

*В пищевой промышленности большинство пищевых продуктов, а также некоторые упаковочные материалы многослойные или имеют вкрапления, которые отличаются структурно-механическими свойствами от основного объема продукта. Особенность их резания — увеличение силы сопротивления движений лезвия при его приближении к вкраплению или определенному слою. Разработана методика исследования резания, проведено моделирование движений лезвия в многослойных продуктах, проведены экспериментальные опыты. Получен ряд математических моделей резания в виде дифференциальных уравнений второго порядка, которые позволяют определить силу резания и скорость лезвия в продукте. Приведены рекомендации выбора режимов движения режущего инструмента, его ориентации относительно слоев продукта.*

## **РЕЗАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ПРОДУКТОВ В ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ**

Национальный университет пищевых технологий, г. Киев, Украина

*В. С. Гуць, доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой безопасности жизнедеятельности;*

*А. А. Губеня, кандидат технических наук, доцент кафедры машин  
и аппаратов пищевых и фармацевтических производств;*

*С. Г. Метлев, ассистент кафедры информатики*

В пищевой промышленности механическая обработка резанием применяется не только для продуктов, однородных по всему объему (сахарная свекла, мясо без косточек, кондитерские массы и т. д.). Многие продукты имеют неоднородную структуру, включая в себе вкрапления или оболочку, свойства которых отличаются от основной массы продукта (рис. 1). Например, это мясопродукты, которые имеют прослойки из жилистых тканей, шкуры и косточек. Овощи, которые имеют прочную наружную оболочку. Хлебные изделия, которые состоят из мякиша и прочной корочки. Следует учесть, что многослойными являются многие упаковочные материалы: гофрированный картон [3], упаковочные полимерные пленки (рис. 2), ПЭТ-бутылки [4]. Слои этих продуктов связаны между собой, и имеют разную прочность.

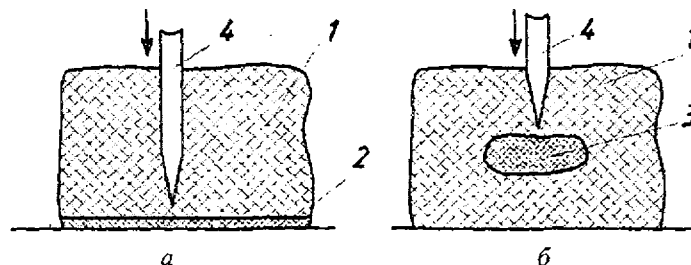


Рис. 1. Резание продуктов с неоднородной структурой: а — продукт с оболочкой; б — продукт с вкраплениями; 1 — продукт; 2 — оболочка; 3 — вкрапления; 4 — лезвие

Аналитические исследования существующих моделей резания показали, что наличие вкраплений или оболочки в продукте не учитывались при моделировании и оптимизации процесса резания: выбора режимных параметров процесса, разработки режущего оборудования.

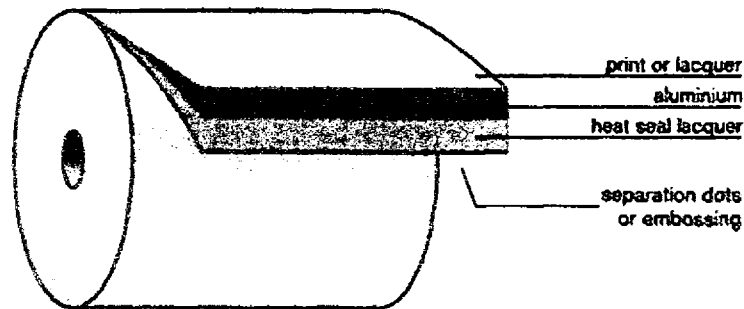


Рис. 2. Многослойная пленка

Экспериментальные данные доказывают [1, 2], что резание продуктов с оболочкой значительно отличается от резания однородных по структуре продуктов. При приближении лезвия к оболочке или вкраплению возникает кратковременное увеличение силы резания, нагрузка на лезвие становится пульсирующей, вследствие чего уменьшается его износостойкость, ухудшается качество поверхности среза. Следует отметить, что на изменения силы резания существенно влияет размещение оболочки в продукте — она может быть при входе или выходе лезвия из продукта, или располагаться внутри.

