

12. Метод прогонки – алгоритм для реалізації неявних різницевих схем

Тетяна Джуренко, Світлана Гузенко

Національний університет харчових технологій

Вступ. Метод прогонки є найбільш популярним алгоритмом реалізації неявних різницевих схем. Цей алгоритм має велике значення для становлення технологій розрахунків рівнянь з частинними похідними. Використання даного алгоритму для розв'язання рівнянь з частинними похідними в MathCAD може бути виправданим тільки якщо ви працюєте з дуже щільними сітками, які приводять до системи різницевих рівнянь великої розмірності і, відповідно, дуже великому часу обчислення.

Матеріали і методи. Основним ядром обчислення у програмі, яка реалізує в MathCAD неявну різницеву схему, було розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які задавалися матрицею. Ця матриця є трьохдіагональною. Всі її елементи, крім елементів на головній діагоналі та двох сусідніх діагоналях, дорівнюють нулю. Матриця системи лінійних різницевих рівнянь для неявної схеми (для $M=10$) матиме вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

З точки зору оптимізації швидкості дії алгоритму використання вбудованої функції *insolve* є вельми неефективним, оскільки основний об'єм арифметичних операцій, які виконуються комп'ютером (а це величина порядку m^2), зводиться до множення великої кількості нулів. Алгоритм прогонки дозволяє зменшити число арифметичних дій на цілий порядок, тобто до значення порядку m . Це означає, що при використанні просторових сіток з 1000 вузлами виграш часу обчислень складе величину порядку 10^3 !

Алгоритм прогонки в програмі MathCAD матиме вигляд:

$$\alpha_{M-1} := 0, \quad \beta_{M-1} := 0$$

$$m := M - 1 \dots 1$$

$$\gamma_m := \frac{1}{A_{m,m} + A_{m,m+1} \cdot \alpha_m}$$

$$\alpha_{m-1} := \gamma_m \cdot A_{m,m-1}$$

$$\beta_{m-1} := \gamma_m \cdot (A_{m,m+1} \cdot \beta_m - \alpha_m)$$

$$m := 0 \dots M - 1$$

$$u_{m+1} := \alpha_m \cdot u_m + \beta_m$$

Складена програма виконує перерахунок одного кроку у часі, тобто замінює вміст стовпця u з попереднього часового прошарку обчисленими значеннями невідомої функції з наступного прошарку. Перші п'ять рядків програми показують так званий зворотній хід прогонки, а останні два рядки – її прямий хід.

Результати. За допомогою програми MathCAD було побудовано та досліджено алгоритм прогонки для розв'язання рівнянь з частинними похідними.

Висновки. Запропонований алгоритм є основною частиною алгоритму, за допомогою якого розв'язують різницеві рівняння, і потім досліджують отримані розв'язки. Програма MathCAD дозволяє графічно показати всі розв'язки і проаналізувати їх.

Література

1. Кирьянов Д. «Mathcad 12». – СПб.:БХВ – Петербург, 2005. – 576 с.
2. Кирьянов Д. «Вычислительная математика». – СПб.:БХВ – Петербург, 2005.