УДК 539.3.
Мартиненко М.А.[1], д.ф.–м.н., проф.

Перша основна задача теорії пружності для тіла з циліндричною тріщиною

Аналітичними методами лінійної теорії пружності розв'язано осесиметричну задачу про напружено – деформівний стан просторового тіла ослабленого математичним розрізом по частині циліндричної поверхні. Задачу зведено до системи двох інтегральних рівнянь Фредгольма.

Ключові слова: просторове пружне тіло, циліндричний розріз, система рівнянь Фредгольма.

[1]Національний Університет Харчових Технологій, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 68
e-mail: matemat@nuft.edu.ua

Martynenko M.A.[1], Dr. Sci. (Phys. – Math), prof.

The first major task of the theory of elasticity for a body with a cylindrical crack

Analytical methods of the linear elasticity theory solved oxisymmetric problem of the stress - strain state space mathematical body relaxed cut on a cylindrical surface of the part. The problem is reduced to a system of two Fredholm integral equations.

Key words: spatial elastic body, cylindrical section, system of equations Fredholm

[1]National University of Food Technologies, 68, Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine, 01601

e-mail: matemat@nuft.edu.ua

Вступ

Сучасний комплексний розрахунок на міцність і надійність елементів конструкцій з позиції статичної лінійної механіки руйнування включає три основні етапи:

а) розрахунок напружено-деформівного стану тіла з тріщиною відомої геометрії, яка знаходиться у заданому полі зовнішніх сил;

б) визначення тріщиностійкості чи в'язкості руйнування;

в) вибір критерію руйнування і оцінки міцності конструкцій.

Ця робота присвячена аналізу напружено-деформівного стану просторового тіла, яке послаблене циліндричною тріщиною. Важливе значення такі дослідження мають для оцінки надійності композитних матеріалів типу матриця-циліндричні волокна. В таких матеріалах досить часто спостерігається розрив соцільності на міжфазовій межі, внаслідок чого відбувається послаблення конструкції в цілому. З математичних позицій таке дослідження досить важливе, як метод розв'язання мішаних задач математичної фізики.

Нехай на пружний простір з математичною тріщиною, яка лежить на поверхні $S(\rho=\rho_0;|z|\le z_0;0\le\varphi\le 2\pi;\rho,z,\varphi-$ циліндричні координати), діє осесиметрична система сил на нескінченності. Відповідно до принципу Бюлнера [1] зовнішні сили переносяться на поверхню тріщини і в подальшому задача зводиться до знаходження полів переміщень і зусиль, які задовольняють граничним умовам.

$$R_\rho^{(1)}=-R_\rho^{(2)}=f_1(\xi),\ Z_\rho^{(1)}=-Z_\rho^{(2)}=f_2(\xi),$$
$$\left(|\xi|<1,\ s=s_0\right), \qquad (1)$$
$$R_\rho^{(1)}=-R_\rho^{(2)},\ Z_\rho^{(1)}=-Z_\rho^{(2)},\ u_\rho^{(1)}=u_\rho^{(2)},\ u_z^{(1)}=u_z^{(2)},$$
$$\left(|\xi|>1,\ s=s_0\right) \qquad (2)$$

де $R_\rho, Z_\rho, u_\rho, u_z$ – проекції векторів зусиль і переміщень на поверхні циліндра; верхні індекси визначають фізичні поля у внутрішніх $(\rho\le\rho_0)$ і зовнішніх $(\rho\ge\rho_0)$ областях по відношенні до поверхні циліндра; $\xi=\dfrac{z}{z_0}$ і $s=\dfrac{\rho}{z_0}$ – безрозмірні координати; $f_1(\xi)=f_1(-\xi),\ f_2(-\xi)=-f_2(\xi)$ – задані зусилля на поверхні тріщини.

Складові напружено – деформівного стану у внутрішній області $(s<s_0)$ записуються у вигляді інтегралів Фур'є [2], [3].

$$2Gu_\rho^{(1)}=-z_0\int_0^\infty\left[b(\lambda)\lambda I_1(\lambda s)+B(\lambda)\lambda s I_0(\lambda s)\right]\cos\lambda\xi d\lambda$$