Для определения закономерностей резания неоднородных по структуре продуктов проведены аналитические и экспериментальные исследования.

#### Методика исследований.

Методика аналитических исследований предусматривает:

- ♦ анализ механизма движения лезвия в продукте под действием приложенных сил;
- ♦ разработка математических моделей движений лезвия в продукте на основании дифференциальных уравнений второго порядка;
- ♦ определение коэффициентов моделей резания;
- ♦ практические рекомендации по применению моделей для определения силы резания экспериментальной установки на базе физического маятника [1] (рис. 3). На торце коромысла 2 закреплено лезвие 4, которое при движении коромысла разрезает продукт 6.

Скорость лезвия и его кинетическая энергия легко изменяются в значительных границах путем запуска коромысла под разным углом и изменением положения груза 3.

Скорость лезвия определена на основании дифференциальных уравнений движения коромысла. В результате получена формула

$$V = R \sqrt{2 \frac{\sum P_i r_i}{J} (1 - \cos \beta)},$$

где  $P_i$  — масса каждой детали коромысла;  $r_i$  — расстояние от центра массы детали до оси вращения коромысла;  $\beta$  — угол запуска или подъема коромысла;  $R$  — длина коромысла;  $J$  — момент инерции всех деталей коромысла.

Определяем скорость входа и выхода лезвия из продукта при разных углах  $\alpha$  запуска коромысла. Полученные экспериментальные данные используем для определения силы резания и коэффициентов математических моделей резания разных по свойствам продуктов.

**Моделирование резания однородных продуктов.** В случае нарезания продукта, который имеет однородную структуру по всему объему, на лезвия действуют силы:

- ♦ резания  $F_r$ ;
- ♦ трения:

$$G = C + k_1 V = C + k_1 \frac{dy}{dt};$$

- ♦ инерции:

$$P_i = ma = \frac{md^2y(t)}{dt^2},$$

где  $C, k_1$  — коэффициенты, которые характеризуют трение;  $y, V, a$  — перемещение, скорость и ускорение лезвия в продукте.

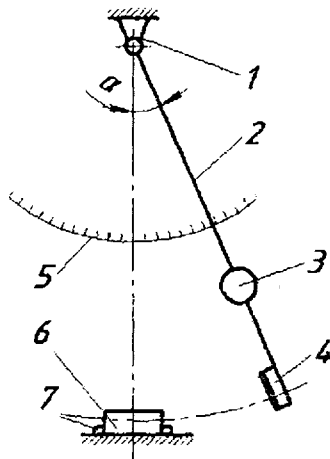


Рис. 3. Схема установки для определения силы резания: 1 — станина; 2 — коромысло; 3 — груз; 4 — лезвие; 5 — шкала; 6 — продукт; 7 — фиксатор

Запишем дифференциальное уравнение движения лезвия и раскроем силы:

$$F_r + G + P_i = 0 \Rightarrow F_r + (C + k_1 \frac{dy(t)}{dt}) + m \frac{d^2y(t)}{dt^2} = 0. \quad (1)$$

Решив уравнение и проверив некоторые превращения, получаем уравнение для определения силы резания в зависимости от скорости лезвия и свойств продукта:

$$F_r = \frac{k_1 \frac{dy(t)}{dt} - e^{-\frac{k_1 t}{m}} (C + V_{\text{ув}} k_1) + C}{e^{\frac{k_1 t}{m}} - 1}. \quad (2)$$

Подробный анализ уравнения (2) и полученных результатов показаны в работе [1].

**Моделирование резания неоднородных по объему продуктов.** Особенностью резания неоднородных по объему продуктов, которые имеют вкрапления или оболочку, является то, что при приближении лезвия к оболочке возникает кратковременная действующая (мгновенная) сила.

Для таких продуктов уравнение движения лезвия будет таким:

$$F_r + G + P_i + F_M = 0, \quad (3)$$

где  $F_M$  — мгновенная сила, которая действует в течении короткого периода времени и направлена на разрушение хрупкой структуры оболочки и других включений, которые могут располагаться в любом месте продукта.

