економічного змісту.

Нехай $\{u_n\}$ – послідовність дійсних чисел. Рядом називається вираз $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. (17.1)

Цей вираз поки що точного сенсу не має, оскільки нескінченне число додавань здійснити не можна.

Для кожного $n \in N$ покладемо $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Число u_n називається $n-$м членом, а число S_n – $n-$ю частинною сумою ряду (17.1).

Якщо послідовність частинних сум $\{S_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то число S називається сумою ряду (17.1), а ряд називається збіжним. Символічно цей факт записують так: $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$. Якщо ж послідовність $\{S_n\}$ скінченної границі не має, то ряд (17.1) називається розбіжним.

Приклад. Ряди $1+1+\ldots+1+\ldots$ та $1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots$ є розбіжними, оскільки відповідні послідовності їх часткових сум $S_n = n$ і $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0$, ... границі не мають.

Розглянемо деякі властивості збіжних рядів:

1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний і має суму S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ також збіжний і має суму CS ($C = const$).

2. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжні і мають суми відповідно S та σ, то збіжним є також ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ і сума його дорівнює $S + \sigma$.

3. На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.

4. Ряд (17.1) збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) його $n-$й залишок $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

5. Необхідна умова збіжності ряду: якщо ряд (17.1) збіжний, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Дійсно, оскільки $u_n = S_n - S_{n-1}$ і $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, то $\lim_{n\to\infty} u_n = S - S = 0$.

Зауваження. Існують розбіжні ряди, для яких виконується умова $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

6. Достатня умова розбіжності ряду: якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд (17.1) розбіжний.

Справді, якби цей ряд був збіжним, то за властивістю 5 мали б $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, що суперечить умові.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+3}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2 \neq 0$, то виконується достатня умова розбіжності і заданий ряд розбіжний.

17.2. Ряди з невід'ємними членами.

При дослідженні рядів з невід'ємними членами користуються такими достатніми умовами збіжності.

Теорема 1 (ознака порівняння).

Нехай задано ряди

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,\ u_n \geq 0, \tag{17.2}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,\ v_n \geq 0, \tag{17.3}$$

і для всіх n виконується нерівність $u_n \le v_n$. (17.4) Тоді, якщо ряд (17.3) збіжний, то збіжний і ряд (17.2). Якщо ж ряд (17.2) розбіжний, то розбіжний і ряд (17.3).

Доведення. Нехай ряд (17.3) збіжний, тоді існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma$ його частинних сум. Оскільки члени цього ряду невід'ємні, то $\sigma_n \le \sigma$ і з нерівності (17.4) випливає, що $S_n \le \sigma_n \le \sigma$, тобто послідовність $\{S_n\}$ частинних сум ряду (17.2) обмежена зверху. Але члени ряду (17.2) теж невід'ємні і, отже, його частинні суми не спадають. Тоді за теоремою 4 лекції 5 послідовність $\{S_n\}$ має границю, тобто ряд (17.2) збіжний.

Нехай тепер ряд (17.2) розбіжний. Тоді і ряд (17.3) розбіжний, оскільки він не може бути збіжним, тому що це суперечить тільки що доведеному.

Зауваження. 1. Ознака порівняння може застосовуватися і тоді, коли умова (17.4) виконується не для всіх членів рядів (17.2) і (17.3), а лише починаючи з деякого номера. Це випливає з властивості 3.

2. Для порівняння часто використовують ряди: ряд складений з членів геометричної прогресії $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ $\begin{cases} \textit{збіжний при } |q|<1, \\ \textit{розбіжний при } |q|\ge 1 \end{cases}$ та узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ $\begin{cases} \textit{збіжний при } \alpha<1, \\ \textit{розбіжний при } \alpha\ge 1 \end{cases}$. Тут останній ряд при $\alpha = 1$ набуває вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ і називається гармонічним.

Теорема 2 (гранична ознака порівняння).

