ДЕФОРМАЦІЯ РІДКОГО ВЯЗКОГО
ТІЛА ПІД ДІЄЮ СИЛ ПОВЕРХНЕВОГО НАТЯГУ

Зінькевич О.П., канд. фіз.-мат. наук.,
Український державний університет харчових технологій
Білоносов С.М., докт. фіз.-мат. наук,
Національний технічний університет «КПІ»

Розглянемо рідке в'язке тіло, яке заповнює при $t \le 0$ (t – момент часу) область $D(0) \subset E_2$. Нехай при $t = 0$ рідина знаходиться в стані спокою, тобто $\vec{v}(y,0) = v_1\vec{e}^1 + v_2\vec{e}^2 \equiv 0.$

Припустимо, що з моменту часу $t = 0$ до границі рідини прикладено сили поверхневого натягу

$$\vec{P}_n(\vec{x},t) = -\alpha\kappa(\delta,t)\vec{n}(\delta,t) \qquad (1).$$

Масові і дотичні сили відповідно в області D і на контурі L припускаємо рівними нулю.

В виразі (1) α –коефіцієнт поверхневого натягу; $\kappa(\delta,t)$–кривизна контуру $L(t)$; $\vec{x} = \{x_1; x_2\}$ – радіус-вектор точок контуру рідини; $\vec{n}(\delta,t)$ – зовнішня нормаль до контуру $L(t)$; $0 \le \delta \le a$, $\vec{n} = n_1\vec{e}^1 + n_2\vec{e}^2$.

Під дією сил поверхневого натягу частинки рідини приходять в рух, утворюючи рухомий контур $L(t)$.

Необхідно визначити $L(t)$ в новий момент часу t, а також швидкість $\vec{v}(\bar{y};t)$ частинок рідини, яка задовольняє у $D(t)$ системі рівнянь Нав'є-Стокса [1]

$$\begin{cases} \mu\Delta\vec{v}(\bar{y},t) - \gamma\dfrac{\partial\vec{v}(\bar{y},t)}{\partial t} - gradP(\bar{y},t) = \bar{0}, \\ div\vec{v}(\bar{y},t) = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Координати $x_k = x_k(\delta,t)$, $(k = 1,2)$ рухомого контуру $L(t)$ зв'язані з розв'язком системи (2) кінематичним співвідношенням

$$\vec{v}(\vec{x}(\delta,t),t) = \vec{e}^k\frac{\partial x_k(\delta,t)}{\partial t} \equiv \vec{v}_0(\delta,t).$$

Тут $\vec{v}(\vec{x},t)$ – вектор швидкості частинок рідини контуру $L(t)$; $\vec{v}_0(\vec{x},t)$ – вектор швидкості точок контуру $L(t)$.

В рівняннях (2) $\mu = const > 0$ – в'язкість рідини; $\gamma = const > 0$ – густина рідини; $P(\vec{y},t)$ – гідродинамічний тиск, $\vec{y} = \{y_1, y_2\} \in D.$

В $[1]$ встановлено загальне інтегральне представлення розв'язку рівнянь (2) для випадку рухомого контуру. На площині це представлення для вектора швидкості має вигляд:

$$\vec{v}(\vec{y},t) = rotrot\int_0^t d\tau \int_{L(\tau)} \{[\vec{P}_n(\vec{x},t) + \gamma(\vec{v}_0(\delta,t)\cdot\vec{n})\vec{v}(\vec{x},\tau)]g_0(r(\tau),t-\tau) -$$

$$-\mu\vec{v}(\vec{x},\tau)\frac{\partial g_0(r(\tau),t-\tau)}{\partial n(\delta,\tau)} + \mu\vec{n}(\vec{v}(\vec{x},\tau)\cdot grad_y g_0(r(\tau),t-\tau))\}ds +$$

$$+ grad\int_{L(t)} \vec{v}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}(\delta,t)\frac{\ln r(t)}{2\pi}ds.$$

Елемент ds контуру L визначається по формулі $ds = \left(\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial x_k(\delta,t)}{\partial\delta}\right)^2\right)^{1/2} d\delta;$