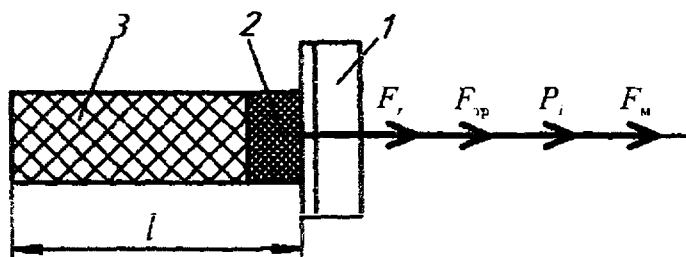


Рис. 4. Силы, которые действуют на лезвие: 1 — лезвие; 2 — оболочка; 3 — продукт

Если вкрапление размещено не на поверхности продукта, а в его внутренней части (рис. 1, б), дифференциальное уравнение движения лезвия имеет вид

$$F_r + (c_1 x + k_1 \frac{dy(t)}{dt}) + m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + F_M = 0, \quad (4)$$

где  $F_M$  — кратковременно действующая (мгновенная) сила;

$$F_M = k e^{-(t-a)^2}, \quad (5)$$

где  $k$  — коэффициент, который характеризует сопротивления вкрапления. Его значения зависят от прочности вкрапления;  $a$  — коэффициент, который определяет расположение вкрапления в продукте.

На рис. 5 показано влияние коэффициентов  $k$  и  $a$  на силы и расположение вкрапления в продукте.

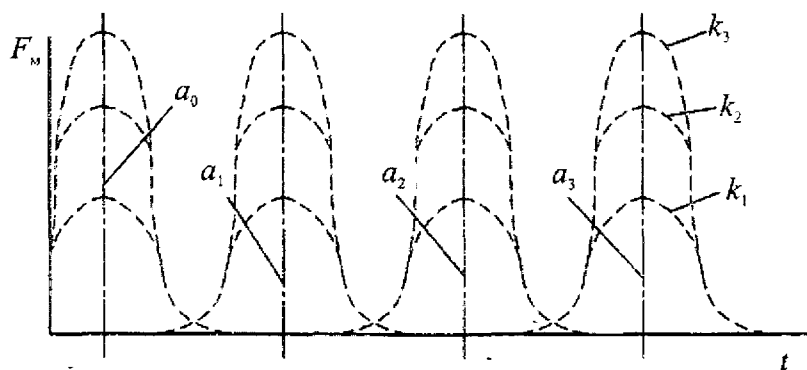


Рис. 5. Влияние коэффициентов  $k$  и  $a$  на мгновенную силу и расположение вкраплений в продукте

$$a_3 > a_2 > a_1, k_3 > k_2 > k_1$$

На размеры вкрапления влияет показатель степени  $n$  (рис. 6).

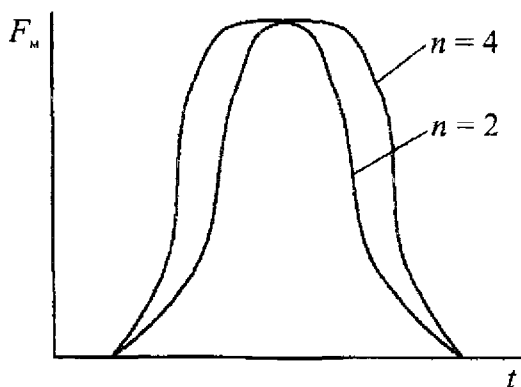


Рис. 6. Влияние величины показателя степени  $n$  на размеры вкрапления

Подставим  $F_M$  в уравнение (4) и получим его решение. При начальных условиях  $t = 0 \Rightarrow x(0)=0, V(0)=V_0$ :

$$y(t) = \frac{m(F_r + C)(1 - e^{-\frac{k_1 t}{m}})}{k_1^2} + \frac{1}{2}(2mV_0(1 - e^{-\frac{k_1 t}{m}}) + \sqrt{\pi}(\operatorname{erf}(-t+a) - \operatorname{erf}(a)) + e^{\frac{(-1/\sqrt{4\frac{k_1(t-a)^2 - k_1 + 4(m-1)}}{m^2})}}(\operatorname{erf}(\frac{1}{2}\frac{k_1}{m} + a) - \operatorname{erf}(-t + \frac{1}{2}\frac{k_1}{m} + a)))k - 2t(F_r + C))/k_1. \quad (6)$$