Якщо задано ряди

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,\ u_n > 0, \qquad (17.5)$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,\ v_n > 0, \qquad (17.6)$$

причому існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = a \ne 0, \infty$, то ці ряди одночасно збіжні або розбіжні.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = a \neq 0,\infty$, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ (візьмемо $\varepsilon < a$) знайдеться номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $\left|\frac{u_n}{v_n} - a\right| < \varepsilon$, звідки

$$(a-\varepsilon)v_n < u_n < (a+\varepsilon)v_n . \tag{17.7}$$

якщо ряд (17.5) збіжний, то з нерівності (17.7) і теореми 1 випливає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a-\varepsilon)v_n$ також збіжний. Тоді, згідно з властивістю 1, ряд (17.6) збіжний.

Якщо ж ряд (17.5) розбіжний, то з нерівності (17.7), теореми 1 і властивості 1 випливає розбіжність і ряду (17.6). Аналогічно, коли ряд (17.6) збіжний (або розбіжний), то збіжним (або розбіжним) буде і ряд (17.5).

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3}$.

Розв'язання. Заданий ряд порівняємо зі збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (тут $\alpha = 2 > 1$): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^3} : \frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2}{n^3} = 2 \neq 0,\infty$. Отже, ряд є збіжним.

Так само, використовуючи означення границі та ознаку порівняння, доводять наступні теореми.

Теорема 3 (ознака Д'Аламбера).

Якщо для ряду (17.5) існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то:

1) ряд збіжний при $l < 1$;

2) ряд розбіжний при $l > 1$.

Зауваження. Якщо $l = 1$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Тоді потрібно застосувати іншу ознаку.

Приклад. Дослідити на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

Розв’язання. Скориставшись ознакою Д’Аламбера, дістанемо: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}:\frac{n^2}{3^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3n^2}=\frac{1}{3}<1$, і заданий ряд збіжний.

Теорема 4 (ознака Коші).

Якщо для ряду (17.5) існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то цей ряд збіжний при $l<1$ і розбіжний при $l>1$.

Приклад. Дослідити на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^n$.

Розв’язання. Застосовуємо ознаку Коші: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+3}=2>1$, тобто заданий ряд розбіжний.

Теорема 5 (інтегральна ознака Коші).

Нехай задано ряд $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ (17.8), члени якого є значеннями неперервної, додатної і монотонно спадної функції $f(x)$ на проміжку $[1,+\infty)$. Тоді ряд (17.8) збіжний, якщо збіжний невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx$, і розбіжний, якщо цей інтеграл розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$.

Розв’язання. Візьмемо функцію $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, $x\in[1,+\infty)$. Тоді матимемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots$. Розглянемо невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{2xdx}{x^2+1}=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln(x^2+1)\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln(b^2+1)+\ln 2=\infty$. Цей інтеграл розбіжний, тому і заданий ряд розбіжний.

17.3. Збіжність рядів з довільними членами.

Вище були розглянуті ряди з невід'ємними членами. Ряди з недодатними членами досліджуються аналогічно, оскільки вони відрізняються від розглянутих лише множником -1, який на збіжність не впливає.

Розглянемо тепер ряд, знаки членів якого строго чергуються, тобто у якого довільні два сусідні члени мають різні знаки:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots,\ u_n > 0. \tag{17.9}$$

Цей ряд досліджується на збіжність за допомогою такої достатньої ознаки.

Теорема 6 (ознака Лейбніца).

Ряд (17.9) збіжний, якщо:

1) $u_n > u_{n+1}$, $n = 1,2,\ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

при цьому сума ряду додатна і не перевищує першого його члена.

Доведення. Розглянемо частинну суму з парним числом членів: $S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n})$.

З першої умови теореми випливає, що кожна різниця в дужках додатна, тому $S_{2n} > 0$ і послідовність $\{S_{2n}\}$ зростає із зростанням n. Крім того, маємо $S_{2n} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) + u_{2n}] < u_1$, тобто послідовність обмежена зверху.

Отже, $\{S_{2n}\}$ монотонно зростає і обмежена, тому має границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \le u_1$.

Враховуючи другу умову теореми, обчислимо границю сум з непарним індексом: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} + u_{2n+1}) = S + 0 = S$.

З співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ випливає, що ряд (17.9) збіжний і його сума $S \le u_1$.

Зауваження. До рядів, знаки яких строго чергуються, належить також і ряд

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + \ldots + (-1)^n u_n + \ldots,\ u_n > 0. \qquad (17.10)$$

Якщо для такого ряду виконуються умови теореми 6, то він збіжний і його сума S від’ємна та задовольняє нерівність $|S| \le u_1$. Ряди (17.9) і (17.10), для яких виконується ознака Лейбніца, називаються лейбніцевого типу.

При наближених обчисленнях широко використовується нерівність $|r_n| \le u_{n+1}$, яка випливає із вказаної теореми.

Ряди, в яких знаки чергуються, є окремим випадком знакозмінних рядів – рядів, що містять нескінченні кількості додатних і від’ємних членів.

Нехай маємо довільний знакозмінний ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots. \qquad (17.11)$$

Одночасно розглянемо ряд, утворений з модулів членів ряду (17.11):

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots. \qquad (17.12)$$

Для знакозмінних рядів справедлива така ознака збіжності.

Теорема 7. Якщо ряд (17.12) збіжний, то збіжний і ряд (17.11).

Зазначена теорема дає лише достатню умову збіжності, оскільки існують знакозмінні ряди, які є збіжними, а ряди, утворені з модулів їхніх членів, розбіжні. У зв’язку з цим всі збіжні ряди можна розділити на абсолютно і умовно збіжні.

Знакозмінний ряд (17.11) називається абсолютно збіжним, якщо ряд (17.12) є збіжним. І ряд (17.11) називається умовно збіжним, коли він сам збіжний, а ряд (17.12) розбіжний.

Розмежування на абсолютно та умовно збіжні ряди є досить істотним: абсолютно збіжні ряди мають низку важливих властивостей скінченних сум, тоді як умовно збіжні ряди такого не мають.

Приклади. 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ є абсолютно збіжним оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, утворений з модулів його членів, збіжний.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ – умовно збіжний, тому що він збіжний за ознакою Лейбніца, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є розбіжним.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається числовим рядом?
2. Який ряд називається збіжним, а який – розбіжним?
3. Як формулюється необхідна умова збіжності ряду?
4. У чому полягає достатня умова розбіжності?
5. Які є достатні ознаки збіжності? Сформулювати їх. Для яких рядів вони застосовні?
6. Для якого ряду застосовна ознака Лейбніца? Сформулювати її.
7. У чому полягає достатня умова збіжності знакозмінного ряду?
8. Який ряд називається абсолютно збіжним? Який ряд називається умовно збіжним?

Дослідити на збіжність ряди:

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5n+3}$. (Відповідь: розбіжний).

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n^3+5}$. (Відповідь: збіжний).

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3^n}$. (Відповідь: збіжний).

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{3n+4}\right)^n$. (Відповідь: розбіжний).

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. (Відповідь: збіжний).

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. (Відповідь: умовно збіжний).

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$. (Відповідь: абсолютно збіжний).

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$. (Відповідь: розбіжний).

Лекція №18. Функціональні ряди.

Степеневий ряд. Теорема Абеля. Ряди Тейлора і Маклорена, їх застосування.

18.1. Степеневий ряд. Теорема Абеля.

Розглянемо функціональні ряди – ряди, членами яких є функції, визначені на деякій множині E:

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x). \qquad (18.1)$$

Поклавши $x=x_0$ в ряді (18.1), де $x_0\in E$, дістанемо числовий ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0). \qquad (18.2)$$

Якщо ряд (18.2) є збіжним, то x_0 називається точкою збіжності функціонального ряду (18.1). Якщо ж ряд (18.2) розбіжний, то x_0 називається точкою розбіжності функціонального ряду (18.1). Множина всіх точок збіжності функціонально ряду називається областю його збіжності.

Частинна сума числового ряду є функція, яка визначається за аналогією з числовими рядами: $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$.

У кожній точці x з області збіжності ряду (18.1) існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$, яку називають сумою функціонального ряду і пишуть: $S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$.