© М.А. Мартиненко 2013

$$2Gu_z^{(1)} = z_0\int_0^\infty \{\lambda b(\lambda)I_0(\lambda s) + B(\lambda)[\lambda s I_1(\lambda s) + + 4\frac{m-1}{m}I_0(\lambda s)\}\sin\lambda\xi d\lambda \quad (3)$$

$$R_\rho^{(1)} = -\int_0^\infty \left\{ b(\lambda)\lambda^2\left[I_0(\lambda s) - I_1(\lambda s)/\lambda s\right] + +\lambda B(\lambda)\left[\frac{m-2}{m}I_0(\lambda s) + \lambda s I_1(\lambda s)\right]\right\}\cos\lambda\xi d\lambda$$

$$Z_\rho^{(1)} = \int_0^\infty \{\lambda b(\lambda)I_1(\lambda s) + B(\lambda)\times \times\left[\lambda s I_0(\lambda s) + 2\frac{m-1}{m}I_1(\lambda s)\right]\}\lambda\sin\lambda\xi d\lambda$$

$$Z_z^{(1)} = \int_0^\infty \{\lambda b(\lambda)I_0(\lambda s) + B(\lambda)\times \times\left[\lambda s I_1(\lambda s) + 4\frac{m-0,5}{m}I_0(\lambda s)\right]\}\lambda\cos\lambda\xi d\lambda. \quad (4)$$

де G, m – модуль зсуву і число Пуассона , $b(\lambda), B(\lambda)$ – невідомі щільності; $I_0 = I_0(\lambda s), I_1 = I_1(\lambda s)$ – модифіковані функції Бесселя першого роду.

Ці ж складові в області $V_2(s > s_0)$ визначаються рівностями (3), (4), тільки в них необхідно I_n замінити відповідно модифікованим функціям Бесселя третього роду (функціями Макдональда) $K_0(\lambda s), [-K_1(\lambda s)]$ [4], невідомі щільності $b(\lambda), B(\lambda)$ щільностями $a(\lambda), A(\lambda)$ і в проекціях R_ρ, Z_ρ загальний знак поміняти на протилежний.

Умова неперервності зусиль на всій поверхні циліндра $s = s_0$ дозволяє виключити із подальшого розгляду невідомі щільності, наприклад, внутрішньої задачі

$$b(\lambda) = \frac{1}{\lambda\Delta}\{\lambda a(\lambda)\times \times\left[\lambda^2 s_0^2(I_0K_0 + I_1K_1) + 2\frac{m-1}{m}(I_1K_1 + 1)\right] + +A(\lambda)\left(2\frac{m-1}{m}\frac{m-2}{m} - \lambda^2 s_0^2\right)\} \quad (5)$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\Delta}\{-\lambda a(\lambda) + A(\lambda)\times \times\left[2\frac{m-1}{m}(K_1I_1 - 1) + \lambda^2 s_0^2(I_0K_0 + I_1K_1)\right]\}$$

де

$$\Delta = \lambda^2 s_0^2\left[\left((I_0)^2 - (I_1)^2\right)\right] - -2\frac{m-1}{m}(I_1)^2, I_n = I_n(\lambda s_0), K_n = K_n(\lambda s_0) \quad (6)$$

Визначник Δ (6) досліджувався в роботах [5], [6], де відмічається, що він не дорівнює нулеві.

Задовольняючи граничні умови (1), (2) приходимо до взаємопов'язаної системи парних інтегральних рівнянь з тригонометричними ядрами

$$2G(u_\rho^{(1)} - u_\rho^{(2)})z_0^{-1} = = -2\frac{m-1}{m}\int_0^\infty A_1(\lambda, s_0)\cos\lambda\xi d\lambda = 0 \quad (7)$$

$$2G(u_z^{(1)} - u_z^{(2)})z_0^{-1} = 2\frac{m-1}{m}\times \times\int_0^\infty A_2(\lambda, s_0)\frac{1}{\Delta}\{\lambda a(\lambda)\sin\lambda\xi d\lambda = 0, (\xi > 1)$$

$$\int_0^\infty \{\lambda a(\lambda)(K_0 + K_1/\lambda s_0) + +A(\lambda)\left(\frac{m-2}{m}K_0 - \lambda s_0 K_1\right)\}\lambda\cos\lambda\xi d\lambda = -f_1(\xi),$$

$$\int_0^\infty \left\{\lambda a(\lambda)K_1 - A(\lambda)\left(\lambda s_0 K_0 - 2\frac{m-1}{m}K_1\right)\right\}\times \times\lambda\sin\lambda\xi d\lambda = -f_2(\xi), (\xi<1). \quad (8)$$

$$A_1(\lambda, s_0) = \frac{1}{\Delta}\left[\lambda a(\lambda)I_1 + A(\lambda)\left(2\frac{m-1}{m}I_1 - \lambda s_0 I_0\right)\right]$$

$$A_2(\lambda, s_0) = \frac{1}{\lambda s_0\Delta}\{\lambda a(\lambda)(I_1 - \lambda s_0 I_0) + A(\lambda)\times \times\left[(4\frac{m-1}{m} + \lambda^2 s_0)I_1 - 3\frac{m-2}{m}\lambda s_0 I_0\right]\} \quad (9)$$