После дифференцирования, найдем скорость резания:

$$V = \frac{(F_r + C)e^{-\frac{kt}{m}}}{k_1} + (V_0 k_1 e^{-\frac{kt}{m}} + (-e^{-(t+a)^2} - \frac{\sqrt{\pi} k_1 e^{-\frac{k_1(-4am-k_1+4tm)}{4m^2}} (\operatorname{erf}(\frac{1}{2} \frac{k_1}{m} + a) - \operatorname{erf}(-t + \frac{1}{2} \frac{k_1}{m} + a))}{2m} + e^{-\frac{k_1(-4am-k_1+4tm)}{4m^2}} e^{-(-t+1/2 \frac{k_1}{m} + a)^2}) k - F_p - C) / k_1. \quad (7)$$

Из уравнения (7) находим силы резания:

$$F_r = \frac{1}{2} (2Vm k_1 - 2e^{-\frac{kt}{m}} m C - 2V_0 k_1 e^{-\frac{kt}{m}} m + 2ke^{-(t+a)^2} m + k k_1 e^{-\frac{k_1(4am+k_1-4tm)}{4m^2}} \sqrt{\pi} (\operatorname{erf}(\frac{k_1 + 2am}{2m}) - \operatorname{erf}(\frac{-2tm + k_1 + 2am}{2m}))) - 2ke^{-\frac{k_1(4am+k_1-4tm) - (-2tm+k_1+2am)^2}{4m^2}} m + 2Cm) / (m(e^{-\frac{kt}{m}} - 1)). \quad (8)$$

Полученные уравнения сложны для аналитического анализа и при выполнении практических расчетов требуют использования компьютерных методов символьной математики.

В случае, если на поверхности продукта расположена прослойка (оболочка, корочка, упаковочная пленка), мгновенная сила может изменяться по таким законам:

$$F_m = B e^{-bt} \quad (9)$$

или

$$F_m = A e^{-b(\ln t)^2}. \quad (10)$$

Изменение мгновенной силы во времени показано на рис. 7. Графически она изображается как быстро спадающая зависимость, и интервал времени ее действия  $0 - t_1$  значительно меньше, чем продолжительность движения лезвия в продукте.

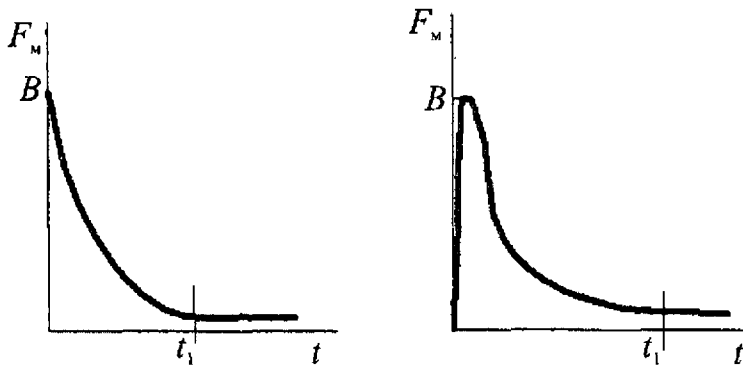


Рис. 7. Изменение мгновенной силы по времени

При  $F_m = B e^{-bt}$  дифференциальное уравнение движения лезвия:

$$F_r + (C + k_1 \frac{dy(t)}{dt}) + m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B e^{-bt} = 0. \quad (11)$$