Отже функція $S(x)$ визначена в області збіжності функціонального ряду. Якщо функціональний ряд (18.1) збіжний до функції $S(x)$, то різниця $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ називається n–м залишком ряду: $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$.

Ясно, що для всіх значень x з області збіжності ряду виконується $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$.

Розглянемо тепер окремий випадок функціонального ряду – степеневий ряд:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \qquad (18.3)$$

де дійсні числа a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... – його коефіцієнти.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$, де x_0 – дійсне число, називають функціональний ряд виду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n . \qquad (18.4)$$

Ряд (18.4) заміною змінної $x - x_0 = t$ зводиться до ряду (18.3), тому розглядатимуться лише ряди виду (18.3).

Всякий степеневий ряд (18.3) збіжний в точці $x = 0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності числового ряду завжди містить принаймні одну точку. Дуже важливою в теорії рядів є наступна теорема, яка характеризує множину точок збіжності і множину точок розбіжності степеневого ряду.

Теорема 1 (теорема Абеля).

Якщо степеневий ряд (18.3) збіжний при $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень x, що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$. Якщо ж при $x = x_1$ ряд (18.3) розбіжний, то він розбіжний всюди, де $|x| > |x_1|$.

Доведення. За умовою ряд (18.3) збіжний в точці x_0, тоді збіжним є числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$. Отже, маємо $a_n x_0^n \to 0$ при $n \to \infty$. Звідси випливає, що послідовність $\{a_n x_0^n\}$ обмежена, тобто існує таке число M, що $|a_n x_0^n| \leq M$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Враховуючи, що для $|x| < |x_0|$ величина $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, дістаємо $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leq M q^n$, $n = 0,1,2,\ldots$. Тобто модуль кожного члена ряду (18.3) не перевищує відповідного числа збіжної геометричної прогресії. Тоді за ознакою порівняння при $|x| < |x_0|$ ряд (18.3) абсолютно збіжний.

Нехай тепер ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбіжний при $x = x_1$. Тоді він буде розбіжним і для всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$. Справді, якби він був збіжний в якій-небудь точці x, що задовольняє цю нерівність, то за доведеним вище він був би збіжним і у точці x_1. А це суперечить умові – розбіжності ряду в точці x_1.

Зауваження. З теореми Абеля випливає, що для області збіжності степеневого ряду можливі три випадки: або він збіжний лише в точці $x = 0$, або він збіжний при всіх $x \in (-\infty, +\infty)$, або існує таке додатне число R, що при $|x| < R$ він абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний.

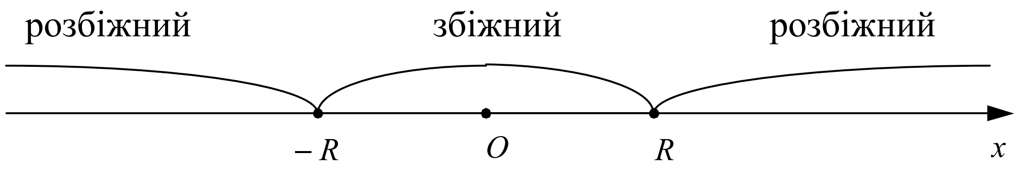


Рис. 18.1

Число R називають радіусом збіжності, а проміжок $(-R, R)$ – інтервалом збіжності.

Визначити радіус збіжності степеневого ряду можна за формулами:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{18.5}$$

Зауваження. 1. Питання про збіжність степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності $\pm R$ розв’язується для кожного ряду окремо. Отже, області збіжності ряду може відрізнятися від його інтервалу збіжності не більше ніж двома точками $\pm R$.

2. Радіус збіжності ряду (18.4) визначається за тими самими формулами (18.5), але інтервал збіжності його має вигляд $(x_0 - R, x_0 + R)$.

3. Інтервал збіжності степеневого ряду можна відшукати за ознаками Д'Аламбера і Коші безпосередньо.

Приклад. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n}$.