$r(\tau) = |\vec{x}(\delta,\tau) - \vec{x}(\delta,t)|$, $\vec{x}(\delta,\tau)$ і $\vec{x}(\delta,t)$ – відповідно радіус-вектор змінної і фіксованої точок інтегрування:

$$g_0(r(\tau),t-\tau) = -\frac{\ln r}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_\infty^r e^{\frac{-\rho^2\gamma}{4\mu(t-\tau)}}\frac{d\rho}{\rho}.$$

При $\vec{y} \to \vec{x}_0(\delta_0,t)$ задача зводиться до розв'язку системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з початковими умовами $\Theta_1(\delta,0) = \Theta_2(\delta,0) = 0,$ $\vec{x}(\delta,0) = x_0(\delta).$

Тут відповідно позначено $\Theta_1(\delta,t)$ і $\Theta_2(\delta,t)$ – нормальна і дотична складові швидкості точок контура.

Для визначення $\Theta_1(\delta,\tau)$ і $\Theta_2(\delta,\tau)$ запропоновано чисельний метод (метод кроків по часу).

Розглянемо послідовність моментів часу $t_0, t_1 = h, ..., t_k = kh,$ тут $h > 0$ – крок по часі.

Алгоритм розбивається на етапи:

1) Припустимо, що функції $\Theta_i(\delta,t)$ і $x_i(\delta,t)$, $i=1{,}2$ відомі для усіх $t \le t_{k-1}$ і $t \le t_k$ відповідно. Функцію $\Theta_1(\delta,t_k)$ визначаємо із скалярного рівняння Фредгольма другого роду

$$-\frac{1}{2}\Theta_1(\delta_0,t_k)+\int\limits_{L(t_k)}\Theta_1(\delta,t_k)\frac{\cos\omega_0(t_k)}{2\pi r(t_k)}ds=F_1(\delta_0,t_k) \qquad (3)$$

2) Використовуючи обчислену функцію $\Theta_1(\delta,t_k)$, а також відомі функції $x_i(\delta,t)$ (для усіх $t \le t_k$) і $\Theta_2(\delta,t)$ (для усіх $t \le t_{k-1}$), функцію $\Theta_2(\delta,t_k)$ визначаємо по формулі

$$\frac{1}{2}\Theta_2(\delta_0,t_k)=\int\limits_{L(t_k)}\Theta_1(\delta,t_k)\frac{\sin\omega_0(t_k)}{2\pi r(t_k)}ds+F_2(\delta_0,t_k).$$

3) Знаючи $\Theta_i(\delta,t)$ і $x_i(\delta,t)$, знаходимо для моменту $t=t_{k+1}$ функцію $x_i(\delta,t_{k+1})$ по наближеним формулам

$$x_i(\delta,t_{k+1})\approx x_i(\delta,t_k)+(t_{k+1}-t_k)\left(\vec{e}^{\,i}\cdot\sum\Theta_j(\delta,t_k)\cdot\vec{a}_0^{\,j}\right),\ \vec{a}_0^{\,1}=\vec{n}(\delta,t_k),\ \vec{a}_0^{\,2}=\vec{s}(\delta,t_k).$$

Після визначення контуру $x_i(\delta,t_{k+1})$ при необхідності можливо повторити пункти 1)-3) і обчислити функції $x_i(\delta,t_{k+2})$.

Величини $F_1(\delta_0,t_k)$ і $F_2(\delta_0,t_k)$ обчислюються через подвійні інтеграли.

Інтегральне рівняння (3) розв'язується чисельно, шляхом переходу до апроксимуючим системам лінійних алгебраїчних рівнянь. Їх кількість відповідає числу точок дискретизації контуру $L(t)$. Система будується для кожного часу $t=t_k$.

На основі числових розрахунків виконано аналіз руху рідини в залежності від α і μ.

Встановлено: 1) округлий контур деформується в коло, виконуючи затухаючі коливання навколо положення рівноваги;

2) стійкі коливання спостерігаються, якщо $0{,}2<\alpha<3$ при $\mu=0{,}5$ і $0{,}1<\alpha<1{,}6$ при $\mu=0{,}25$; в обох випадках $\gamma=1$.

Література

1. Белоносов С.М., Черноус К.А. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса. – М.Наука, 1985.-312 с.