Решив уравнение, при начальных условиях ( $t = 0 \Rightarrow x(0) = 0, V(0) = (V_0)$ ) получаем значение перемещения (12) скорости лезвия (13) в продукте и силу резания (14):

$$y(t) = \frac{m(1 - e^{-\frac{kt}{m}})(V_0 k_1 + C + F_r)}{k_1^2} + \frac{k_1 \{ B(1 - e^{-(bt)}) + bt(C + F_r) \} - mb(bt(C + F_r) + B(1 - e^{-\frac{kt}{m}}))}{(mb - k_1)k_1 b}; \quad (12)$$

$$V(t) = \frac{e^{-\frac{kt}{m}} (V_0 k_1 + C + F_r)}{k_1} + \frac{k_1 (B b e^{(-bt)} + b(C + F_r)) - mb(b(C + F_r) + \frac{B k_1 e^{-\frac{kt}{m}}}{m})}{(mb - k_1) k_1 b}; \quad (13)$$

$$F_r = \frac{V k_1 m b - V k_1^2 + e^{-\frac{kt}{m}} (-V_0 k_1 m b + V_0 k_1^2 - m b C + B k_1) + k_1 C - k_1 B e^{(-bt)} - k_1 C + C b m}{e^{-\frac{kt}{m}} (m b - k_1) + k_1 - m b}. \quad (14)$$

На рис. 8 показано, как изменяется мгновенная сила в зависимости от коэффициента  $B$ , на который, в свою очередь, влияют прочность и структурно-механические свойства оболочки.

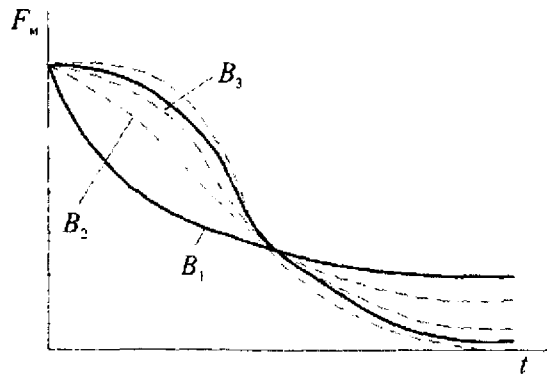


Рис. 8. Зависимость мгновенной силы  $F_m$  от показателя степени  $B$

Определив скорость лезвия и силы резания, определяем мощность резания как произведение силы резания на скорость лезвия:

$$N = F_{rn} \frac{dy(t)}{dt}, \quad (15)$$

где  $F_{rn}$  — максимальная сила резания.

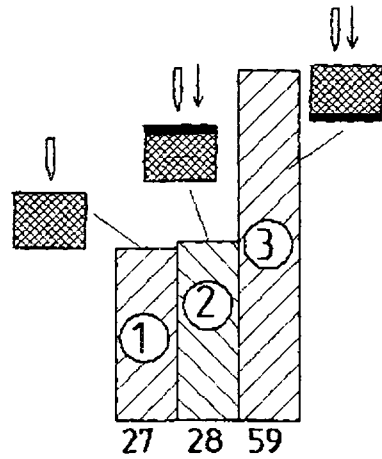
В случае, если мгновенная сила  $F_m = A e^{-B(\ln r)^2}$ , то уравнение движения лезвия:

$$F_r + (C + k_1 \frac{dy(t)}{dt}) + m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + A e^{-B(\ln r)^2} = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) сложно решить с помощью специальных программных пакетов, так как решение включает специфические математические функции, которые неудобны при практическом использовании. Можно рекомендовать использовать приближенные числовые методы. Например, получить решение ввода сходящегося ряда. Изменение силы резания при наличии оболочки подтверждено экспериментально. Согласно уравнению (2) получена сила резания мяса с жилистой прослойкой. Прослойка находилась на входе или выходе лезвия из продукта. Сила резания отдельно жилистой прослойки настолько мала, что не фиксировалась приборами, но при резке мяса с прослойкой средняя сила резания увеличивается при размещении прослойки на выходе лезвия из продукта (рис. 9).

Адекватность полученных моделей подтверждена и для непищевых продуктов. Например, наличие тонкой полимерной пленки на картоне увеличивает силу его резания в 20–50 раз при условии размещения пленки на выходе лезвия.

Получить точные результаты для пищевых продуктов сложно, так как они не обладают постоянными свойствами, поэтому как предмет исследований резания оболочковых материалов мы использовали модельное тело — пористый пенопласт. Роль оболочки выполняет наклеенная тонирующая пленка. Пенопласт по своей структуре — вязко-упругое тело, как и большинство пищевых продуктов. Получена зависимость усилия его резания от расположения оболочки (рис. 10).