Розв'язання. Скористаємось ознакою Д'Аламбера. Тоді маємо: $|u_n(x)| = \frac{|x+3|^n}{n}$, $|u_{n+1}(x)| = \frac{|x+3|^{n+1}}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x+3|^{n+1} n}{|x+3|^n (n+1)} = |x+3| \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x+3|$.

За вказаною ознакою ряд буде абсолютно збіжним, якщо $|x+3| < 1$ або $-4 < x < -2$. Таким чином, маємо інтервал збіжності $(-4,-2)$ і радіус збіжності $R = 1$. Дослідимо цей ряд на збіжність на кінцях інтервалу збіжності.

При $x = -4$ дістанемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4+3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, який є збіжним за ознакою Лейбніца.

При $x = -2$ маємо розбіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2+3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Отже, областю збіжності заданого ряду є проміжок $[-4,-2)$.

Степеневий ряд має такі основні властивості: його можна почленно інтегрувати та диференціювати всередині інтервалу збіжності.

18.2. Ряди Тейлора і Маклорена, їх застосування.

Частковим випадком степеневих рядів є ряд Тейлора.

Для нескінченно диференційовної функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R, x_0 + R)$ розглянемо степеневий ряд виду:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots, \quad (18.6)$$

який – незалежно від того, чи є він збіжний і чи є його сумою функція $f(x)$, – називається рядом Тейлора для функції $f(x)$. Якщо $x_0 = 0$, то цей ряд називається рядом Маклорена.

Як відомо, для функції $f(x)$, яка має похідні всіх порядків, справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \quad (18.7)$$

де так званий залишковий член можна записати у формі Лагранжа: $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $0<\theta<1$.

Якщо для такої функції формально скласти ряд (18.6), то виявляється, що сума ряду (18.6) збігається з функцією $f(x)$.

Теорема 2 (необхідні і достатні умови).

Функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора в інтервалі (x_0-R, x_0+R) тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови: 1) вона має похідні всіх порядків; 2) залишковий член формули Тейлора (18.7) $R_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}0$, $x\in(x_0-R, x_0+R)$.

Наступна теорема дає досить прості достатні умови розкладання функції в ряд Тейлора.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі (x_0-R, x_0+R) має похідні всіх порядків та існує число $M>0$ таке, що $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$, $x\in(x_0-R, x_0+R)$, $n=0,1,\ldots$, де $f^{(0)}(x)=f(x)$, то функцію можна розкласти в ряд Тейлора.

Вказані теореми дають правило розкладання функції в ряд: щоб функцію $f(x)$ розкласти в ряд Маклорена, потрібно:

1) знайти похідні $f'(x)$, $f''(x)$, …;
2) обчислити значення похідних в точці $x=0$;
3) записати ряд Маклорена для функції і знайти інтервал його збіжності;
4) визначити інтервал $(-R, R)$, в якому залишковий член формули Маклорена $R_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}0$.

Якщо такий інтеграл існує і він може відрізнятись від інтервалу збіжності, то в цьому інтервалі функція $f(x)$ і сума ряду Маклорена збігаються: $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$.

Розглянемо ряди Маклорена деяких елементарних функцій.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

Дійсно, нехай $f(x)=e^x$. Тоді маємо:

1) $f^{(n)}(x)=e^x$, $n\in N$;

2) $f^{(n)}(0)=e^0=1$, $n\in N$;

3) $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$, отже, знайдений ряд збігається в інтервалі $x\in(-\infty,+\infty)$;

4) $\left|f^{(n)}(x)\right|\le e^{|x|}<e^R$, $x\in(-R,R)$, тому за теоремою 3 функцію e^x можна розкласти в степеневий ряд на довільному інтервалі $(-R,R)\subset(-\infty,+\infty)$, а отже, і на всьому інтервалі $(-\infty,+\infty)$.

Зазначену формулу доведено. Наступні формули доводяться аналогічно.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\ x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ x\in(-\infty,+\infty);$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\ x\in(-1,1);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\ x\in(-1,1];$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\ x\in[-1,1].$$

Ряди Тейлора широко застосовуються в наближених обчисленнях значень функції, інтегралів та при розв’язанні диференціальних рівнянь.

Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд в інтервалі $(-R,R)$ і $x_0\in(-R,R)$, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при

$x = x_0$, а наближене частинній сумі $S_n(x_0)$. Похибку $|f(x_0) - S_n(x_0)|$ знаходять оцінюючи залишок ряду $r_n(x_0)$, причому для рядів лейбніцевого типу $|r_n(x_0)| = |u_{n+1}(x_0) + u_{n+2}(x_0) + \ldots| < |u_{n+1}(x_0)|$.

Приклад. З точністю до 0,001 обчислити $\sin 18^0$.

Розв'язання. Оскільки $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$, то $\sin 18^0 = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 3!} + \frac{\pi^5}{10^5 5!} - \frac{\pi^7}{10^7 7!} + \ldots \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 3!} \approx 0{,}309$, де $\frac{\pi}{10} > 0{,}001$, $\frac{\pi^3}{10^3 3!} > 0{,}001$, $\frac{\pi^5}{10^5 5!} < 0{,}001$.

Нехай потрібно знайти інтеграл $F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$, який не виражається через елементарні функції, і нехай функцію можна розкласти в степеневий ряд. Тоді для обчислення заданого інтеграла можна скористатись властивістю про почленне інтегрування цього ряду. Похибки визначають так само, як і при обчисленні значень функцій.

Приклад. З точністю до 0,001 обчислити $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx$.

Розв'язання. $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx = \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} =$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{2430} - \ldots \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{81} = \frac{26}{81} \approx 0{,}321$, оскільки $\frac{1}{3} > 0{,}001$, $\frac{1}{81} > 0{,}001$, $\frac{1}{2430} < 0{,}001$.

Якщо диференціальне рівняння не зводиться до квадратур, то його наближено інтегрують, скориставшись рядом Тейлора, тобто розв'язок такого рівняння відшукують у вигляді ряду Тейлора.

Приклад. Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в ряд рівняння $y' = x^2 + y^3$, $y(1) = -1$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок у вигляді ряду Тейлора: $y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots$. Тут маємо $y(1) = -1$, $y'(1) = 1^2 + (-1)^3 = 0$;

$y'' = 2x + 3y^2 y'$, $\quad y''(1) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)^2 \cdot 0 = 2$; $\quad y''' = 2 + 6y(y')^2 + 3y^2 y''$, $\quad y'''(1) = 8$. Отже, $y(x) = -1 + \frac{0}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{8}{3!}(x-1)^3 \approx -1 + (x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3$.

Завдання для самоконтролю

1. Який ряд називається функціональним? Що називається областю його збіжності?
2. Який ряд називається степеневим? Сформулювати теорему Абеля.
3. Які є властивості степеневого ряду?
4. Що називається рядом Тейлора? Що називається рядом Маклорена?
5. В чому полягають достатні умови розкладання функції в ряд Тейлора?
6. Як розкласти в ряд Маклорена функції e^x, $\sin x$, $\cos x$?
7. Як наближено обчислити значення функції або інтеграл за допомогою степеневого ряду?

Знайти область збіжності:

8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3n+1}$. (Відповідь: $[1,3)$).

9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$. (Відповідь: $[-4,-2]$).

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (nx)^n$. (Відповідь: $x = 0$).

11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. (Відповідь: $(-\infty,+\infty)$).

12. Розкласти в ряд функцію: $f(x) = x^2 \ln(1 - x^3)$. (Відповідь: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{-n}$, $x \in [-1,1)$).

Обчислити з точністю 0,001 інтеграли:

13. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{arctgx}{x} dx$. (Відповідь: 0,409).

14. $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$. (Відповідь: 0,098).

15. Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в ряд розв'язку рівняння: $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$. (Відповідь: $y \approx \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8}$).

Література

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: Вища школа,1993. – 648 с.

2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів: Вища математика. – К.: НАУ, 1997. – 398 с.

3. Овчинников П.П., Янемчук Ф.П., Михайленко В.М., Вища математика: підручник: У 2 ч., Ч. 1. – К.: Техніка, 2000. – 592 с.