Розв'язок системи (7), (8) шукаємо у вигляді спеціально побудованих інтегральних операторів

$$A_1(\lambda, s_0) = \int_0^1 \varphi(t)J_0(\lambda t)dt = S_1,$$

$$A_2(\lambda, s_0) = \int_0^1 \psi(t)J_1(\lambda t)dt = S_2, \quad (10)$$

де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ і їх похідні неперервні при $0 \le t \le 1$.На підставі інтегралів [7]

$$\int_0^\infty \cos\tau z J_0(\tau t)dt = \frac{H(t-z)}{\sqrt{t^2 - z^2}};$$

$$\int_0^\infty \sin\tau z J_1(\tau t)d\tau = \frac{z}{t}\frac{H(t-z)}{\sqrt{t^2 - z^2}}; \quad (11)$$

рівняння [7] задовольняються тотожно. Після розв'язку системи [10] невідомі щільності запишуться у вигляді

$$\lambda a(\lambda) = -\left[\left(4\frac{m-1}{m} + \lambda^2 s_0{}^2\right) I_1 - 3\frac{m-2}{m}\lambda s_0 I_0\right] S_1 + \left(2\frac{m-1}{m} I_1 - \lambda s_0 I_0\right)\lambda s_0 S_2;$$

$$A(\lambda) = (I_1 - \lambda s_0 I_0) S_1 - \lambda s_0 I_1 S_2. \qquad (12)$$

Якщо скористатися граничними умовами (1) і замінити щільності $\alpha(\lambda)$ і $A(\lambda)$ їх виразами через інтегральні оператори то прийдемо до функціональних рівнянь такого вигляду

$$\int_0^\infty [a_{11}(\lambda) S_1 + a_{12}(\lambda) S_2]\lambda \cos\lambda\xi d\lambda = -f_1(\xi);$$

$$\int_0^\infty [a_{21}(\lambda) S_1 + a_{22}(\lambda) S_2]\lambda \sin\lambda\xi d\lambda = -f_2(\xi), (0 \le \xi < 1), \qquad (13)$$

де

$$a_{11}(\lambda) = 2\lambda s_0 (I_0 K_0 - I_1 K_1) + \left(\frac{3m-2}{m} + \lambda^2 s_0{}^2\right)(K_1 I_0 - I_1 K_0) - 4\frac{m-1}{m} I_1 K_1 / \lambda s_0;$$

$$a_{12}(\lambda) = \lambda^2 s_0{}^2 (K_1 I_1 - I_0 K_0) + \lambda s_0 (I_1 K_0 - I_0 K_1) + 2\frac{m-1}{m} I_1 K_1, \qquad (14)$$

$$a_{21}(\lambda) = -a_{12}(\lambda),\ a_{22}(\lambda) = \lambda^2 s_0{}^2 (K_0 I_1 - I_0 K_1).$$

Якщо перше рівняння проінтегрувати по змінній ξ, а потім в обох рівняннях замінити функцію $\sin\lambda\xi$ її інтегральним зображенням [7]

$$\sin\tau z = \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{x^2 I_1(\tau x) dx}{\sqrt{z^2 - x^2}} = \tau\int_0^x \frac{x I_0(\tau x) dx}{\sqrt{z^2 - x^2}}$$

то після заміни порядків інтегрування і низки перетворень приходимо до такої системи рівняннь Абеля

$$\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \int_0^1 [\varphi(t) L_{11}(t,x) + \psi(t) L_{12}(t,x)] dt = -F_1(\xi),$$

$$\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \int_0^1 [\varphi(t) L'_{21}(t,x) + \psi(t) L'_{22}(t,x)] dt = -f_2(\xi), \qquad (15)$$

де

$$L_{11}(t,x) = \int_0^\infty a_{11}(\lambda)\lambda x J_0(\lambda t) J_0(\lambda x) d\lambda,$$

$$L_{12}(t,x) = \int_0^\infty a_{12}(\lambda)\lambda x J_1(\lambda t) J_0(\lambda x) d\lambda,$$

$$L'_{21}(t,x) = \int_0^\infty a_{21}(\lambda)\lambda^2 x J_0(\lambda t) J_0(\lambda x) d\lambda,$$

$$L'_{22}(t,x) = \int_0^\infty a_{22}(\lambda)\lambda^2 x J_1(\lambda t) J_0(\lambda x) d\lambda, \qquad (16)$$

$$F_1(\xi) = \int f_1(\xi)\partial\xi + C_1.$$

Подальше перетворення рівнянь (13) неможливе без дослідження асимптотичної поведінки $\alpha_{ij}(\lambda)$ при $\lambda >> 1$. Якщо скористатися наближеними формулами для функцій Бесселя [4] при $x >> 1$