Удельная сила резания, кН/м

Рис. 9. Зависимость силы резания мяса от размещения жилистой прослойки: 1 — без прослойки; 2 — прослойка на входе в продукт; 3 — прослойка на выходе лезвия из продукта

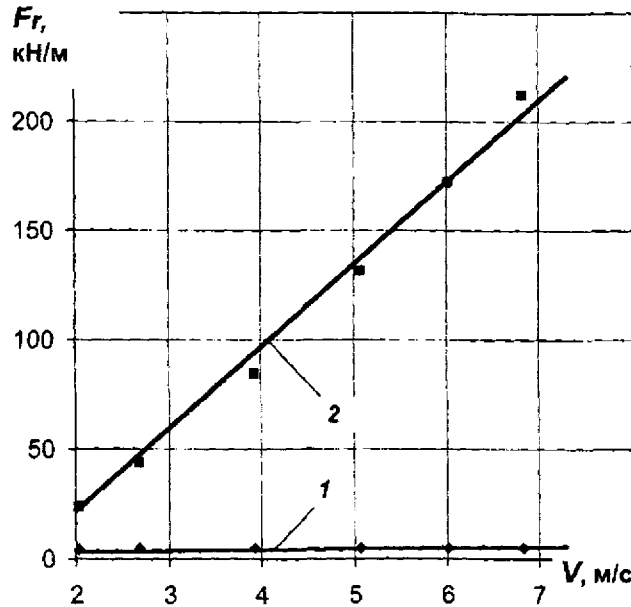


Рис. 10. Зависимость удельной силы резания пористого пенопласта от скорости резания: 1 — оболочка на входе лезвия в продукт; 2 — на выходе лезвия с продукта

Расположение оболочки на выходе лезвия с продукта увеличивает силу резания в 50 раз по отношению к случаю, когда оболочка располагается на входе лезвия в продукт или отсутствует. Работа, затраченная на резание непосредственно оболочки в данном случае очень мала, но если оболочка расположена на выходе лезвия, она создает сопротивление деформированию продукта при внедрении лезвия (рис. 11). При этом на боковую поверхность лезвия действует большое давление, возникает значительная сила трения. Экспериментально подтверждено, что наибольшее сопротивление движению лезвия возникает при его максимальном приближении к оболочке. В случае резания модельного тела, это расстояние составляет 0,5–1 мм. Например, средняя сила резания модельного тела при толщине пенопласта 0,5 мм составила 82 кН/м, при толщине 2 мм — 83 кН/м, 20 мм — 85 кН/м (при скорости лезвия 5 м/с). Такую закономерность объясняет экспоненциальная зависимость мгновенной силы  $F_m$  от времени резания  $t$  (формулы (9), (10), рис. 6).

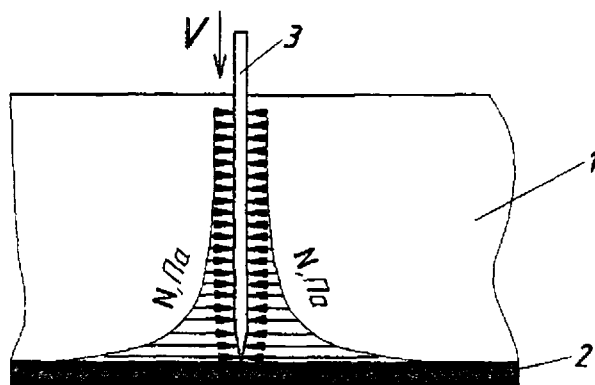


Рис. 11. Изменение давления  $N$  на поверхность ножа при приближении к оболочке:  
1 — продукт; 2 — оболочка; 3 — нож

На основании вышесказанного сделан вывод, что структура продукта влияет на силу резания. Наличие оболочки и ее расположение на выходе лезвия из продукта значительно увеличивает силу резания, поэтому так нарезать продукт нерационально.

Рассмотрим рациональные способы ориентации режущих рабочих органов для различных способов резания продуктов с оболочкой.

При нормальном рубящем резании продуктов оболочка должна находиться на входе лезвия в продукт (рис. 12, а). При этом нож легко разрезает оболочку, и в дальнейшем она не препятствует деформации продукта при движении ножа.

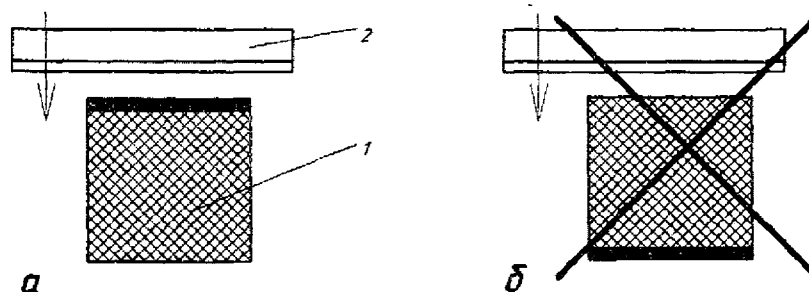


Рис. 12. Ориентация ножа и продукта при рубящем нормальном резании:  
1 — продукт с оболочкой; 2 — лезвие

Правильное расположение ножа при рубящем резании под углом (рис. 13) также позволяет снизить усилие резания. При схеме, показанной на рис. 13 (а), вначале разрезается оболочка, а за ней — основная масса продукта. На схеме рис. 12 (б) оболочка постоянно будет находиться на выходе лезвия, создавая большое сопротивление деформации, а следовательно, увеличивать силы трения.

При резании дисковым ножом (рис. 14) по схеме а, когда ось вращения ножа размещена над продуктом, вначале разрезается оболочка. Если ось вращения (рис. 14, б) находится ниже оболочки (как и в предыдущих схемах), возникает дополнительное трение.

Аналогично выбирается ориентация продукта при резании ленточным зубастым ножом (рис. 15). Следует заметить, что увеличение боковой нагрузки на поверхность ножа (рис. 15, б) приводит к искривлению зубцов и отклонению ножа от правильного направления движения. Продукт при этом значительно деформируется.

Известно, что наименьшая сила сопротивления движению лезвия возникает при рубящем резании.

В случаях резания дисковым или ленточным ножами возникает дополнительное скольжение продукта по их боковым поверхностям. Увеличение боковой нагрузки на нож при его приближении к оболочке еще более негативно влияет на процесс резания, так как сила трения усиливается многократно по сравнению с рубящим резанием.