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \times \left[1 - \frac{4n^2 - 1}{1!8x} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \ldots\right]$$

$$K_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \times \left[1 + \frac{4n^2 - 1}{1!8x} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \ldots\right] \qquad (17)$$

то отримаємо

$$a_{11}(\lambda) \approx 1/2,\ a_{12}(\lambda) \approx \frac{m-4}{4m}\frac{1}{\lambda s_0},$$

$$a_{21}(\lambda) \approx -\frac{m-4}{4m}\frac{1}{\lambda s_0},$$

$$a_{22}(\lambda) \approx -\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\frac{1}{\lambda^2 s_0{}^2}. \qquad (18)$$

Розв'язок рівнянь Абеля знаходимо з формул

$$\int_0^s \frac{g(x) dx}{\sqrt{s^2 - x^2}} = f(s)$$

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{s f(s) ds}{\sqrt{x^2 - s^2}}. \qquad (19)$$

В кінцевому результаті задача зводиться до системи інтегральних рівнянь Фредгольма

$$\frac{1}{2}\varphi(x) + \int_0^1 [\varphi(t) K_{11}(t,x) + \psi(t) K_{12}(t,x)] dt = \Phi_1(x),$$

$$-\frac{1}{2}\psi(x)+\int_0^1\left[\varphi(t)K_{21}(t,x)+\psi(t)K_{22}(t,x)\right]dt= \\ =\Phi_2(x) \tag{20}$$

де

$$K_{11}(t,x)=\int_0^\infty\left[a_{11}(\lambda)-\frac{1}{2}\right]x\lambda J_0(\lambda t)J_0(\lambda x)d\lambda,$$

$$K_{12}(t,x)=\frac{m-4}{4ms_0}\frac{x}{t}H(t-x)+ \\ +\int_0^\infty\left[a_{12}(\lambda)-\frac{m-4}{4m\lambda s_0}\right]x\lambda J_1(\lambda t)J_0(\lambda x)d\lambda,$$

$$K_{21}(t,x)=-\frac{m-4}{4ms_0}H(x-t)+ \\ +\int_0^\infty\left[a_{22}(\lambda)+\frac{m-4}{4m\lambda s_0}\right]x\lambda J_0(\lambda t)J_1(\lambda x)d\lambda, \tag{21}$$

$$K_{22}(t,x)=-\frac{3}{32s_0^{\,2}}\begin{cases} x/t & t>x \\ t/x & x>t \end{cases}+ \\ +\int_0^\infty\left[a_{22}(\lambda)+\frac{1}{2}+\frac{3}{16\lambda^2 s_0^{\,2}}\right]x\lambda J_1(\lambda t)J_1(\lambda x)d\lambda.$$

$$\Phi_1(x)=-\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{sF_1(s)ds}{\sqrt{x^2-s^2}},\ \Phi_2(x)= \\ =-\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{sf_2(s)ds}{\sqrt{x^2-s^2}};\quad F_1'(s)=f_1(s) \tag{22}$$

При виведенні рівнянь (15) застосовувався метод Кумера покращення збіжності невласних інтегралів, а також значення інтегралів в класі узагальнених функцій такого вигляду

$$\int_0^\infty J_1(\tau x)J_0(\tau t)d\tau=\frac{1}{\tau}H(t-x)$$

$$\int_0^\infty J_0(\tau x)J_0(\tau t)d\tau=\frac{1}{t}\delta(t-x)$$

В цій роботі приведена методика зведення другої основної мішаної задачі математичної теорії пружності для просторового тіла з циліндричною тріщиною до системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

Список використаних джерел

1. *Mushelyshvyly N.I.* Some Basic tasks matematycheskoy theory upruhosty. - Moscow: Nauka, 1966. - 707 p.

2. *Ulytko A.F.* method sobstvennыh vektornыh functions in spatial tasks upruhosty theory. - Kiev: Naukova. view 1979.-264 p.

3. *M.A. Martynenko.* Mixed spatial problems of mathematical theory of elasticity: monograph /-K.: Education of Ukraine, 2012. - 376 p.

4. *N.N. Lebedev* Special functions and applications. - Leningrad: Fyzmathyz, 1963. - 358 p.

5. *Lurev A.I.* Prostranstvennue problem theory upruhosty.-M.: Gostekhizdat, 1955. - 492 p.

6. *A.T. Ulytko* Axisymmetric deformation of an elastic paraboloid of revolution / / add. USSR. August. A. - 1968. - № 12. - P.17-20.

7. *G.N. Watson* Theory of Bessel functions. - Moscow: IL, 1949. - 798 p.

Надійшла до редколегії 20.05.13