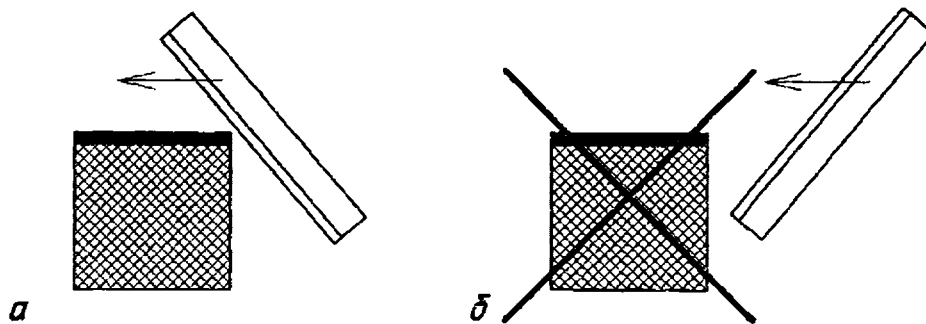


Рис. 13. Ориентация ножа и продукта при рубящем резании под углом

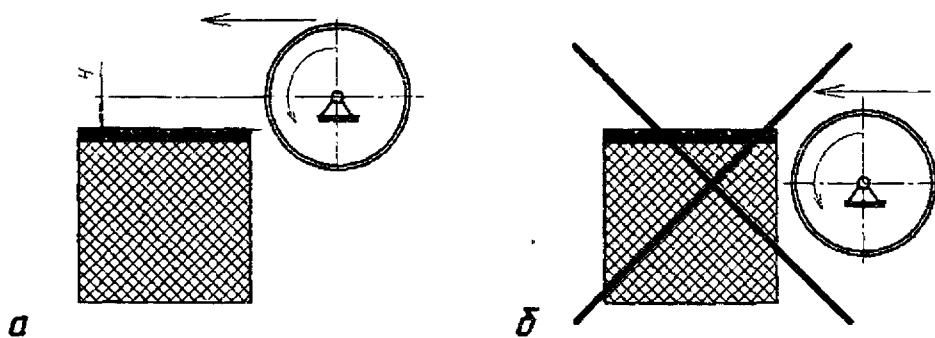


Рис. 14. Ориентация ножа и продукта при скользящем резании дисковым ножом

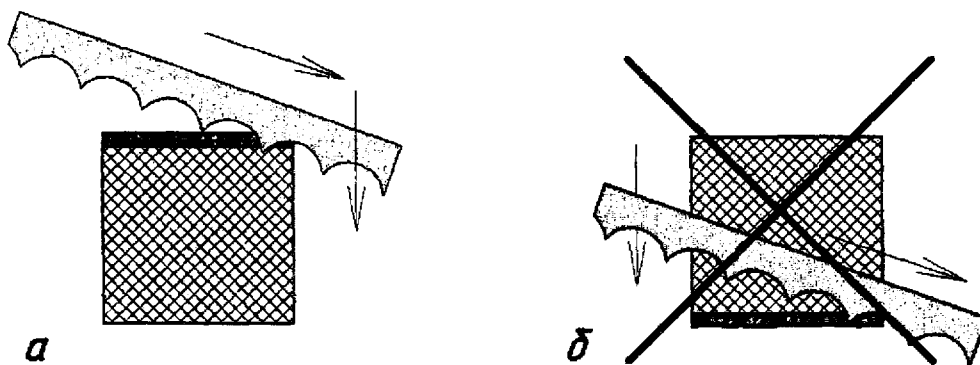


Рис. 15. Ориентация ножа и продукта при резании ленточным зубчатым ножом

#### Выводы:

- 1) сила резания продуктов с оболочкой или вкраплениями, а также качество поверхности среза зависят от расположения оболочки относительно движения лезвия;
- 2) получен ряд математических моделей движения лезвия в неоднородных по структуре продуктах. Модели позволяют определить силы, рациональные режимы и способы резания;
- 3) выполнение приведенных рекомендаций по выбору ориентации режального инструмента при резке многослойных продуктов позволяют обеспечить высокое качество резания при низких затратах энергии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гуць, В. С. Методика определения усилия резания пищевых продуктов / В. С. Гуць, А. А. Губеня // Вестник Могилевского государственного университета продовольствия. — 2009. — № 2. — С. 102–107 [Беларусь].

2. *Гуцъ, В.* Определение усилия резания продуктов с разными структурно-механическими свойствами / В. Гуцъ, А. Губеня // Научни трудове на УХТ, том 57, свитък 2. — Пловдив — 2010. — С. 411–416 [Болгария].

3. *Господинов, Д.* Моделиране на вълнообразен картон с използване на метода на крайните елементи / Д. Господинов, В. Хаджийски, С. Стефанов // Научни трудове на Русенския университет [Болгария]. — 2010. — Том 49, серия 9.2. — С. 114–119.

4. *Стефанов, С.* Състояние и тенденции при производството на PET бутилки / С. Стефанов, Ч. Саздов // ХВП [Болгария]. — 2009. — № 6.

*Рукопись статьи поступила в редакцию 31.10.2011*

**V. Guts, A. Gubenja, S. Metlev**

### **MULTILAYERS PRODUCTS CUTTING IN FOOD INDUSTRY**

In the food industry most food products and some packaging materials are laminated, or have inclusions that are different structural and mechanical properties of the main volume product. Feature cutting such products — increase efforts at resistance movement blade to approaching blotches or a layer. The technique of cutting research, conducted modeling the blade in multilayer products, conducted experimental research. In the results obtained a number of mathematical models of cutting in the form of second order differential equations that allow to determine the cutting force and speed of the blade in the product. Provides recommendations for cutting tool modes of motion, its orientation relative to the product layers.

Keywords: cutting food, cutting conditions, mathematical modeling, multi-layer products.